ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von A. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, H. MÜLLER-BRESLAU-Charlottenburg, L. PRANDTL-Göttingen und R. RÜDENBERG-Berlin

Band 2
(2. Jahrgang)

Mit 259 Abbildungen im Text
und 9 Tafeln

Berlin
VERLAG DES VEREINES DEUTSCHER INGENIEURE
1922

INHALTSÜBERSICHT

A. Verfasserverzeichnis

(H. = Hauptaufsätze, Z. B. = Zusammenfassende Berichte, K. A. = Kurze Auszüge, Bb. = Buchbesprechungen, Kl. M. = Kleine Mitteilungen, N. = Nachrichten, Z. = Zuschriften an den Herausgeber.)

	Seite
Abraham, M. Die Induktion von Wechselströmen in einer ebenen, leitenden Schicht. H.	109—131
Alt, H. Untersuchungen über Wälzhebelmechanismen. H.	187—194
— Ueber Umsteuerungen. Z.	479—480
Basch, A. Ueber die Genauigkeitssteigerung durch Hinzutreten einer neuen Beobachtung. H.	447—458
— Ein rechnerisch-zeichnerisches Verfahren für parabolische Ausgleichung. Kl. M.	401—403
Bergmann, St. Das Quadratwurzelziehen auf der Rechenmaschine. Kl. M.	316—317
Bieberbach, L. G. Kowalewski, Die Klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen. Bb.	476—477
— W. Lietzmann, Erkenntnislehre im mathematischen Unterricht der Oberklassen. Bb.	477
— David Hilbert. N.	79—80
Bock. Der adiabatische Elastizitätsmodul. Z.	232
Boehm, C. Zur Einführung einer einheitlichen Vektorschreibweise. Z.	163—164
Bortkiewicz, L. v. Das Helmertsche Verteilungsgesetz für die Quadratsumme zufälliger Beobachtungsfehler. H.	358—375
Courant, R. Zur Theorie der kleinen Schwingungen. H.	278—285
Doehlemann, K. G. Scheffers, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Bd. I. Bb.	224—225
— P. B. Fischer, Einführung in die darstellende Geometrie. Bb.	225—226
Doetsch, G. Vorlesungen aus der angewandten Mathematik. N.	178—479
Föppl, L. Ueber eine Analogie zwischen rotierender Scheibe und belasteter Kreisplatte. H. u. Z.	92—96, 480
— G. Welter, Elastizität und Festigkeit von Spezialstählen bei hohen Temperaturen. Bb.	476
Föppl, O. Das Schaukelpendel. Kl. M.	150—153
Forchheimer, Ph. Ueber den freien Spiegel bei Grundwasserströmung. Kl. M.	75—76
Frank, Ph. A. Haas, Einführung in die theoretische Physik, mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme. Bb.	77—79
Friesecke, H. Zeichnerische Ermittlung von Fourier-Koeffizienten. Kl. M.	313—316
Galle, A. Neuere Integraphen. Z. B.	458—466
Gravelius, C. Erwiderung. H.	199
Groß, E. W. Fraenkel, Die Verfestigung der Metalle durch mechanische Beanspruchung. Bb.	76—77
Gumbel, E. J. Wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen zum Strahlungsgesetz. H.	286—292
— Mathematische Statistik. K. A.	147—150
Hak, I. Bemerkungen über eine besondere Art von Rechentafeln. Kl. M.	469—472
Hamel, G. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionstheorie. Bb.	158—160
— Massenanziehung in einem Kreisringkörper. Z.	408
Hencky, H. Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Z. B.	292—299
— Die numerische Bearbeitung von partiellen Differentialgleichungen in der Technik. Z. B.	58—66
Hoff, W. Der Segelflug und die Rhön-Segelflug-Wettbewerbe. Z. B.	207—218
Hopf, L. Hydraulik. K. A.	66—69
Hotopp, L. Massenanziehung in einem Kreisringkörper (Erwiderung). Z.	408
Jung, W. Ueber Umsteuerungen. Z.	480
Kafka, H. Elektrotechnik. K. A.	220—222
Kaufmann, W. Ueber Biegungsschwingungen stabförmiger Träger. H.	34—45
König, E. Potentialströmung durch Gitter. H.	422—429
Lachmann, K. und Rothe, R. Zur Konstruktion des Uebergangsbogens für Eisenbahngleise. H.	45—57

APR 28 '28 (Eng.)

312545

	Seite
Lacmann, O. Die Dreieckrechentafeln und die hydraulische Energiemuwandlungskurve. H. . . .	375—380
Lagally, M. Berechnung der Kräfte und Momente, welche strömende Flüssigkeiten auf ihre Begrenzung ausüben. H.	409—422
— S. Finsterwalder. N.	406—407
Lohmann, W. Die Hermannschen Schablonen zur harmonischen Analyse. Kl. M.	153—156
Mises, R. v. Die Lage der Auftriebsresultierenden von Tragflügeln. Kl. M.	71—73
— Die Bewegung des Dollarkurses seit 1918. Kl. M.	306—312
— L. Prandtl, C. Wieselsberger, A. Betz, Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. Bb.	76
— H. G. Bader, Grundlagen der Flugtechnik. Bb.	157
— H. Geiringer, Die Gedankenwelt der Mathematik. Bb.	224
— W. Zimm, Über die Strömungsvorgänge im freien Luftstrahl. Bb.	319
— P. Riebesell, Steuer-Mathematik. Bb.	319
— C. V. V. Charlier, Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik. Bb.	319—320
— E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Bb.	403
— L. Schiller, Untersuchungen über laminare und turbulente Strömungen. Bb.	478
— R. v. Mises, Fluglehre. Bb. . .	477—478
Mollier, R. Eichelberg, Die thermischen Eigenschaften des Wasserdampfes im technisch wichtigen Gebiet. Bb.	317—318
Nádai, A. Ueber die Biegung durchlaufender Platten und der rechteckigen Platte mit freien Rändern. H.	1—26, 164
— Theorie der Plattenbiegung und ihre experimentelle Bestätigung. Z. B.	381—398
— Elastizität und Festigkeit. K. A.	302—306
— Festigkeitslehre. K. A.	467—469
Némenyi, P. Mechanismus zur Regelung der Antriebskraft einer Arbeitsmaschine mit veränderlichem Widerstand. Kl. M. . . .	73—75
— Verhalten reziproker Kräftepläne bei Zerlegung des Fachwerkes. Kl. M.	222—223
— Berechnung der Schubspannungen im gebogenen Balken (Erwiderung) Z.	161
Neuendorff, R. Zeichnerische Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung in Polarkoordinaten. H.	131—136, 232
Noether, E. Ueber ein Problem der Stromleitung. H.	274—278
— Geitler, Elektromagnetische Schwingungen und Wellen. Bb.	476
Pick, G. Ueber die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen von Schwingungsproblemen. H. . . .	353—357
Pohlhausen, E. H. Gröber, Die Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges. Bb. .	156—157
Pöschl, Th. Ueber die Spannungserhöhung durch kreisrunde Löcher in einem gezogenen Bleche (Erwiderung). H.	187
— Bisherige Lösungen des Torsionsproblems für Drehkörper. Z. B.	137—147
— C. Weber, Die Lehre der Drehungsfestigkeit. Bb.	475—476
— Ferdinand Wittenbauer †. N. .	320—322
Prandtl, L. Zur Einführung einer einheitlichen Vektorschreibweise. Z.	161—163
Ratzersdorfer, J. Baumechanik. K. A.	218—220
— Baumechanik. K. A.	399—401
— Geusen, Die Eisenkonstruktionen. Bb.	157—158
Reissner, H. Stationärer Bewegungszustand einer schraubenförmigen Wirbelfläche. H.	106—109
Riebesell, P. Ueber die Korrelationsmethode. H.	195—199
Rothe, R. s. K. Lachmann.	
Schiller, L. Die Entwicklung der laminaren Geschwindigkeitsverteilung und ihre Bedeutung für Zähigkeitsmessungen. H. . . .	96—106
Schilling, Fr. Ueber eine Aufgabe der malerischen Perspektive des Leone Batista Alberti. H. .	250—262
van Schouten, I. A. Bezeichnungen für Vektorgrößen. Z. .	227—231
Schreiber, P. Ueber die Verwendbarkeit der Logarithmenpapiere bei der Integration der Differentialgleichungen $y' = f(x, y)$. H.	200—207
Schrutka, L. Zur Einführung einer einheitlichen Vektorschreibweise. Z.	163
Schuler, M. Der Kreiselkompaß unter Einfluß der Schiffsschwingungen. H.	233—250
Schwerin, E. Ueber die Spannungen in freitragenden gefüllten Rohren. H.	340—353
— Zur Stabilität der dünnwandigen Hohlkugel unter gleichmäßigem Außendruck. H.	81—91
Skrobanek, Fr. Die Gleichgewichtsform eines elastisch dehnbaren Fadens (Elastische Kettenlinie). Kl. M.	472—474
Spielrein. Vektorbezeichnung. Z.	323—324
Stodola, A. Kippsicherheit und Achterbildung an geschlossenen Kreisringen. Z.	231—232
Stübler. Ueber hyperboloidische Verzahnung. H.	429—446
Tanaka, Y. Allgemeine Theorie der Blattfeder. H.	26—34

Seite

Timoschenko, S. Berechnung der Schubspannungen im gebogenen Balken. Z. . . . . 160—161

Trefftz, E. Ueber die Wirkung einer Abrundung auf die Torsionsspannungen in der inneren Ecke eines Winkeleisens. H. . . . 263—267

Walther, A. Obere und untere Grenze eines Newtonschen Potentials auf Ebenen. Kl. M. . . . 69—71

Weber, C. Ueber die Spannungserhöhung durch kreisrunde Löcher in einem gezogenen Bleche. H. . . . . 185—187

Seite

— Spannungsverteilung in Blechen mit mehreren kreisrunden Löchern. H. . . . . 267—273

— Bisherige Lösungen des Torsionsproblems. Z. B. . . . . 299—302

Wieghardt, K. Ueber den Balken auf nachgiebiger Unterlage. H. 165—184

Wieselsberger, C. Zur Theorie des Tragflügels bei gekrümmter Flugbahn. H. . . . . 325—340

Wirtz, C. P. Meth, Theorie der Planetenbewegung. Bb. 318

— H. E. Timerding, Die Fallgesetze, ihre Geschichte und ihre Bedeutung. Bb. 318

B. Sachverzeichnis

Seite

Aeromechanik und Flugtechnik.

Hoff, W. Der Segelflug und die Rhön-Segelflug-Wettbewerbe. Z. B. 207—218

Mises, R. v. Die Lage der Auftriebsresultierenden von Tragflügeln. Kl. M. . . . . 71—73

— L. Prandtl, C. Wieselsberger, A. Betz, Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. Bb. 76

— H. G. Bader, Grundlagen der Flugtechnik. Bb. 157

— W. Zimm, Ueber die Strömungsvorgänge im freien Luftstrahl. Bb. 319

— R. v. Mises, Fluglehre. Bb. . . 477—478

Wieselsberger, C. Zur Theorie des Tragflügels bei gekrümmter Flugbahn. H. . . . . 325—340

Neue Erfolge im Segelflug. N. . 322

Praktische Analysis.

Bieberbach, L. G. Kowalewski, Die Klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen. Bb. . 476—477

Boehm, C. Zur Einführung einer einheitlichen Vektorschreibweise. Z. . . . . 163—164

Friesecke, H. Zeichnerische Ermittlung von Fourier-Koeffizienten. Kl. M. . . . . 313—316

Galle, A. Neuere Integraphen. Z. B. 458—466

Hak, I. Bermerkungen über eine besondere Art von Rechentafeln. Kl. M. . . . . 469—472

Hamel, G. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionenthcorie. Bd. I. Elemente der Funktionentheorie. Bb. . . . . 158—160

Hencky, H. Die numerische Bearbeitung von partiellen Differentialgleichungen in der Technik. Z. B. . . . . 58—66

Seite

Lacmann, O. Die Dreieckrechentafeln und die hydraulische Energieumwandlungskurve. H. . . . 375—380

Lohmann, W. Die Hermanschen Schablonen zur harmonischen Analyse. Kl. M. . . . . 153—156

Neuendorff, R. Zeichnerische Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung in Polarkoordinaten. H. . . . . 131—136, 232

Prandtl, L. Zur Einführung einer einheitlichen Vektorschreibweise. Z. 161—163

van Schouten, I. A. Bezeichnungen für Vektorgrößen. Z. . . . 227—231

Schreiber, P. Ueber die Verwendbarkeit der Logarithmenpapiere bei der Integration der Differentialgleichungen $y' = f(x, y)$. H. 200—207

Schrutka, L. Zur Einführung einer einheitlichen Vektorschreibweise. Z. 163

Spielrein. Vektorbezeichnung. Z. 323—324

Praktische Verwendung der Nomographie. N. 227

Arbeitsausschuß für praktische Rechenmethoden. N. 322

Politische Arithmetik.

Mises, R. v. Die Bewegung des Dollarkurses seit 1918. Kl. M. . 306—312

— P. Riebesell, Steuer-Mathematik. Bb. 319

Praktische Arithmetik und Algebra.

Bergmann, St. Das Quadratwurzelziehen auf der Rechenmaschine. Kl. M. . . . . 316—317

Pick, G. Ueber die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen von Schwingugsproblemen. H. . . . 353—357

Seite

Ausbildung.

Bieberbach, L. W. Lietzmann, Erkenntnislehre im mathematischen Unterricht der Oberklassen. Bb. 477
Doetsch, G. Vorlesungen aus der angewandten Mathematik. N. . . 478—479
Mises, R. v. H. Geiringer, Die Gedankenwelt der Mathematik. Bb. 224
Neuordnung an den technischen Hochschulen Preußens. N. . . 226—227
Prüfungsordnung für die Mathematiklehrer an höheren Schulen. N. 405—406

Ausgleichrechnung.

Basch, A. Ueber die Genauigkeitssteigerung durch Hinzutreten einer neuen Beobachtung. H. . . . . 447—458
— Ein rechnerisch-zeichnerisches Verfahren für parabolische Ausgleichung. Kl. M. . . . . 401—403
Bortkiewicz, L. v. Das Helmertsche Verteilungsgesetz für die Quadratsumme zufälliger Beobachtungsfehler. H. . . . . 358—375
Gravelius, C. Ueber die Korrelationsmethode, Erwiderung. H. . 199
Riebesell, P. Ueber die Korrelationsmethode. H. . . . . 195—199

Baumechanik.

Nemény i, P. Verhalten reziproker Kräftepläne bei Zerlegung des Fachwerkes. Kl. M. . . . . 222—223
Ratzersdorfer, J. Baumechanik. K. A. . . . . 218—220
— Baumechanik. K. A. . . . . 399—401
— Geusen, Die Eisenkonstruktionen. Bb. . . . . 157—158

Eisenbahnwesen.

Lachmann, K. und Rothe, R. Zur Konstruktion des Uebergangsbogens für Eisenbahngleise. H. . 45—57
Rothe, R. s. K. Lachmann.

Elastizität.

Bock. Der adiabatische Elastizitätsmodul. Z. 232
Föppl, L. Ueber eine Analogie zwischen rotierender Scheibe und belasteter Kreisplatte. H. u. Z. 92—96, 180
Hencky, H. Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Z. B. . . 292—299
Kaufmann, W. Ueber Biegungsschwingungen stabförmiger Träger. H. . . . . 34—45
Nádai, A. Ueber die Biegung durchlaufender Platten und der rechteckigen Platte mit freien Rändern. H. . . . . 1—26, 164
— Theorie der Plattenbiegung und ihre experimentelle Bestätigung. Z. B. . . . . 381—398
Nemény i, P. Berechnung der Spannungen im gebogenen Balken (Erwiderung). Z. 161

Seite

Pöschl, Th. Ueber die Spannungserhöhung durch kreisrunde Löcher in einem gezogenen Bleche. (Erwiderung). H. 187
— Bisherige Lösungen des Torsionsproblems für Drehkörper. Z. B. 137—147
— C. Weber, Die Lehre der Drehungsfestigkeit. Bb. . . . . 475—476
Schwerin, E. Ueber die Spannungen in freitragenden gefüllten Rohren. H. . . . . 340—353
— Zur Stabilität der dünnwandigen Hohlkugel unter gleichmäßigem Außendruck. H. . . . . 81—91
Skrobanek, Fr. Die Gleichgewichtsform eines elastisch dehnbaren Fadens (Elastische Kettenlinie). Kl. M. . . . . 472—474
Stodola, A. Kippsicherheit und Achterbildung an geschlossenen Kreisringen. Z. . . . . 231—232
Tanaka, Y. Allgemeine Theorie der Blattfeder. H. . . . . 26—34
Timoschenko, S. Berechnung der Schubspannungen im gebogenen Balken. Z. . . . . 160—161
Trefftz, E. Ueber die Wirkung einer Abrundung auf die Torsionsspannungen in der inneren Ecke eines Winkeleisens. H. . . . . 263—267
Weber, C. Ueber die Spannungserhöhung durch kreisrunde Löcher in einem gezogenen Bleche. H. . . . . 185—187
— Spannungsverteilung in Blechen mit mehreren kreisrunden Löchern. H. . . . . 267—273
— Bisherige Lösungen des Torsionsproblems. Z. B. . . . . 299—302
Wieghardt, K. Ueber den Balken auf nachgiebiger Unterlage. H. . . . . 165—184

Elektrizität.

Abraham, M. Die Induktion von Wechselströmen in einer ebenen, leitenden Schicht. H. . . . . 109—131
Kafka, H. Elektrotechnik. K. A. 220—222
Noether, F. Ueber ein Problem der Stromleitung. H. . . . . 274—278
— Geitler, Elektromagnetische Schwingungen und Wellen. Bb. . . . 476

Festigkeitslehre.

Föppl, L. G. Welter, Elastizität und Fetigkeit von Spezialstählen bei hohen Temperaturen. Bb. . 476
Groß, E. W. Fraenkel, Die Verfestigung der Metalle durch mechanische Beanspruchung. Bb. . 76—77
— Elastizität und Festigkeit K. A. 302—306
— Festigkeitslehre. K. A. . . . . 467—469

Darstellende Geometrie.

Doehlemann, K. G. Scheffers, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Bd. I. Bb. . . . . 224—225

Seite

— P. B. Fischer, Einführung in die darstellende Geometrie. Bb. . . 225—226
Schilling, Fr. Ueber eine Aufgabe der malerischen Perspektive des Leone Batista Alberti. H. . 250—262

Hydraulik und Hydromechanik.

Forchheimer, Ph. Ueber den freien Spiegel bei Grundwasserströmung. Kl. M. . . . . 75—76
Hopf, L. Hydraulik. K. A. . . . 66—69
König, E. Potentialströmung durch Gitter. H. . . . . 422—429
Lagally, M. Berechnung der Kräfte und Momente, welche strömende Flüssigkeiten auf ihre Begrenzung ausüben. H. . . . . 409—422
Mises, R. v. L. Schiller, Untersuchungen über laminare und turbulente Strömungen. Bb. . . . 478
Reissner, H. Stationärer Bewegungszustand einer schraubenförmigen Wirbelfläche. H. . . . . 106—109
Schiller, L. Die Entwicklung der laminaren Geschwindigkeitsverteilung und ihre Bedeutung für Zähigkeitsmessungen. H. . . . 96—106

Kinematik.

Alt, H. Untersuchungen über Wälzhebelmechanismen. H. . . . . 187—194
— Ueber Umsteuerungen. Z. . . . 479—480
Jung, W. Ueber Umsteuerungen. Z. 480
Stübler. Ueber hyperboloidische Verzahnung. H. . . . . 429—446

Maschinenbau.

Neményi, P. Mechanismus zur Regelung der Antriebskraft einer Arbeitsmaschine mit veränderlichem Widerstand. Kl. M. . . 73—75
Schuler, M. Der Kreiselkompaß unter Einfluß der Schiffsschwingungen. H. . . . . 233—250

Allgemeine Mechanik.

Courant, R. Zur Theorie der kleinen Schwingungen. H. . . . . 278—285
Föppl, O. Das Schaukelpendel. Kl. M. . . . . 150—153
Hamel, G. Massenanziehung in einem Kreisringkörper. Z. . . 408
Hotopp, L. Massenanziehung in einem Kreisringkörper (Erwiderung). Z. 408

Seite

Wirtz, C. P. Meth, Theorie der Planetenbewegung. Bb. 318
— H. E. Timerding, Die Fallgesetze, ihre Geschichte und ihre Bedeutung. Bb. 318

Persönliches.

Bieberbach, L. David Hilbert. N. . . . . 79—80
Lagally, L. S. Finsterwalder. N. 406—407
Pöschl, Th. Ferdinand Wittenbauer. N. . . . . 320—322
Max Abraham †. N. 478

Allgemeine Physik.

Frank, Ph. A. Haas, Einführung in die theoretische Physik mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme. Bb. . . . 77—79
Walther, A. Obere und untere Grenze eines Newtonschen Potentials auf Ebenen. Kl. M. . . . 69—71

Vereine, Vorträge und Versammlungen.

Berliner Ausschuß für technische Mechanik. N. 80
Versammlung in Leipzig September 1922. N. . . . . 160, 226, 322, 404—405
Hydro-aerodynamische Konferenz Innsbruck 1922. N. 322
Deutsche Ingenieurwissenschaftliche Vereinigung. N. 404, 478
Technisch-Wissenschaftliches Vortragswesen. N. 478

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.

Gumbel, E. J. Wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen zum Strahlungsgesetz. H. . . . 286—292
— Mathematische Statistik. K. A. . 147—150
Mises, R. v. C. V. L. Charlier, Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik. Bb. . 319—320
E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Bb. 403

Wärme.

Mollier, R. Eichelberg, Die thermischen Eigenschaften des Wasserdampfes im technisch wichtigen Gebiet. Bb. . . . . 317—318
Pohlhausen, E. H. Gröber, Die Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges. Bb. . 156—157

C. Buchbesprechungen und Kurze Auszüge

(Bb. = Buchbesprechungen, K. A. = Kurze Auszüge. Der Name des Referenten ist in Klammern beigesetzt.)

Seite

Bader, H. G. Grundlagen der Flugtechnik. Bb. (Mises) 157
Betz, A. s. Prandtl.
Beyerhaus, E. Die Formel von Ganguillet-Kutter für den hydraulischen Gefällsverlust. K. A. (Hopf) 66—67

Seite

Bieberbach, L. Lehrbuch der Funktionentheorie. Band I, Elemente der Funktionentheorie. Bb. (Hamel) . . . . . 158—160
Biermanns, J. Eisenhaltige Schwingungskreise. K. A. (Kafka) . . 220—221

Seite

— Ausgleichsvorgänge beim Parallelschalten von Synchronmaschinen. K.A. (Kafka) . . . . . 221—222
Birkhoff, G. D. Kreisförmige Platte veränderlicher Dicke. K.A. (Nádai) 467
Blaschke, E. Neuordnung der mathematischen Statistik. K.A. (Gumbel) . . . . . 147—148
Bleckmann, T. Seilpolygon. K.A. (Ratzersdorfer) 218
Böhny, F. Ueber die Bemessung von Druckstäben. K.A. (Ratzersdorfer) 400
Bortsch, R. Der Plattenbalken. K.A. (Nádai) . . . . . 302—303
Braun, E. Graphisches Verfahren zur Behandlung von Wasserschloßproblemen. K.A. (Hopf) . . . 69
Carrington, H. Elastizitätskonstanten von Holz. K.A. (Nádai) 467
Charlier, C. V. L. Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik. Bb. (Mises) 319—320
Cook, G. Die scheinbare Massenvergrößerung eines in einer Flüssigkeit bewegten Körpers. K.A. (Hopf) 68
Czuber, E. Statistische Reihen. K.A. (Gumbel) 147
— Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. Bb. (Mises) . . 403
Dixon, A. C. Von zwei Kreisbogen begrenzte elastische Platte. K.A. (Nádai) 468
Doeinck. Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke. K.A. (Ratzersdorfer) 401
Eichelberg. Die thermischen Eigenschaften des Wasserdampfes im technisch wichtigen Gebiet. Bb. (Mollier) . . . . . 317—318
Enyedi, B. Die Berechnung des biegungssteifen Stabzugs. K.A. (Ratzersdorfer) 220
Esscher, F. Stabilität und Korrelation von statistischen Reihen. K.A. (Gumbel) . . . . . 149—150
Faust, J. Gleitgeschwindigkeit eines im strömenden Wasser treibenden Kahnes. K.A. (Hopf) 69
Fischer, P. B. Einführung in die darstellende Geometrie. Bb. (Doehlemann) . . . . . 225—226
Fish, G. D. Biegung ebener Deckel. K.A. (Nádai) 467
Fraenkel, H. W. Die Verfestigung der Metalle durch mechanische Beanspruchung. Bb. (Groß) 76—77
Gebers. Aehnlichkeitsgesetz für Reibungswiderstände. K.A. (Hopf) 67
Geiringer, H. Die Gedankenwelt der Mathematik. Bb. (Mises) . 221
Geitler. Elektromagnetische Schwingungen und Wellen. Bb. (Noether) 476

Seite

Geusen, L. Die Eisenkonstruktionen. Bb. (Ratzersdorfer) . . 157—158
— Lagerung von Raumfachwerken. K.A. (Ratzersdorfer) . . . . 218—219
Gröber, H. Die Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges. Bb. (E. Pohlhausen) 156—157
Haas, A. Einführung in die theoretische Physik mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme. Bb. (Frank) . . . 77—79
Hagström, K. G. Zum Vererbungsproblem. K.A. (Gumbel) . 148
— Fehlertheorie. K.A. (Gumbel) . 148
— Kritik der Korrelationstheorie. K.A. (Gumbel) 148
Immich, W. Das Zusammenwirken von Schraube und Schiffskörper. K.A. (Hopf) 68
Kowalewski, G. Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen. Bb. (Bieberbach) . . . 476—477
Lewe. Beitrag zur strengen Lösung des Pilzdeckenproblems durch Fouriersche Reihen. K.A. (Nádai) 303—304
Liwschitz, M. Dämpferwicklung einer Mehrphasen-Synchronmaschine im Parallelbetrieb. K.A. (Kafka) 221
Loup, V. Berechnung der Spannungen eines durch eine Längskraft beanspruchten Eisenbetonbalkens. K.A. (Ratzersdorfer) . 400—401
Ludwik, P. Kohäsion, Härte, Zähigkeit. K.A. (Nádai) . . . . 305—306
Meth, P. Theorie der Planetenbewegung. Bb. (Wirtz) 318
Meyer, J. Grenzschichten zwischen Flüssigkeit und Wand. K.A. (Hopf) . . . . . 67—68
Mises, R. v. Fluglehre. Bb. (Mises) 477—478
Moreau, G. Bestimmung der Schlaghärte. K.A. (Nádai) 469
Müller, W. Stoßartige Beanspruchung. K.A. (Nádai) 305
Pirlet, J. Berechnung eines symmetrischen Stockwerkrahmens. K.A. (Ratzersdorfer) 401
Prandtl, L., Wieselsberger, C. und Betz, A. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. Bb. (Mises) . . 76
Riebesell, P. Steuer-Mathematik. Bb. (Mises) 319
Roarck, R. J. Festigkeit von angeschweißten Deckeln. K.A. (Nádai) 467
Scheffers, G. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Bd. I. Bb. (Doehlemann) . . . . . 224—225
Schick, R. Berechnung eines Tragwerks, bei dem einzelne Stäbe biegungssteif ausgebildet sind. K.A. (Ratzersdorfer) 219
Schiller, L. Untersuchungen über laminare und turbulente Strömung. Bb. (Mises) 478

	Seite
Schmidt, E. Erweiterung der Clapeyronschen Gleichung. K. A. (Ratzersdorfer)	399
Schneider, A. Der Zusammenhang zwischen Durchflußmenge und Druckhöhe bei Ponceletöffnungen. K. A. (Hopf)	68
Spiegel, G. Berechnung des biegungssteifen Stabzugs. K. A. (Ratzersdorfer)	210–220
Schocklitsch, A. Die laminare und die turbulente Strömung in offenen Gerinnen. K. A. (Hopf)	68
Schultz, H. Stabilitätsformeln für Seeschiffe. K. A. (Hopf)	69
Timerding, H. E. Die Fallgesetze, ihre Geschichte und ihre Bedeutung. Bb. (Wirtz)	318
Timoschenko, S. Plattenbiegung. K. A. (Nádai)	304
— Erzwungene Schwingungen einer Brücke. K. A. (Nádai)	467
— Torsion mit ebenbleibenden Querschnitten. K. A. (Nádai)	468
— Biegungsproblem und gespannte Membran. K. A. (Nádai)	468–469
Vinzenz, J. Zur Berechnung des kontinuierlichen Trägers. K. A. (Ratzersdorfer)	399
Waizenegger, F. Beitrag zur Härteprüfung. K. A. (Nádai)	304–305
Walkers, J. Venturimesser. K. A. (Hopf)	68
Weber, C. Die Lehre der Drehungsfestigkeit. Bb. (Pöschl)	475–476
Welter, G. Elastizität und Festigkeit von Spezialstählen bei hohen Temperaturen. Bb. (L. Föppl)	476
Westergard, H. M. Knickungserscheinungen. K. A. (Nádai)	304
Wieselsberger, C. s. Prandtl.	
Zimm, W. Ueber die Strömungsvorgänge im freien Luftstrahl. Bb. (Mises)	319
Zimmermann, H. Die Knickfestigkeit eines dünnen Stabes mit elastisch eingespannten Enden. K. A. (Ratzersdorfer)	399–400
Zimmermann, W. Scheibenförmige Wirbelstrombremse. K. A. (Kafka)	221

Die Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik erscheint sechsmal jährlich, am Ende eines jeden zweiten Kalendermonats, im Jahresumfang von rund 30 Bogen. Alle Zuschriften und Sendungen, die den wissenschaftlichen Inhalt der Zeitschrift betreffen, sind an den Herausgeber

Professor Dr. von Mises,
Berlin W 30, Neue Winterfeldt-Straße 43,

alle übrigen Zuschriften an den **Verlag des Vereines deutscher Ingenieure,** Berlin SW 19, Beuthstraße 7 zu richten.

Nachdruck

UNIVERSITY OF MINNESOTA RECEIVED DEC 5 1923 LIBRARY

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

Bd. 2 **Ende Februar 1922** **Heft 1**

Inhalt:

	Seite
Hauptaufsätze. A. Nádai: Ueber die Biegung durchlaufender Platten und der rechteckigen Platte mit freien Rändern	1
Y. Tanaka: Allgemeine Theorie der Blattfeder	26
W. Kaufmann: Ueber Biegungsschwingungen stabförmiger Träger	34
K. Lachmann und R. Rothe: Zur Konstruktion des Uebergangsbogens für Eisenbahngleise	45
Zusammenfassende Berichte. H. Hencky: Die numerische Bearbeitung von partiellen Differentialgleichungen in der Technik	58
Kurze Auszüge. Hydraulik	66
Kleine Mitteilungen. Walther: Obere und untere Grenze eines Newtonschen Potentials auf Ebenen — v. Mises: Die Lage der Auftriebs-Resultierenden von Tragflügeln — Neményi: Mechanismus zur Regelung der Antriebskraft einer Arbeitsmaschine mit veränderlichem Widerstand — Forchheimer: Ueber den freien Spiegel bei Grundwasserströmung	69
Buchbesprechungen. Prandtl, Wieselsberger und Betz: Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen — Fraenkel: Die Verfestigung der Metalle durch mechanische Beanspruchung. — Haas: Einführung in die theoretische Physik mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme	76
Nachrichten	79

HAUPTAUFSÄTZE

Über die Biegung durchlaufender Platten und der rechteckigen Platte mit freien Rändern.

Von **A. NADAI** in Göttingen.

Obgleich die elastische Platte ein wichtiges Konstruktionselement des Ingenieurs und des Architekten ist, kann nicht behauptet werden, daß man in den Anwendungen über ihre Formänderungen und über die in ihrem Innern wirkenden Spannungen auch nur in den am häufigsten vorkommenden Fällen der Belastung und der Randbedingungen so genau unterrichtet wäre, wie dies bei anderen Elementen der Konstruktionen in der Baustatik der Fall ist. Dies ist um so auffälliger, als die Methoden, die zur Lösung der Randwertaufgaben der dicken elastischen Platte dienen können, seit langer Zeit von seiten der Mathematiker auf das beste ausgearbeitet sind und dem Ingenieur zur Verfügung stehen. Die Bauformen des Eisenbetons mögen dazu beigetragen haben, daß man neuerdings in den Anwendungen den Elastizitätsproblemen der Plattenbiegung erhöhte Aufmerksamkeit entgegenbringt und das Bedürfnis empfindet, aus den Folgerungen der Rechnung praktischen Nutzen zu ziehen[1]).

Für die Behandlung derartiger Fragen der Festigkeitslehre vorbildlich sind die Untersuchungen von E. Meißner, A. Stodola[2]) und H Reißner über die Formänderungen und die Spannungen von gewölbten Platten, die nach Kugel-, Kegel- und nach Zylinderflächen gekrümmt sind, sowie von rotierenden Dampfturbinenscheiben, ferner die Arbeiten von Th. v. Kármán, R. v. Mises, L. Prandtl und S. Timoschenko über die Stabilität von gekrümmten Rohren, von Zylindern, flachen Stäben und Platten, deren Verfasser mit großem Erfolg diese schwierigen Aufgaben der Elastizitätslehre streng gelöst haben.

---

[1]) Man findet eine Zusammenstellung der neueren Arbeiten über die Plattenbiegung in den Vorlesungen über techn. Mechanik von A. Föppl (3. u. 5. Bd.) und in Love, Lehrbuch der Elastizität. Weitere ausführliche Kapitel widmen ihr A. und L. Föppl in »Drang und Zwang«, 1. Bd., München 1920. Vergl. auch den Bericht von L. Föppl, diese Zeitschr. 1, S. 466—481, 1921.

[2]) die ihre Fortführung in einer Reihe bedeutsamer Dissertationen der Techn. Hochschule in Zürich gefunden haben.

Innerhalb des hier ins Auge gefaßten Sondergebietes scheint mir für die Anwendungen zunächst ein Bedürfnis nach einer Zusammenstellung der wichtigsten Singularitäten der Plattenbiegung zu bestehen, dann aber nach einer systematischen Durcharbeitung der Randwertaufgaben der dicken elastischen Platte für die rechteckige Kontur und für unbegrenzte Platten mit den Symmetrieeigenschaften von rechteckigen Gittern. Die Beschreibung von gewissen Spannungszuständen von Platten der letzteren Art dürfte über die Fälle hinaus, in denen sie in den Baukonstruktionen der Praxis vorkommen, von weitgehendem Interesse sein, weil diese Deformationszustände zum Ausgang für die Synthese der Lösungen in den verwickelteren Fällen der Grenzbedingungen von endlichen und auch von unbegrenzten Platten dienen können und weil sie andererseits die Grundlage für die Aufstellung der Lösungen für die Platten mit großer Ausbiegung bilden werden [1]).

Die rechteckigen Platten mit freien Rändern bilden eine Gruppe von Belastungszuständen, die der Rechnung Schwierigkeiten bereitet haben. C. von Bach hat vor längerer Zeit darauf aufmerksam gemacht, daß sich der Rand von einer frei gestützten rechteckigen Platte von ihrer Unterlage bei der Belastung abhebt. Exakte Versuche über die Formänderungen einer frei aufliegenden quadratischen Platte, die durch eine exzentrisch aufgebrachte Last verbogen wurde, veröffentlichte A. Föppl, der das Abheben der Ecken ebenfalls beobachtete [2]). In der Theorie der Plattenbiegung hat man diesem Verhalten von freien Ecken wenig Aufmerksamkeit geschenkt. Die einfache Erklärung, die Lord Kelvin und P. G. Tait für den statischen Zusammenhang der 3 Grenzbedingungen einer dicken Platte von Poisson mit den beiden von Kirchhoff angegeben haben [3]), gibt die Möglichkeit, die Theorie der Plattenbiegung auf die freie bezw. auf ihrem Rande in einzelnen Punkten gestützte rechteckige Platte auszudehnen [4]). Die Drillungsmomente, die in einem Plattenschnitt von den zur Mittelfläche parallel gerichteten Schubspannungen herrühren, sind für die Deformation der Platte in größerer Entfernung vom Rand belanglos, sofern die zur Mittelfläche senkrecht gerichteten Schubkräfte durch die Ersatzschubkräfte ergänzt worden sind. Als eine merkwürdige Folge dieses Ersatzes ergibt sich die an einem Beispiel (der reinen Schubbeanspruchung einer Platte) bereits von Kelvin und Tait bemerkte Tatsache, daß in den Ecken, in denen das Drillungsmoment nicht verschwindet, konzentrierte Kräfte übrig bleiben [5]).

---

[1]) Den Grenzfall verschwindender Biegungssteifigkeit hat vor kurzem H. Hencky am Beispiel der quadratischen Platte in dieser Zeitschrift (Bd. 1, S. 81, 1921) mit Hilfe der von H. Marcus (Armierter Beton, 1919, S. 107) zur Lösung von Randwertaufgaben der dicken Platte herangezogenen Differenzenrechnung behandelt.

[2]) Mitt. aus dem mech. techn. Labor. d. Techn. Hochschule München, Heft 33, 1915. — Den »Versuchen mit allseitig aufliegenden, quadratischen und rechteckigen Eisenbetonplatten«, die von C. Bach und Graf auf Veranlassung des deutschen Ausschusses für Eisenbeton gemacht und veröffentlicht wurden, sind Einzelheiten über das Abheben der Ecken ebenfalls zu entnehmen.

[3]) der übrigens sein Korrelat in gewissen Sätzen über Doppelbelegungen in der Potentialtheorie findet.

[4]) Unter den Untersuchungen, in denen Sonderfälle der Plattenbiegung behandelt werden, sind mir nur die bemerkenswerte Arbeit von H. Happel (Math. Zeitschrift, Bd. 6, Heft 3, 1920) und die schöne Abhandlung von W. Ritz über die Bestimmung der Frequenzen von schwingenden quadratischen Platten bekannt, die sich auf den Fall der Grenzbedingungen eines allseitig freien Randes beim Rechteck beziehen. Happel benutzt das Verfahren von Ritz zur Herleitung einer Gleichung für die elastische Fläche einer rechteckigen Fundamentplatte, die eine in ihrer Mitte aufgebrachte Last auf den nachgiebigen Untergrund zu übertragen hat. Die Anwendung des Verfahrens von Ritz bietet in seiner jetzigen Form bei den Randwertaufgaben der Plattenbiegung Vorteile, wo mit einfachen Mitteln eine rasche Annäherung an die Funktionswerte gewünscht wird, oder bei der Bestimmung der Frequenzen schwingender und der kritischen Lasten knickender Platten. Zur Berechnung der spezifischen Spannungen müssen die Näherungsfunktionen, aus denen sich jene zusammensetzen, die zweiten und oft sogar die dritten Ableitungen der Funktion im Innern des Gebietes merklich annähern, wenn sie brauchbar sein sollen. Sie werden sich mit anderen Worten von den partikulären Lösungen der Differentialgleichung nicht wesentlich unterscheiden dürfen, so daß der Vorteil, der in ihrer Willkürlichkeit bestand, nicht zur Geltung kommen kann.

[5]) Auf die Notwendigkeit der Anbringung einer Einzelkraft in einer Ecke einer rechteckigen Platte, deren Seiten die Grenzbedingung $w = 0$, $\Delta w = 0$ (w Durchbiegung) erfüllen, sofern die Drillungsmomente auf dem Rand unterdrückt werden, haben H. Hencky (Ueber den Spannungszustand in rechteckigen Platten, München, 1913) und ich (Z. d. V. d. I. S. 487, 1914 und Mitt. üb. Forschungsarbeiten Heft 170, 171, 1915, woselbst die Möglichkeit des Ersatzes der Torsionsmomente durch die Eckkräfte durch meine Versuche aus den Jahren 1911 und 1912 belegt wird) hingewiesen. — Die Forderung, daß

1. Die Grundgleichungen. Die Behandlung der Aufgaben der Plattenbiegung kann an die Theorie der Integralgleichungen anknüpfen, deren Anwendungen auf physikalische Probleme in den Untersuchungen von A. Kneser[1]) über die Greenschen Funktionen des Potentials dargestellt sind. Kneser vereinigt den einen Bestandteil der aus den Eigenfunktionen gebildeten Doppelsumme und zeigt für die Greensche Funktion des Rechtecks die Uebereinstimmung der erhaltenen einfachen Summe mit der aus der Abbildungsfunktion folgenden Reihe. Diese wird durch den Logarithmus eines aus Thetafunktionen gebildeten Quotient ausgedrückt.

Die elastische Fläche der durch eine Einzelkraft verbogenen rechteckigen Platte ist ebenso durch die bilineare Entwicklung des Kernes einer Integralgleichung darstellbar, der die zu den nämlichen Grenzbedingungen gehörigen Eigenfunktionen — das sind hier die Formen, nach denen die Platte wegen ihrer Biegungssteifigkeit schwingen kann — zu genügen haben. So gehört beispielsweise zu den Biegungsschwingungen einer rechteckigen Platte

$$a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \qquad m, n = 1, 2, 3, \ldots \ldots \quad (1)$$

als Kern die in der Plattenstatik wohlbekannte Doppelreihe von Navier:

$$w_I = \frac{4Pa^3b^3}{\pi^4 N} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{(m^2a^2 + n^2b^2)^2} \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

durch welche die Durchbiegung w einer durch eine Einzelkraft P im Punkte x_0, y_0 belasteten rechteckigen Platte ab dargestellt werden kann, die dieselben Grenzbedingungen ($w = 0$, $\Delta w = 0$) wie die Eigenfunktionen (1) erfüllt. (N ist die Plattenziffer $= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, E Elastizitätsziffer, ν Verhältnis der Quer- zur Längsdehnung, h Dicke der Platte.)

Für die Spannungsermittlung ist der von Kneser am Beispiel des logarithmischen Potentials konsequent durchgeführte Ersatz von derartigen Reihen durch einfache Summen, die nach den Funktionen

$$\mathfrak{Sin}, \mathfrak{Cof}\, \varkappa y \sin, \cos \varkappa x \quad \text{und} \quad x, y\, \mathfrak{Sin}, \mathfrak{Cof}\, \varkappa y \sin, \cos \varkappa x \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

fortschreiten, von Wichtigkeit. Auf diesen Ersatz ist man bei der Behandlung von Plattenaufgaben auch von anderer Seite aufmerksam geworden. So konnte Estanave[2]) die Uebereinstimmung einer zweiten fundamentalen Lösung der Plattenstatik:

$$w_{II} = \frac{16pa^4b^4}{\pi^6 N} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn(m^2a^2 + n^2b^2)^2} \quad (m, n = 1, 3, 5 \ldots .) \ldots \ldots \quad (4)$$

Durchbiegung einer ähnlich wie w_I gelagerten rechteckigen Platte, die einem Druck $p =$ konst. ausgesetzt ist und gleichfalls bereits von Navier (1820) herrührt, mit der Summe von M. Lévy[3])

$$w_{II} = \frac{pa^4}{24N}\left[\frac{x^4}{a^4} - \frac{2x^3}{a^3} + \frac{x}{a} - \frac{192}{\pi^5} \sum_n \frac{\sin \frac{n\pi x}{a}}{n^5\left(1 + \mathfrak{Cof}\, \frac{n\pi b}{a}\right)} \left\{ {}^1/_2\, \mathfrak{Cof}\, \frac{n\pi y}{a} \right.\right.$$

$$\left.\left. + {}^1/_2\, \mathfrak{Cof}\, \frac{n\pi}{a}(b-y) + \frac{n\pi y}{a}\, \mathfrak{Sin}\, \frac{n\pi}{a}(b-y) + \frac{n\pi}{a}(b-y)\, \mathfrak{Sin}\, \frac{n\pi y}{a} \right\}\right] (n = 1, 3, 5 \ldots) \quad (5)$$

zeigen. Summen dieser Art eignen sich wegen ihrer stärkeren Konvergenz für die Berechnung der Spannungen besser, als die Doppelsummen. Die Möglichkeit des Ersatzes hat übrigens einen einfachen statischen Grund. Die Funktionen (3) sind partikulare Integrale von $\Delta\Delta w = 0$, ihnen entsprechen im Gegensatz zu den Eigenfunktionen (1) Span-

---

in einer freien Plattenecke vom Oeffnungswinkel 90^0 außer den beiden Randbedingungen von Kirchhoff noch die der verschwindenden Eckkraft zu erfüllen ist, hat übrigens W. Ritz in seiner oben angeführten Arbeit nicht unberücksichtigt gelassen. Sie drängte sich ihm in der Form $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$ auf Grund von Betrachtungen, die aus einem Variationsprinzip entsprangen, auf.

[1]) Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der mathematischen Physik. Braunschweig 1911. § 33 bis 35 kommen für das rechteckige Plattenproblem besonders in Betracht.

[2]) Contribution à l'étude de l'equilibre élastique d'une plaque rectangulaire mince. Paris 1900.

[3]) C. R. 129 S. 535. 1899.

nungszustände von Platten, die nur auf ihrem Rand (nicht in ihrem Innern) belastet sind. Derartigen Deformationszuständen nähern sich die durch einen veränderlichen Druck p verbogenen Platten, wenn die belasteten Gebiete in schmalen Streifen entlang des Randes angenommen und diese letzteren unter Grenzwerten der Last für die Längeneinheit des Streifens auf belastete Strecken zusammengezogen werden.

Es wird deshalb im folgenden nicht erforderlich sein, auf die bilinearen Summen zurückzugreifen, als nächsthöhere Konvergenzgebilde lassen sich die einfachen unmittelbar anschreiben.

Zur Berechnung der Spannungsmomente und Schubkräfte stehen zur Verfügung die Gleichungen

$$\text{Biegungsmomente: } m_x = -N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\quad m_y = -N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad (6),$$

$$\text{Drillungsmoment: } t = -(1-\nu) N \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (7),$$

$$\text{Schubkräfte: } p_x = -N \frac{\partial \Delta w}{\partial x},\quad p_y = -N \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \quad (8).$$

An den Rändern sind diese letzteren durch die Ersatzschubkräfte $\frac{\partial t}{\partial y}$ bezw. $\frac{\partial t}{\partial x}$ wie folgt zu ergänzen,

$$q_x = p_x + \frac{\partial t}{\partial y},\quad q_y = p_y + \frac{\partial t}{\partial x} \quad (9),$$

wobei in rechtwinkligen Ecken Einzelkräfte von der Größe

$$P = 2t \quad (10)$$

auftreten. Die Durchbiegung w hat der Gleichung

$$\Delta \Delta w = \frac{p}{N} \quad (11)$$

zu genügen, wo p den Druck und $N = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ die Plattenziffer bedeuten.

2. Singularitäten der Plattenbiegung. a) Die Einzelkraft im Innern der Platte:

$$w = \frac{P}{8\pi N} r^2 \ln \frac{r}{a} \quad (12);$$

hier und im folgenden sind $r^2 = x^2 + y^2$, φ der Polarwinkel, a eine beliebige Länge, P eine in der Richtung der positiven Durchbiegungen w wirkende Einzelkraft.

b) Das Einzelmoment im Innern der Platte:

$$w = -\frac{M}{4\pi N} y \ln \frac{r}{a} \quad (13),$$

das konzentrierte Moment M wirkt im Ursprung $x = y = 0$ und hat eine mit der positiven x Richtung zusammenfallende Achse.

c) Eine Einzelkraft in einer Ecke läßt sich durch die Ersatzschubkräfte erzeugen, wenn von den beiden Drillungsmomenten t_1 und t_2, die in den Schenkeln 1 und 2 des Winkels wirken, mindestens das eine von Null verschieden ist. Der durch die positive x- und y-Achse begrenzte Winkelraum, dessen beide Schenkel frei (ohne äußere Spannungen) sind, wird durch eine im Punkte $x = y = 0$ senkrecht zur Platte und in der Richtung der positiven Durchbiegungen wirkende Einzelkraft P nach der Fläche

$$w = \frac{P x y}{2(1-\nu) N} \quad (14)$$

eines hyperbolischen Paraboloids verbogen.

d) Das Einzelmoment in einer Ecke. Wenn das konzentrierte Moment M_1 in der Spitze eines Winkelraumes vom Oeffnungswinkel α angreift, auf dessen Schenkeln $\varphi = \pm \frac{\alpha}{2}$ keine äußeren Spannungen wirken und seine Achse mit der inneren Winkelhalbierenden zusammenfällt, ist die Durchbiegung

$$w_1 = -\frac{M_1}{(1-\nu) N (1-\nu) \sin \alpha + (3+\nu) \alpha} \left[2y \ln \frac{r}{a} + (1+\nu) x \varphi \right] \quad (15),$$

und wenn die Achse des konzentrierten Momentes M_2 senkrecht zur Winkelhalbierenden steht und mit der positiven y-Achse zusammenfällt:

$$w_2 = -\frac{M_2}{(1-\nu)N(1-\nu)\sin\alpha-(3+\nu)\alpha}\left(2x\ln\frac{r}{a}-(1+\nu)y\varphi\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Die Superposition von w_1 und w_2 ergibt die Biegung einer Ecke durch ein in der Spitze des Winkels angreifendes Moment M von beliebiger Richtung, dessen Komponenten M_1 und M_2 sind [1]).

e) Wenn $\alpha = \pi$, der Winkel ein gestreckter ist, ergeben sich die Deformationen

$$w_1 = -\frac{M_1}{(1-\nu)(3+\nu)\pi N}\left(2y\ln\frac{r}{a}+(1+\nu)x\varphi\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

bezw.

$$w_2 = \frac{M_2}{(1-\nu)(3+\nu)\pi N}\left(2x\ln\frac{r}{a}-(1-\nu)y\varphi\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18),$$

die in der Umgebung von geraden Plattenkanten durch ein konzentriertes Drillungsmoment (M_1) bezw. durch ein konzentriertes Biegungsmoment (M_2) hervorgerufen werden.

f) Schließlich gibt

$$w = \frac{Pr^1}{2(3+\nu)\pi N}\left\{\ln\frac{r}{a}+\frac{1+\nu}{1-\nu}\left[\varphi\sin 2\varphi-\cos 2\varphi\ln\frac{r}{a}\right]+\frac{1}{1+\nu}\right\} \quad . \quad . \quad (19)$$

die Durchbiegung an, die eine in einem Punkte einer freien Begrenzungsgeraden (dem Punkte $x = y = 0$ der y-Achse) angreifende Einzelkraft P in der Platte (auf der Seite $x > 0$) erzeugt.

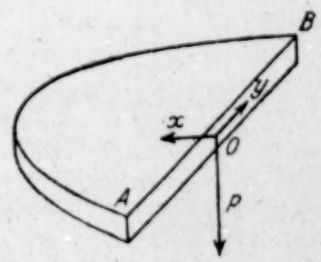


Abb. 1

Bei den Deformationszuständen d bis f bleiben die ursprünglich geraden Begrenzungskanten der Platte mit Ausnahme der Angriffstelle $x = y = 0$ und der »Ecken« A und B (Abb. 1) frei von Singularitäten und von äußeren Spannungen. Die zugehörigen Spannungsmomente ergeben sich aus den vorstehenden Formeln nach Ausführung der in den Gl. 6 bis 9 vorgeschriebenen Differentiationen.

3. Durchlaufende Platten. Unter den mehrfach gestützten Platten zeichnet sich die Gruppe von Belastungszuständen, deren Formänderungen und deren Spannungen doppelt periodische Funktionen der Koordinaten x und y sind, durch ihre hervorragenden Symmetrieeigenschaften aus. Wir greifen unter diesen den Fall der Biegung einer durch einen gleichmäßig verteilten Druck p = konst belasteten unendlich ausgedehnten Platte heraus, die in einem rechteckigen Gitter von Punkten gestützt ist [2]). Eine Reihe von Fällen der durch Einzelkräfte belasteten rechteckigen Platten lassen sich auf ihn zurückführen.

Mit diesem Biegungsfall einer unendlich ausgedehnten Platte hat sich bereits F. Grashof [3]) anläßlich der Ermittlung der Beanspruchung der Feuerbüchse der Lokomotive eingehend beschäftigt, in deren durch Ankerbolzen aneinander abgestützten und dem Dampfdruck ausgesetzten ebenen Wandungen er ebenfalls vorliegt. Die von ihm

---

[1]) Wenn die Vektoren M_1, M_2 und M Einzelkräfte bedeuten, stellen Lösungen dieser Art mit veränderten Beiwerten bekanntlich die Airyschen Spannungsfunktionen der zugehörigen ebenen Spannungszustände dar, die J. H. Michell (London Math. Soc. Proc. Bd. 32, S. 35, 1900) angegeben hat.

[2]) Dieser Biegungsfall einer unbegrenzten elastischen Platte hat eine unmittelbare praktische Bedeutung in den aus Eisen und Beton hergestellten trägerlosen Decken erlangt, deren Konstruktion aus dem Wunsch hervorging, die von mehreren Reihen von Säulen unterstützten kontinuierlichen Decken ohne Unterzüge ausbilden zu können. Diese wohl erstmals in den hohen Stockwerkbauten der Vereinigten Staaten von Amerika ausgeführten Decken werden aus Beton mit regelmäßig angeordneten Systemen von parallel oder auch ring- und strahlenförmig um die Säulen verlegten Eiseneinlagen hergestellt und bilden ein Konstruktionselement, das neuerdings auch als Fundamentplatte von Hochbehältern und als Fahrbahn von leichten Straßenbrücken Verwendung gefunden hat. Für die Beurteilung der zweckmäßigsten Art der Verteilung und der Bemessung der Einlagen dürfte die Beschreibung des Spannungszustandes einer derart gestützten Platte, die aus einem homogenen und elastischen Material besteht, von Wert sein.

[3]) Theorie der Elastizität und Festigkeit, 2. A. S. 358 1878.

angegebene Lösung genügt zwar der Plattengleichung (11) und den Symmetriebedingungen eines rechteckigen Feldes, dessen Ecken durch vier benachbarte Stützpunkte gebildet werden, sie ergibt aber gleichmäßig verteilte Schubkräfte in den Verbindungsgeraden und nicht die Punktbelastung in dessen Ecken. Die Grashofsche Lösung mag die Gestalt der verbogenen Platte angenähert wiedergeben, wegen der nicht berücksichtigten und auch nicht angenähert erfüllten Grenzbedingungen, die sich auf die Schubkräfte beziehen, liefert sie nicht die richtigen Werte für die spezifischen Spannungen. Diese letzteren ergeben sich überall endlich, während sie im Falle der Punktstützung in der Umgebung der Stützpunkte unbegrenzt anwachsen müssten [1]).

Auf diesen Umstand hat Lewe [2]) unlängst hingewiesen; er gibt für die Lösung eine Doppelsumme an, aus der er auch den Verlauf ansteigender Spannungsmomente gegen die Stützpunkte findet. Für die Gleichung der elastischen Fläche der kontinuierlichen Platte läßt sich indessen die Summe

$$w = \frac{p b^4}{384 N}\left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{p a^3 b}{2\pi^3 N}\sum_n \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \cos\frac{n\pi x}{a}}{n^3 \operatorname{Sin}^2\frac{n\pi b}{2a}}\left\{-\operatorname{Sin}\frac{n\pi b}{2a}\operatorname{Cof}\frac{n\pi y}{a}\right.$$

$$\left. + \frac{n\pi y}{a}\operatorname{Sin}\frac{n\pi y}{a}\operatorname{Sin}\frac{n\pi b}{2a} - \frac{n\pi b}{2a}\operatorname{Cof}\frac{n\pi b}{2a}\operatorname{Cof}\frac{n\pi y}{a}\right\} \quad (n = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots.). \quad (20)$$

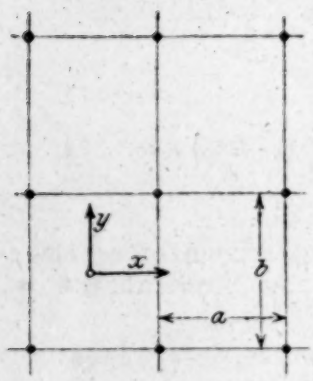


Abb. 2

anschreiben, die aus der Betrachtung des Gleichgewichtes eines Streifens von Feldern hervorgeht, der durch zwei Schnitte in der unmittelbaren Nähe von zwei benachbarten Säulenreihen derart abgegrenzt ist, daß sich innerhalb desselben keine Angriffstellen der konzentrierten Stützkräfte befinden. Sie erfüllt die Grenzbedingungen

$$y = \pm\frac{b}{2},\ \frac{\partial w}{\partial y} = 0,\ p_y = -N\frac{\partial \Delta w}{\partial y} = \pm f(x),$$

wo $f(x)$ einen mit den Symmetriebedingungen und dem Gleichgewicht der (zur Platte senkrechten) Kräfte verträglichen, im übrigen aber willkürlichen Verlauf der Schubkräfte p_y festlegt und eine Funktion ist, von der nur verlangt wird, daß sie in der Gegend der Stützpunkte $x = \pm\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}, \ldots, y = \pm\frac{b}{2}$ des Streifens von Feldern ab große (endliche) Werte annimmt. Die unbegrenzte Verstärkung der Kraftkonzentration liefert dann die Gl. (20).

Die Durchbiegung ist in der Feldmitte

$$x = y = 0,\quad w_1 = \frac{p b^4}{N}\left\{\frac{1}{384} - \frac{1}{2\pi^3}\frac{a^3}{b^3}\sum(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{\operatorname{Sin}\varepsilon + \varepsilon\operatorname{Cof}\varepsilon}{n^3\operatorname{Sin}^2\varepsilon}\right\}$$

und an den Stellen

$$x = \frac{a}{2},\quad y = 0,\quad w_2 = \frac{p b^4}{N}\left\{\frac{1}{384} - \frac{1}{2\pi^3}\frac{a^3}{b^3}\sum\frac{\operatorname{Sin}\varepsilon + \varepsilon\operatorname{Cof}\varepsilon}{n^3\operatorname{Sin}^2\varepsilon}\right\}$$

$$x = 0,\ y = \frac{b}{2},\ w_3 = \frac{p a^3 b}{2\pi^3 N}\sum(-1)^{\frac{n-2}{2}}\frac{\varepsilon + \operatorname{Sin}\varepsilon\operatorname{Cof}\varepsilon}{n^3\operatorname{Sin}^2\varepsilon} \qquad \left(\varepsilon = \frac{n\pi b}{2a},\ n = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots\right).$$

---

[1]) Ebensowenig vermochte H. T. Eddy Aufschluß über die starke Zunahme der Spannungen in der Gegend der Stützpunkte zu geben. Einen weit befriedigenderen Anschluß konnten Turneaure und Maurer durch ihre Näherungsansätze erzielen. So erweist sich die Annahme dieser letzteren, das Gebiet rings um die Auflagerstellen als eine kreisförmige »Kragplatte« aufzufassen, deren Halbmesser sie auf ein Fünftel des Säulenabstandes eingeschätzt haben, bei der quadratischen Feldteilung als recht zutreffend. E. Probst, dessen Buch (Vorl. ü. Eisenbeton, Springer, Berlin, I. Bd., S. 533, 1917) ich die Einzelheiten über die Rechnungsverfahren von Eddy, Turneaure und Maurer entnehme, hebt bei der Besprechung der Versuche hervor, die A. R. Lord an einer durchlaufenden Decke an einem fertigen Bauwerk in Chicago ausgeführt hat, daß der gefährliche Querschnitt bei richtig angeordneten Eiseneinlagen an den Säulenköpfen liegt. Eine große Zahl der bei der Beanspruchung im Beton entstandenen Risse folgte dem Umriß der Säulenköpfe. Die plötzliche Umleitung der wagerechten Biegungsspannungen der Platte in die lotrechten Druckspannungen der Säulen gibt zu einer weiteren, beträchtlichen Spannungserhöhung an den Uebergangstellen Anlaß, über die die Plattenberechnung nicht mehr Auskunft geben kann.

[2]) Die Lösung des Pilzdeckenproblems durch Fouriersche Reihen«; Bauingenieur, 1. Jahrg., S. 631, 1920.

Bei der quadratischen Feldteilung $a = b$ sind, sofern das Verhältnis der Querzusammenziehung zur Längsdehnung $\nu = \frac{1}{4}$ und die Plattenziffer $N = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{4Eh^3}{45}$ genommen wird,

$$w_1 = 0{,}0373\,\frac{pa^4}{Eh^3}, \quad w_2 = w_3 = 0{,}0210\,\frac{pa^4}{Eh^3}.$$

4. Der Spannungszustand der durchlaufenden Platte setzt sich aus 3 Anteilen zusammen:

$$m_x = m_x' + m_x'' + m_x''', \qquad m_y = m_y' + m_y'' + m_y''', \qquad t = t' + t'' + t''' \quad (21)$$

$$m_x' = \nu m_y' = \frac{pb^2}{24}\left(1 - \frac{12y^2}{b^2}\right), \quad t' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

$$m_x'' = m_y'' = -\frac{(1+\nu)pab}{2\pi}\,\Sigma\,\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi x}{a}\,\mathfrak{Cof}\frac{n\pi y}{a}}{n\,\mathfrak{Sin}\frac{n\pi b}{2a}}, \quad t'' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

$$m_x''' = -m_y''' = \frac{(1-\nu)pab}{2\pi}\,\frac{\pi}{a}\,\Sigma\,\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi x}{a}}{\mathfrak{Sin}^2\frac{n\pi b}{2a}}\left\{y\,\mathfrak{Sin}\frac{n\pi y}{a}\,\mathfrak{Sin}\frac{n\pi b}{2a} - \frac{b}{2}\,\mathfrak{Cof}\frac{n\pi b}{2a}\,\mathfrak{Cof}\frac{n\pi y}{a}\right\} \quad (24).$$

$$t''' = \frac{(1-\nu)pab}{2\pi}\,\frac{\pi}{a}\,\Sigma\,\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi x}{a}}{\mathfrak{Sin}^2\frac{n\pi b}{2a}}\left\{y\,\mathfrak{Cof}\frac{n\pi y}{a}\,\mathfrak{Sin}\frac{n\pi b}{2a} - \frac{b}{2}\,\mathfrak{Cof}\frac{n\pi b}{2a}\,\mathfrak{Sin}\frac{n\pi y}{a}\right\}$$

Der erste Teil m_x', m_y', t' ist mit den elementaren Biegungsformeln eines eingespannten, gleichmäßig belasteten Stabes, dessen Länge b gleich der Streifenbreite ist, identisch.

Die Spannungsmomente des zweiten Teiles nehmen zu, wenn der Bezugspunkt x, y sich den Stützstellen nähert. Die Reihe (23)

$$\Sigma\,\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi x}{a}\,\mathfrak{Cof}\frac{n\pi y}{a}}{n\,\mathfrak{Sin}\frac{n\pi b}{2a}}, \quad (n = 2, 4, 6, \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

ist der reelle Teil der Reihe der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$

$$\Sigma\,\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi z}{a}}{n\,\mathfrak{Sin}\frac{n\pi b}{2a}},$$

d. i., wenn $n = 2m$ und $q = e^{-\frac{\pi b}{a}}$ gesetzt werden, von

$$\Sigma\,\frac{(-1)^m q^m \cos\frac{2m\pi z}{a}}{m(1-q^{2m})} = -\frac{1}{2}\ln\frac{\vartheta_3\left(\frac{z}{a}\right)}{c} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

vom Logarithmus der Jacobischen Thetafunktion

$$\vartheta_3\left(\frac{z}{a}\right) = 1 + 2q\cos\frac{2\pi z}{a} + 2q^4\cos\frac{4\pi z}{a} + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26),$$

wobei der Festwert c durch das unendliche Produkt

$$c = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6) \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

gegeben ist. Die Reihe (25) versagt in der Umgebung der Stützpunkte. Brauchbare Ausdrücke zur Berechnung der m_x'', m_y'' ergeben sich aber sofort, wenn $\vartheta_3(v)$ vermöge

$$\vartheta_3\left(v + \frac{\tau}{2}\right) = e^{-i\pi\left(v+\frac{\tau}{4}\right)}\,\vartheta_3(v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

durch $\vartheta_2(v)$ ausgedrückt wird. Es folgt

$$\ln\vartheta_3\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=-\pi i\left(v+\frac{\tau}{4}\right)+\ln\vartheta_2(v) \quad \ldots\ldots\ldots (29),$$

wo für $\ln\vartheta_2(v)$ die Reihe

$$\ln\vartheta_2(v)=\ln c+\ln 2q^{1/4}\cos\pi v-2\sum\frac{(-1)^m q^{2m}\cos 2m\pi v}{m(1-q^{2m})} \quad \ldots (30)$$

eingeführt werden kann. Der Modul τ der Thetafunktionen ist $\tau=\frac{ib}{a}$. Setzt man schließlich

$$v+\frac{\tau}{2}=v+\frac{ib}{2a}=\frac{z}{a}=\frac{x+iy}{a},$$

so ergibt der reelle Teil der Funktion $\ln\frac{\vartheta_3\left(\frac{z}{a}\right)}{c}$ [in (29) unter Benutzung von (30)] die in der Hälfte $0<y<\frac{b}{2}$ des Streifens von Feldern zur Berechnung der Spannungsmomente m_x'' und m_y'' brauchbare Form

$$m_x''=m_y''=\frac{(1+\nu)p\cdot b}{4\pi}\left\{\frac{1}{2}\ln 2\left[\cos\frac{2\pi x}{a}+\mathfrak{Cof}\frac{\pi(b-2y)}{a}\right]-\frac{\pi}{a}\left(\frac{b}{2}-y\right)\right.$$

$$\left.-4\sum\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}q^n}{n(1-q^n)}\cos\frac{n\pi x}{a}\mathfrak{Cof}\frac{n\pi}{a}\left(\frac{b}{2}-y\right)\right\} \quad (31).$$

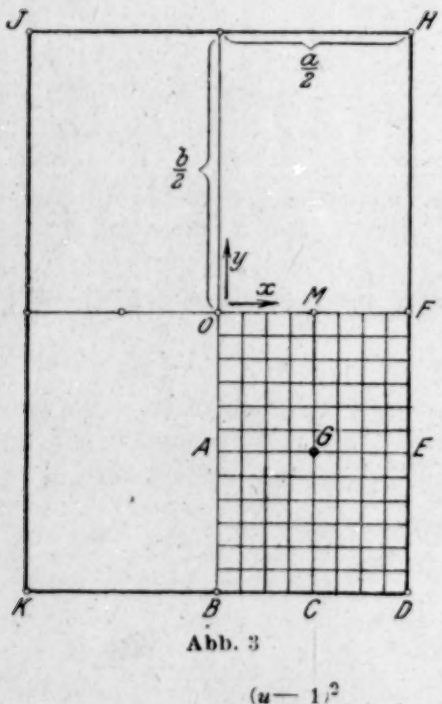


Abb. 3

Einen weiteren Behelf zur Berechnung von

$$\mathfrak{Re}\ln\left(\frac{\vartheta_3\left(\frac{z}{a}\right)}{c}\right)$$

bieten die winkeltreuen Abbildungen 3 bis 7. Abb. 3 soll eines der unendlich vielen rechteckigen Felder ab der kontinuierlichen Platte darstellen. Die zugehörigen Stützpunkte, durch welche die gleichmäßige Feldbelastung aufgenommen wird, seien die Ecken D, H, J, K. Es genügt, wegen der Symmetrie die Werte der eben angeschriebenen Funktion in einem Viertelfeld zu bestimmen.

Im mittleren Teil des Feldes $\left(\text{etwa } -\frac{b}{4}<y<\frac{b}{4}\right)$ ist nach Gl. (26) bereits hinreichend genau

$$\vartheta_3\left(\frac{z}{a}\right)=u+iv=1+2q\cos\frac{2\pi(x+iy)}{a} \quad (32).$$

Hierdurch wird das in Abb. 3 gezeichnete Quadratnetz der x, y-Ebene in das System konfokaler Ellipsen und Hyperbeln:

$$\frac{(u-1)^2}{4q^2\mathfrak{Cof}^2\frac{2\pi y}{a}}+\frac{v^2}{4q^2\mathfrak{Sin}^2\frac{2\pi y}{a}}=1,\quad \frac{(u-1)^2}{4q^2\cos^2\frac{2\pi x}{a}}-\frac{v^2}{4q^2\sin^2\frac{2\pi x}{a}}=1 \quad . \quad (33),$$

der u, v-Ebene abgebildet, das in Abb. 4 mit dicken Linien um 0 und F als Brennpunkten (mit $4q$ als Brennpunktsabstand) gezeichnet ist. Der gesuchte Funktionswert ist der reelle Teil u' von

$$u'+iv'=\ln\vartheta_3\left(\frac{z}{a}\right)-\ln c,$$

d. i. die Abszisse u' des Bildpunktes u', v' von x, y in der zugehörigen winkeltreuen Abbildung 5 der Kurvenscharen (33) auf die $u'v'$-Ebene.

Im Gebiet $\frac{b}{4}<y<\frac{b}{2}$ wird ϑ_3, wie oben durch ϑ_2 ausgedrückt. Die Abbildungsfunktion (29)

$$\ln\vartheta_3\left(\frac{z}{a}\right)=-\frac{i\pi x}{a}+\frac{\pi}{a}\left(y-\frac{b}{4}\right)+\ln\vartheta_2\left(\frac{z}{a}-\frac{ib}{2a}\right)$$

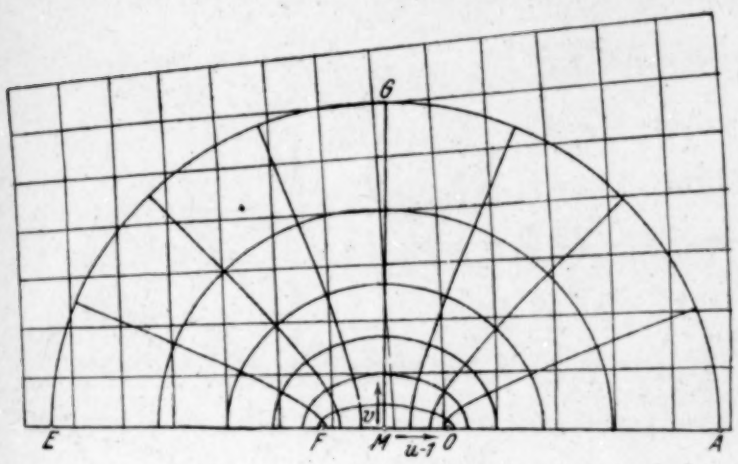


Abb. 4

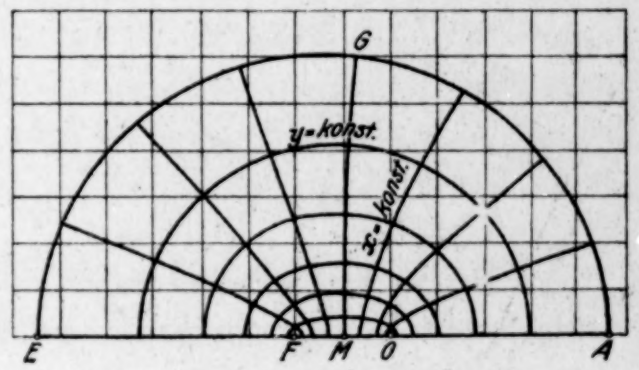


Abb. 5

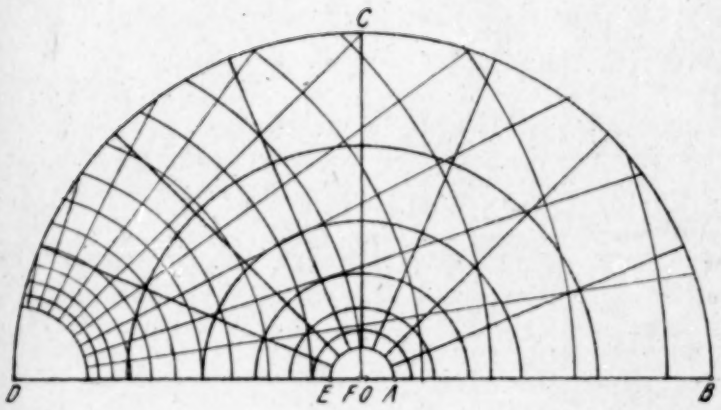


Abb. 6

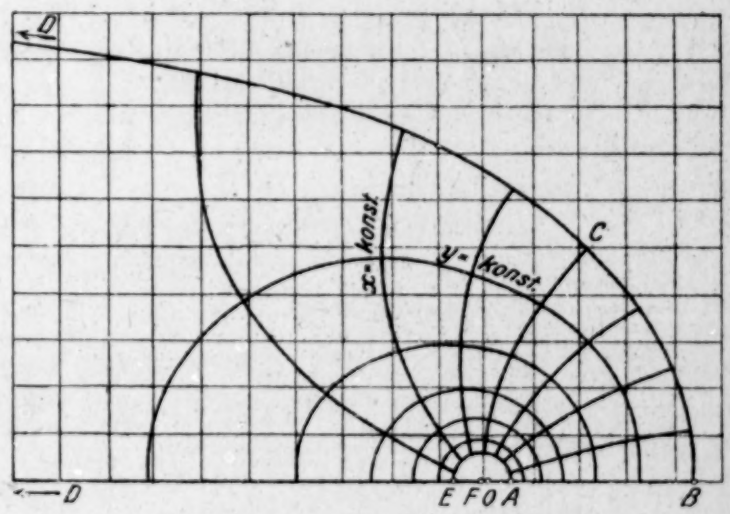


Abb. 7

vermittelt hier die Abb. 6 und 7. Auch hier braucht nur das erste Glied der Reihe für ϑ_2

$$\vartheta_2\left(\frac{z}{a}-\frac{ib}{2a}\right)=u+iv=2q^{1/4}\cos\frac{\pi}{a}\left(z-\frac{ib}{a}\right)$$

berücksichtigt zu werden. Das Quadratnetz des Gebietsteiles $ABDE$ der Abb. 3 überträgt sich jetzt auf das System konfokaler Ellipsen und Hyperbeln, Abb. 6, das durch den Logarithmus (bis auf Translationen) in die gewünschten Maßverhältnisse der Abb. 7 winkeltreu transformiert wird. Die stark ausgezogenen Kurvenscharen der Abb. 4 bezw. 6 werden mittels des dünn eingezeichneten Rasters in das Quadratnetz von den Abb. 5 bezw. 7 übertragen. Die Werte der für den Spannungsverlauf der Platte maßgebenden Funktion $\Re\ln\vartheta_3\left(\frac{z}{a}\right)$ im Punkte x, y des Feldes Abb. 3 sind proportional den Abszissen des Bildpunktes in den Abb. 5 bezw. 7.

Der dritte Teil des Spannungszustandes wird unmittelbar aus den Reihen (24) berechnet. Auch dieser Teil läßt sich übrigens durch Thetafunktionen ausdrücken:

$$m_x''' = -m_y''' = \frac{(1-\nu)pab}{4\pi}\left\{y\,\Im\mathrm{m}\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{b}{a}\,\Im\mathrm{m}\frac{\partial f}{\partial\tau}\right\},$$
$$l''' = \frac{(1-\nu)pab}{4\pi}\left\{y\,\Re\mathrm{e}\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{b}{a}\,\Re\mathrm{e}\frac{\partial f}{\partial\tau}\right\},$$

wo zur Abkürzung f für $\ln\vartheta_3\left(\frac{z}{a}\right)-\ln c$ steht.

Die Spannungsmomente sind auf der Geraden $y = \frac{b}{2}$

$$m_x' = \nu m_y' = -\frac{\nu p b^2}{12}$$

$$\left.\begin{aligned} m_x'' = m_y'' &= \frac{(1+\nu) p a b}{4\pi}\left\{\ln 2 \cos\frac{\pi x}{a} - 4\,\Sigma\,\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} q^n \cos\frac{n\pi x}{a}}{n(1-q^n)}\right\} \\ m_x''' = -m_y''' &= -\frac{(1-\nu) p b^2}{4}\,\Sigma\,\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi x}{a}}{\operatorname{Sin}^2\frac{n\pi b}{2a}}, \quad q = e^{-\frac{\pi b}{a}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (34)$$

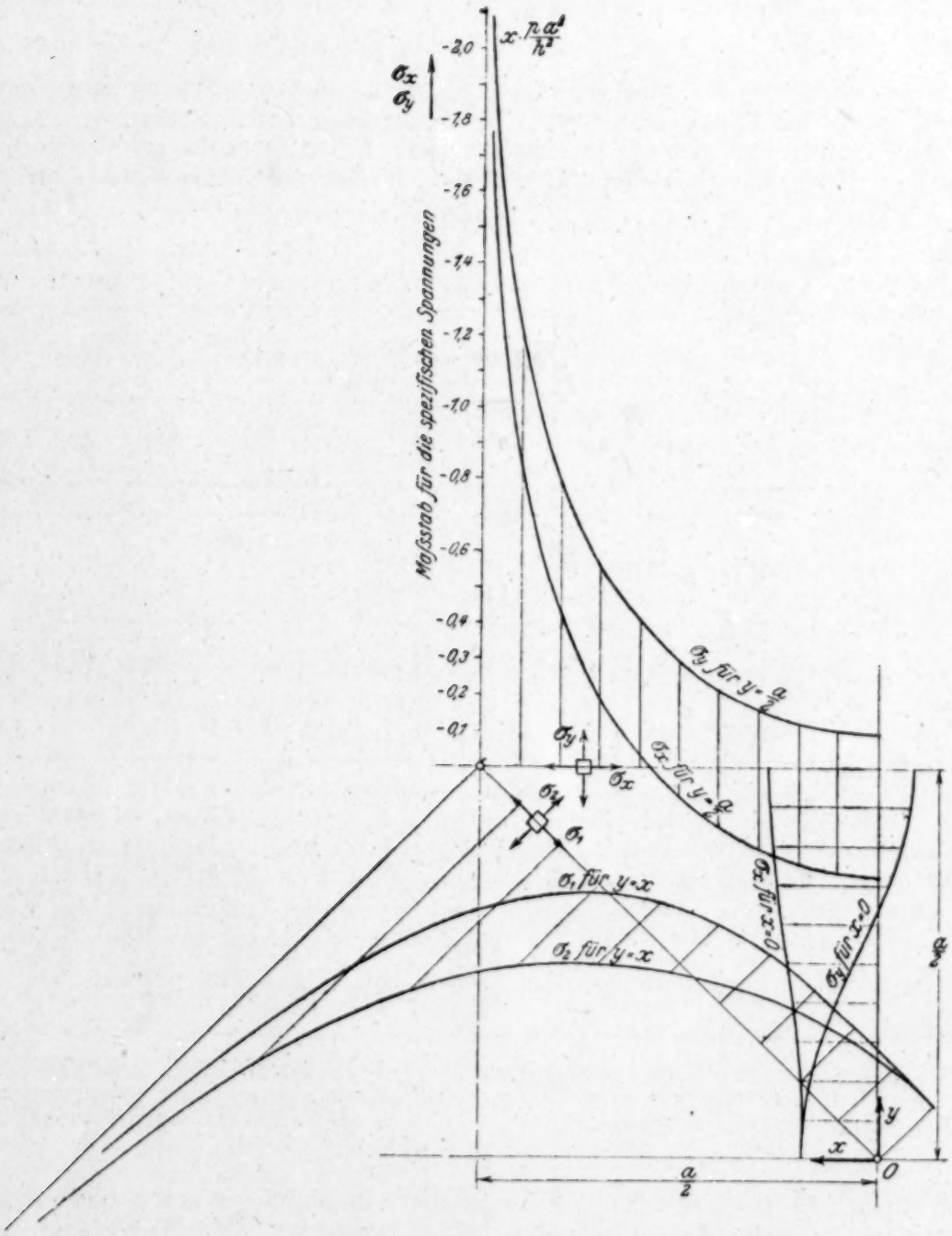


Abb. 8

Die Spannungen einer gleichmäßig belasteten durchlaufenden Platte. Quadratisches Gitter von Stützpunkten.

und auf der Geraden $x = \frac{a}{2}$

$$m_x' = \nu m_y' = \frac{\nu p b^2}{24}\left(1 - \frac{12\,y^2}{b^2}\right)$$

$$m_x'' = m_y'' = \frac{(1+\nu)pab}{4\pi}\left\{\ln 2\,\mathfrak{Sin}\frac{\pi}{a}\left(\frac{b}{2}-y\right) - \frac{\pi}{a}\left(\frac{b}{2}-y\right) - 4\,\Sigma\frac{q^n}{n(1-q^n)}\,\mathfrak{Cof}\frac{n\pi}{a}\left(\frac{b}{2}-y\right)\right\}$$

$$m_x''' = -\,m_y''' = \frac{(1-\nu)pb}{2}\,\Sigma\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\frac{n\pi b}{2a}}\left\{y\,\mathfrak{Sin}\frac{n\pi y}{a}\,\mathfrak{Sin}\frac{n\pi b}{2a} - \frac{b}{2}\,\mathfrak{Cof}\frac{n\pi b}{2a}\,\mathfrak{Cof}\frac{n\pi y}{a}\right\} \qquad (35).$$

Die Formeln (35) eignen sich besonders zur Berechnung der Spannungen, wenn $0 < y < \frac{b}{2}$. Die Spannungsmomente m_x'', m_y'' der Gl. (34) und (35) enthalten den logarithmisch unendlich werdenden Bestandteil, der von den konzentrierten Stützkräften herrührt. Der Verlauf der Hauptspannungsmomente ist für das quadratische Gitter von Stützpunkten für $y = 0$ und $y = \frac{a}{2}$ und ferner in den Diagonalen des Gitters aus der nebenstehenden Zahlentafel 1 und aus der Abb. 8 zu ersehen. Zur Angabe der Hauptmomente m_1, m_2 in den Diagonalen bedarf es keiner besonderen Rechnung, sie ergeben sich aus den vorigen auf Grund der Bemerkung, daß die resultierende Belastung der durchlaufenden Platte aus zwei ineinander gestellten Gitterpunktsbelastungen vom Abstand $\sqrt{2}a$ und vom Druck $p:2$ erzeugt gedacht werden kann.

Zahlentafel 1. Verlauf der Spannungsmomente im quadratischen Gitter.

	$\frac{x}{a}$	0,0000	0,0833	0,1667	0,2500	0,3333	0,4167	0,4445	0,4722	0,4889	0,5000	Faktor
	$\frac{\pi x}{a}$ in Grad	0	15	30	45	60	75	80	85	88	90	
$y = 0$	m_x'	1042	1042	1042	1042	1042	1042	—	—	—	1042	$10^{-5}pa^2$
	m_x''	825	720	419	0	− 440	− 774	—	—	—	− 899	»
	m_x'''	1562	1375	847	70	− 777	−1445	—	—	—	−1702	»
	$m_x = m_x' + m_x'' + m_x'''$	3429	3137	2308	1112	− 175	−1177	—	—	—	−1559	»
	m_y'	4167	4167	4167	4167	4167	4167	—	—	—	4167	»
	m_y''	825	720	419	0	− 440	− 774	—	—	—	− 899	»
	m_y'''	−1562	−1375	− 847	− 70	777	1445	—	—	—	1702	»
	$m_y = m_y' + m_y'' + m_y'''$	3430	3512	3739	4097	4504	4838	—	—	—	4970	»
$y = \frac{a}{2}$	m_x'	− 208	− 208	− 208	− 208	− 208	− 208	− 208	− 208	− 208	− 208	$10^{-4}pa^2$
	m_x''	692	656	547	343	− 4	− 661	−1059	−1746	−2658	− ∞	»
	m_x'''	14	12	7	0	− 7	− 12	− 13	− 14	− 14	− 14	»
	$m_x = m_x' + m_x'' + m_x'''$	498	460	346	135	− 219	− 881	−1280	−1968	−2880	− ∞	»
	m_y'	− 833	− 833	− 833	− 833	− 833	− 833	− 833	− 833	− 833	− 833	»
	m_y''	692	656	547	343	4	661	1059	1746	2658	− ∞	»
	m_y'''	− 14	− 12	− 7	0	7	12	13	14	14	14	»
	$m_y = m_y' + m_y'' + m_y'''$	− 155	− 189	− 293	− 490	− 830	−1482	−1877	−2565	−3477	− ∞	»
$y = x$	$m_1 =$	343	343	328	246	12	− 567	− 946	−1627	−2437	− ∞	»
	$m_2 =$	343	295	157	− 80	− 456	−1131	− 1531	−2221	−3134	− ∞	»

Die Ausdrücke (31) und (24) dienen schließlich zur Feststellung des Verlaufes der Spannungen in der Nähe der Stützpunkte. Die Entwicklung der Funktionen nach den kleinen Größen

$$\xi = \frac{a}{2} - x, \quad \eta = \frac{b}{2} - y$$

und nach dem kleinen Abstand

$$\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

des Bezugspunktes x, y vom Säulenmittel $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$ führt hier auf die Formeln

$$m_x = \frac{p\,a\,b}{4\,\pi}\left\{(1+\nu)\ln\frac{2\,\pi\,c^2\,\varrho}{a} - (1-\nu)\frac{\eta^2}{\varrho^2}\right\} + m_1$$

$$m_y = \frac{p\,a\,b}{4\,\pi}\left\{(1+\nu)\ln\frac{2\,\pi\,c^2\,\varrho}{a} - (1-\nu)\frac{\xi^2}{\varrho^2}\right\} + m_2$$

$$t = \frac{p\,a\,b}{4\,\pi}(1-\nu)\frac{\xi\,\eta}{\varrho^2}$$

sofern zur Abkürzung

$$m_1 = -\frac{p\,b^2}{4}\left\{(1-\nu)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\frac{k\,\pi\,b}{a}} + \frac{\nu}{3}\right\} \quad (k = 1, 2, 3\ldots)$$

$$m_2 = \frac{p\,b^2}{4}\left\{(1-\nu)\left(\frac{a}{\pi\,b} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\frac{k\,\pi\,b}{a}}\right) - \frac{1}{3}\right\}$$

gesetzt sind. Das sind, abgesehen von den (von den Koordinaten ξ, η unabhängigen) gleichmäßigen Biegungsmomenten m_1 und m_2 die Spannungsmomente einer frei aufliegenden Kreisplatte, die einen Halbmesser a_0

$$a_0 = \frac{a}{2\,\pi\,c^2} = \frac{a}{2\,\pi\,(1-q^2)^2\,(1-q^4)^2\,(1-q^6)^2\ldots}, \qquad \left(q = e^{-\frac{\pi\,b}{a}}\right)$$

hat und eine Einzellast

$$P = -p\,a\,b$$

gleich der Feldbelastung in ihrer Mitte trägt. Für die größte Inanspruchnahme eines Feldes maßgebend ist die Stärke der Konzentration der Stützkraft P oder anders ausgedrückt, das Verhältnis einer linearen Abmessung der Fläche, in der sich P auf die Platte überträgt, zu einer Abmessung der Platte, beispielsweise zur Stützweite eines Feldes. Unter der Annahme, daß die Druckfläche ein Kreis vom Halbmesser e ist, der nicht zu klein im Verhältnis zur Plattendicke h sein darf [1]), und den sich die Last P als ein gleichmäßiger Druck verteilt, sind die Spannungsmomente im Mittelpunkt $\xi = \eta = 0$ des Druckkreises

$$m_x = -\frac{p\,a\,b}{4\,\pi}\left\{(1+\nu)\ln\frac{a_0}{e} + 1\right\} + m_1$$

$$m_y = -\frac{p\,a\,b}{4\,\pi}\left\{(1+\nu)\ln\frac{a_0}{e} + 1\right\} + m_2.$$

Die größte Inanspruchnahme ist an diesen Stellen

$$\sigma_{\max} = \pm\frac{6\,m_x}{h^2},\ \frac{6\,m_y}{h^2}.$$

Es läßt sich um jeden Stützpunkt eine geschlossene Kurve angeben, auf der das um die Tangentenrichtung als Achse drehende Biegungsmoment verschwindet. Sie schneidet die Diagonalen eines quadratischen Feldes in einem Abstand $0{,}228\,a$ und die Seiten in einem Abstand $0{,}211\,a$ vom Säulenmittel; sie unterscheidet sich demnach nur wenig von einem Kreis vom Halbmesser $0{,}22\,a$. Das Gebiet innerhalb dieses Kreises wird angenähert wie eine durch einen gleichförmigen Druck p und außerdem durch eine Einzelkraft $P = -p\,a^2$ in ihrem Mittelpunkt belastete und auf ihrem Umfang frei aufliegende Kreisplatte beansprucht [2]).

5. Weitere Fälle von durchlaufenden Platten mit Punktbelastung in rechteckigen Gittern. Die gleichmäßig verteilte Druckbelastung p des in den Nummern 3 und 4 beschriebenen Spannungszustandes wird aufgehoben, wenn zu diesem ein zweiter von derselben Art mit versetzten Stützpunktreihen hinzugefügt wird, bei dem jedoch der

[1]) Ueber die Biegungsbeanspruchung von Platten durch Einzelkräfte und über die Verteilung der Spannungen in der Umgebung und in der Druckfläche einer stark konzentrierten Kraft vergl. A. und L. Föppl, »Drang und Zwang«, 1. Bd. S. 197 und 3. Bd. S. 102. Ferner Schweizerische Bauzeitung, Bd. 76 S. 257. 1920.

[2]) S Anmerkung S. 6.

Druck p in entgegengesetzter Richtung wirkt. Es seien P die Stützkraft, a und b die Teilungen in dem rechteckigen Gitter, das von den Stützpunkten gebildet wird. Dann entstehen

a) durch zwei kongruente, ineinander gestellte Gitter $+P, a, b$ und $-P, a, b$, die um den Betrag $2x_0$ nach Abb. 9 gegeneinander verschoben sind, frei aufliegende Plattenstreifen von der Breite $\frac{a}{2}$, die durch eine Reihe von Einzelkräften im Abstand x_0 von der einen Seite und b voneinander belastet sind;

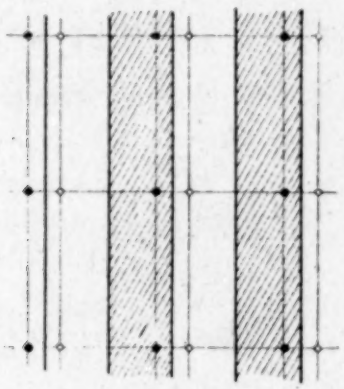


Abb. 9

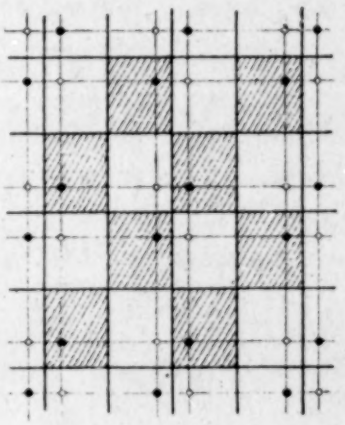


Abb. 10

b) durch vier nach Abb. 10 ineinander geschachtelte Gitter $\pm P, a^*, b^*$ rechteckige Platten von den Seitenlängen $\frac{a^*}{2}$ und $\frac{b^*}{2}$, die in einem beliebigen Punkt eine Einzelkraft tragen. Ihre Seiten sind gerade (unverbogen) und in ihnen wirken keine Einspannungsmomente. Wir erhalten den Biegungsfall w_I von Navier $\left(\text{Abb. 2 mit } a=\frac{a^*}{2}, b=\frac{b^*}{2}\right)$. Der Zusammenhang mit dem unter 3. und 4. erörterten Biegungsfall einer kontinuierlichen Platte läßt erkennen, daß zur Angabe der Spannungen in einem beliebigen Punkt einer durch eine Einzelkraft im Punkte $x_0 y_0$ belasteten rechteckigen Platte, die die Bedingungen $w=0$ und $\Delta w=0$ auf dem Rand erfüllt, genügt, die drei Spannungsmomente m_x, m_y, t in einem Viertel des symmetrisch deformierten Feldes $a^* b^*$ jener kontinuierlichen Platte zu kennen[1]);

c) aus acht nach Abb. 11 ineinander gestellten Gittern folgt die Beanspruchung eines gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreiecks durch eine Einzelkraft (Grenzbed.: $w=0$, $\Delta w=0$);

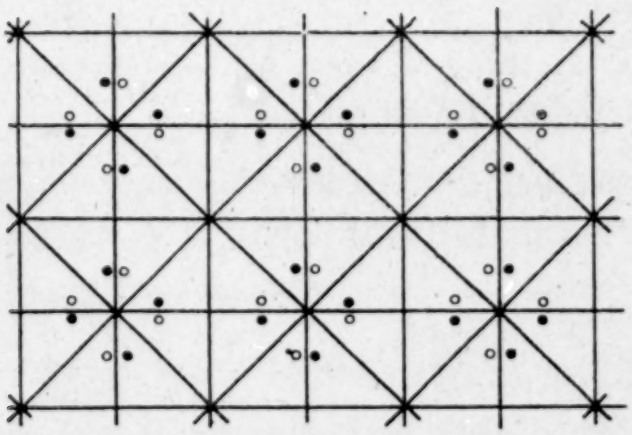


Abb. 11

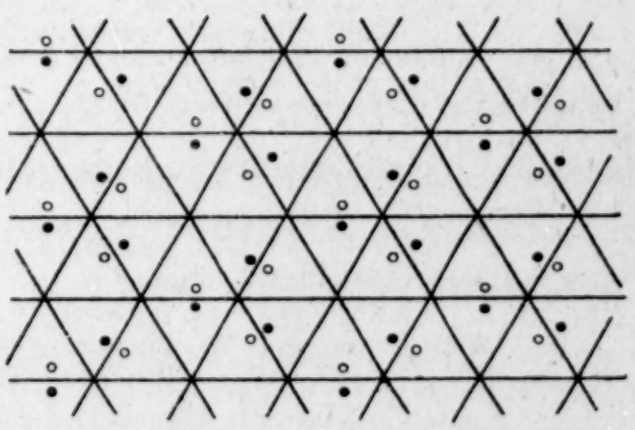


Abb. 12

[1]) Eine zweite Möglichkeit der Synthese der Spannungen des Navierschen Biegungsfalles bietet sich durch Anknüpfen an die Lösung des unendlich langen Plattenstreifens ($b=\infty$)

$$w=\frac{P a^2}{2\pi^3 N}\sum_n \frac{e^{-\frac{n\pi y}{a}}}{n^3}\left(1+\frac{n\pi y}{a}\right)\sin\frac{n\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\quad(n=1,2,3,\ldots;\ y>0)$$

(Nádai, Bauing. 2., S. 11, 1921.)

d) aus zwölf Gittern nach Abb. 12 die eines gleichseitigen Dreiecks unter denselben Grenzbedingungen. In den angeführten Beispielen verschwinden auf den in den Abb. 10 bis 12 gezeichneten Netzen von geraden Linien die Durchbiegungen w und Δw, d. h. auch die beiden Biegungsmomente.

6. Die eingespannte, gleichmäßig belastete rechteckige Platte.[1]) Grenzt man aus einem Plattenstreifen

$$w' = \frac{p a^4}{384 N}\left(1 - \frac{4x^2}{a^2}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36),$$

der durch einen Druck p belastet und in den beiden Geraden $x = \pm \frac{a}{2}$ eingespannt ist, das Rechteck $x = \pm \frac{a}{2}$, $y = \pm \frac{b}{2}$ ab, so können die Grenzbedingungen der Einspannung auch auf den Seiten $y = \pm \frac{b}{2}$ erfüllt werden, wenn man zu w' eine weitere Lösung

$$w'' = \frac{p a^4}{384 N} \sum_n A_n W_n(x, y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

von $\Delta\Delta w'' = 0$ hinzunimmt. Sie hat die folgenden Bedingungen zn erfüllen:

$$\left.\begin{array}{lll} x = \pm \frac{a}{2} & 1.\ w'' = 0, & 2.\ \frac{\partial w''}{\partial x} = 0 \\ y = \pm \frac{b}{2} & 3.\ w'' = -w', & 4.\ \frac{\partial w''}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38).$$

Seien

$$w_n(x, y) = u_n(x, y) + v_n(x, y), \qquad \Delta\Delta u_n = 0, \qquad \Delta\Delta v_n = 0 \quad \ldots \quad (39),$$

$$u_n(x, y) = 1 - \frac{4x^2}{a^2} + \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}} b}{a \operatorname{Sin}^2 \frac{n\pi b}{2a}}\left[\frac{n\pi b}{2a}\operatorname{Cof}\frac{n\pi b}{2a}\operatorname{Cof}\frac{n\pi y}{a}\right.$$

$$\left. - \frac{n\pi y}{a}\operatorname{Sin}\frac{n\pi y}{a}\operatorname{Sin}\frac{n\pi b}{2a} + \operatorname{Sin}\frac{n\pi b}{2a}\operatorname{Cof}\frac{n\pi y}{a}\right]\cos\frac{n\pi x}{a} \quad . \quad (40)$$

$$v_n(x, y) = \frac{4 n^4 b^4}{a^4} \sum_m \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}\left[\operatorname{Sin}\frac{m\pi a}{2b}\operatorname{Cof}\frac{m\pi x}{b} - \frac{2x}{a}\operatorname{Sin}\frac{m\pi x}{b}\operatorname{Cof}\frac{m\pi a}{2b}\right]}{\left(m^2 + \frac{n^2 b^2}{a^2}\right)^2\left(\operatorname{Sin}\frac{m\pi a}{2b}\operatorname{Cof}\frac{m\pi a}{2b} + \frac{m\pi a}{2b}\right)}\cos\frac{m\pi y}{b} \quad \begin{array}{l}(n = 1, 3, 5, \ldots) \\ (m = 2, 4, 6, \ldots)\end{array} \quad (41).$$

Diese Funktionen sind so bestimmt, daß $w_n(x, y)$ die Bedingungen 1, 2 und 4 erfüllt. Um auch die letzte zu befriedigen, verbleibt die Möglichkeit, aus den Funktionen $w_n(x, y)$ Summen zu bilden, die auf den Seiten $y = \pm \frac{b}{2}$ der Forderung

$$\sum B_n w_n\left(x, \frac{b}{2}\right) = -\left(1 - \frac{4x^2}{a^2}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

genügen. Dieselbe läuft also darauf hinaus, die Biegungsform des gleichförmig belasteten, eingespannten Stabes nach den Funktioen $w_n\left(x, \frac{b}{2}\right)$ zu entwickeln, welche die Bedingungen eines eingespannten Stabes $x = \frac{a}{2}$, $w_n = 0$, $\frac{\partial w_n}{\partial x} = 0$ ebenfalls erfüllen. Zu diesem Zweck kann man aus den w_n die linearen Kombinationen nach dem Schema:

$$\left.\begin{array}{l} W_1 = w_1 \\ W_2 = w_1 + \alpha_{22} w_2 \\ W_3 = w_1 + \alpha_{32} w_2 + \alpha_{33} w_3 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

[1]) Die Lösung durch eine Doppelsumme stellten H. Leitz (Z. f. Math. u. Physik 1917) und Mesnager (C. R. Paris 1916 S. 478), durch Berechnen der Beiwerte aus einem System von Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten H. Hencky (a. a. O., woselbst auch der Fall der Einzelkraft in der Mitte des Rechtecks behandelt wird) auf. Mit dem letzteren Fall beschäftigte sich sehr eingehend H. Happel (Göttinger Nachr. S. 37, 1914). — Ueber die Biegung des unendlich langen eingespannten Plattenstreifens durch eine Einzelkraft s. Bauing. S. 299, 1921.

aufstellen und die Beiwerte $\alpha_{\mu\nu}$ so bestimmen, daß die W_n ein orthogonales System von Funktionen bilden, mit dessen Hilfe die Festwerte A_n in der Summe

$$\sum_n A_n W_n(x) = -\left(1 - \frac{4x^2}{a^2}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

sich als verallgemeinerte Fourier-Koeffizienten:

$$A_n = -\frac{\int_0^{\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{4x^2}{a^2}\right)^2 W_n(x)\, dx}{\int_0^{\frac{a}{2}} W_n^2(x)\, dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

ergeben. Wegen des ausgezeichneten Anschlusses der ersten der Funktionen w_n $(n = 1)$ an die Funktion $\left(1 - \frac{4x^2}{a^2}\right)^2$ genügt indes, hier den ersten Beiwert A_1 aus einer Näherungs-Forderung, beispielsweise aus der folgenden:

$$A_1 \int_0^{\frac{a}{2}} W_1(x)\, dx = -\int_0^{\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{4x^2}{a^2}\right)^2 dx = -\frac{4a}{15} \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

zu ermitteln und die Reihe nach dem ersten Gliede abzubrechen.

Es folgt

$$\int_0^{\frac{a}{2}} W_1(x)\, dx = \int_0^{\frac{a}{2}} (u_1 + v_1)\, dx = \frac{a}{3} - \frac{b}{\pi} \frac{\mathrm{Sin}\frac{\pi b}{a} + \frac{\pi b}{a}}{\mathrm{Cof}\frac{\pi b}{a} - 1}$$

$$+ \frac{8a}{\pi^2} \frac{b^6}{a^6} \sum_m \frac{\mathrm{Sin}\frac{m\pi a}{b} + \frac{m\pi a}{b}}{\mathrm{Sin}\frac{m\pi a}{b} + \frac{m\pi a}{b}} \frac{1}{m^2\left(m^2 + \frac{b^2}{a^2}\right)^2} \quad (m = 2, 4, 6, \ldots) \quad (47).$$

Für das Quadrat ist

$$A_1 = 2{,}6607 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48),$$

Der Biegungspfeil der eingespannten quadratischen Platte ist somit (wenn $\nu = 0{,}25$ genommen wird):

$$x = y = 0, \ldots. \quad f = \frac{p a^4}{384 N}\{1 + A_1(u_1 + v_1)\} = \frac{p a^4}{384 N}(1 - 0{,}5102) = 0{,}01436 \frac{p a^4}{E h^3} \quad (49).$$

Ihre elastische Fläche ist unter Beschränkung auf das erste Glied $A_1 W_1(x, y)$ der Reihe (44) gegeben durch

$$w = \frac{p a^4}{384 N}\left\{\left(1 - \frac{4x^2}{a^2}\right)^2 + A_1[u_1(x, y) + v_1(x, y)]\right\} \quad \ldots\ldots \quad (50).$$

Diese Fläche erfüllt die Differentialgleichung und die Grenzbedingungen auf den Seiten $x = \pm \frac{a}{2}$, ebenso die Bedingung $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ auf $y = \pm \frac{a}{2}$ streng. Sie nimmt auf $y = \pm \frac{a}{2}$ die Werte

$\frac{x}{a} =$	0	0,125	0,250	0,375	0,500	
$w =$	0,007	0,005	− 0,003	− 0,007	0,000	$\frac{p a^4}{384 N}$

an, welche zeigen, daß die Erhebung der Ränder $y = \pm \frac{a}{2}$ im Verhältnis zum Biegungspfeil f (Gl. 49) minimal ist. Durch das erste Glied $n = 1$ der Reihe ist also auch die letzte Grenzbedingung $y = \pm \frac{a}{2}$ $w = 0$ mit einer für die praktischen Anwendungen hin-

reichenden Genauigkeit (die größte Erhebung des Randes beträgt 1,4 vH vom Biegungspfeil f) berücksichtigt.

Durch diese weit getriebene Anpassung der vorstehenden Ausdrücke der elastischen Fläche an ihre Randbedingungen wird es nunmehr möglich, sie zur Berechnung der Spannungsmomente heranzuziehen. Wir stellen ihre Ausdrücke im folgenden zusammen:

$$x=\frac{a}{2},\ y=0:\quad \begin{cases} m_x=\frac{p a^2}{48}\left\{-4 + A_1\left[1+\sum_m (-1)^{\frac{m}{2}} C_m \operatorname{Cof}\frac{m\pi a}{2b}\right]\right\} \\ m_y=\frac{p a^2}{48}\left\{-4\nu + A_1\left[\nu+\nu\sum_m (-1)^{\frac{m}{2}} C_m \operatorname{Cof}\frac{m\pi a}{2b}\right]\right\} \end{cases} \qquad (m=2,4,6,\ldots) \quad (51)$$

$$x=0,\ y=0:\quad \begin{cases} m_x=\frac{p a^2}{48}\left\{2 + A_1\left[1+\sum_m (-1)^{\frac{m}{2}}(C_m-S_m) - \frac{\pi^2 b}{4a}\,\frac{(1+\nu)\operatorname{Sin}\frac{\pi b}{2a}+(1-\nu)\frac{\pi b}{2a}\operatorname{Cof}\frac{\pi b}{2a}}{\operatorname{Cof}\frac{\pi b}{a}-1}\right]\right\} \\ m_y=\frac{p a^2}{48}\left\{2\nu + A_1\left[\nu+\sum_m (-1)^{\frac{m}{2}}(\nu C_m+S_m) - \frac{\pi^2 b}{4a}\,\frac{(1+\nu)\operatorname{Sin}\frac{\pi b}{2a}-(1-\nu)\frac{\pi b}{2a}\operatorname{Cof}\frac{\pi b}{2a}}{\operatorname{Cof}\frac{\pi b}{a}-1}\right]\right\} \end{cases} \quad (52)$$

$$x=0,\ y=\frac{b}{2}:\quad \begin{cases} m_x=\frac{p a^2}{48}\left\{2 + A_1\left[1+\sum_m (C_m-S_m) - \frac{\pi^2 b}{4a}\,\frac{(1+\nu)\operatorname{Sin}\frac{\pi b}{2a}\operatorname{Cof}\frac{\pi b}{2a}+(1-\nu)\frac{\pi b}{2a}}{\operatorname{Cof}\frac{\pi b}{a}-1}\right]\right\} \\ m_y=\frac{p a^2}{48}\left\{2\nu + A_1\left[\nu+\sum_m (\nu C_m-S_m) - \frac{\pi^2 b}{4a}\,\frac{(1+\nu)\operatorname{Sin}\frac{\pi b}{2a}\operatorname{Cof}\frac{\pi b}{2a}-(1-\nu)\frac{\pi b}{2a}}{\operatorname{Cof}\frac{\pi b}{a}-1}\right]\right\} \end{cases} \quad (53),$$

wo

$$C_m=\frac{\frac{2\pi b^3}{a^3}\; m\operatorname{Cof}\frac{m\pi a}{2b}}{\left(m^2+\frac{b^2}{a^2}\right)^2\left(\operatorname{Sin}\frac{m\pi a}{2b}\operatorname{Cof}\frac{m\pi a}{2b}+\frac{m\pi a}{2b}\right)},\qquad S_m=\frac{\frac{(1-\nu)\pi b^3}{a^3}\; m\frac{m\pi a}{2b}\operatorname{Sin}\frac{m\pi a}{2b}}{\left(m^2+\frac{b^2}{a^2}\right)^2\left(\operatorname{Sin}\frac{m\pi a}{2b}\operatorname{Cof}\frac{m\pi a}{2b}+\frac{m\pi a}{2b}\right)} \quad (54).$$

Aus den vorstehenden Formeln ergeben sich für die eingespannte quadratische Platte die Biegungsmomente:

in der Mitte des Quadrates $(x=y=0)$ $\quad m_x=m_y=0{,}0222\,p\,a^2$

in der Mitte einer Seite $\left(x=\frac{a}{2},\ y=0\right)$ $\quad m_x=-0{,}0515\,p\,a^2,\ m_y=-0{,}0129\,p\,a^2.$

7. Lösungen, die nur von transversal gerichteten Randkräften herrühren.

Wir führen zunächst zwei, für die folgende Rechnung nützliche Funktionen von x ein:

$$U\left(\frac{n\pi x}{b}\right)=\frac{\frac{2}{1-\nu}\operatorname{Cof}\frac{n\pi a}{2b}\operatorname{Cof}\frac{n\pi x}{b}+\frac{n\pi a}{2b}\operatorname{Sin}\frac{n\pi a}{2b}\operatorname{Cof}\frac{n\pi x}{b}-\frac{n\pi x}{b}\operatorname{Sin}\frac{n\pi x}{b}\operatorname{Cof}\frac{n\pi a}{2b}}{\frac{3+\nu}{1-\nu}\operatorname{Sin}\frac{n\pi a}{b}-\frac{n\pi a}{b}} \quad (55),$$

$$Z\left(\frac{n\pi x}{b}\right)=\frac{2\operatorname{Cof}\frac{n\pi a}{2b}\operatorname{Cof}\frac{n\pi x}{b}+\frac{n\pi a}{2b}\operatorname{Sin}\frac{n\pi a}{2b}\operatorname{Cof}\frac{n\pi x}{b}-\frac{n\pi x}{b}\operatorname{Sin}\frac{n\pi x}{b}\operatorname{Cof}\frac{n\pi a}{2b}}{\frac{3+\nu}{1-\nu}\operatorname{Sin}\frac{n\pi a}{b}-\frac{n\pi a}{b}} \quad (56).$$

Sei ferner

$$u_n(x,y)=\frac{2a\left(\frac{n\pi a}{b}\right)b^3}{(1-\nu)\,N n^3\pi^3}\,U\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\cos\frac{n\pi y}{b},\qquad \alpha\left(\frac{n\pi a}{b}\right)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi\,\frac{3+\nu}{1+\nu}\operatorname{Sin}\frac{n\pi a}{b}-\frac{n\pi a}{b}}{16\left(\operatorname{Cof}\frac{n\pi a}{b}+1\right)} \quad (57).$$

Die Funktion $u_n(x,y)$ erfüllt die Differentialgleichung $\Delta\Delta u=0$ und ergibt auf den Rechteckseiten die Biegungsmomente und Schubkräfte:

auf $x = \frac{a}{2}$ $m_x = 0$, $q_x = \alpha_n \cos \frac{n \pi y}{b}$

auf $y = \frac{b}{2}$ $m_y = 0$, $q_y = 2(-1)^{\frac{n+1}{2}} \alpha_n Z\left(\frac{n \pi x}{b}\right) = -\frac{1}{2} \sum_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} m^2}{\left(m^2 + \frac{n^2 a^2}{b^2}\right)^2} \cos \frac{m \pi x}{b}$ (58).

Hier und im folgenden sind $m, n = 1, 3, 5 \ldots$ und für $\alpha\left(\frac{n \pi a}{b}\right)$ sei zur Abkürzung $\alpha_n = \alpha\left(\frac{n \pi a}{b}\right)$ gesetzt. Mit Hilfe der $u_n(x, y)$ bilden wir Spannungszustände:

$$w = \sum_n A_n u_n(x, y) \quad \ldots \quad (59)$$

in rechteckigen Platten, die auf dem Seitenpaar $y = \pm \frac{b}{2}$ den Bedingungen $w = 0$, $m_y = 0$ genügen und auf dem Seitenpaar $x = \pm \frac{a}{2}$ nur durch Schubkräfte $q_x = f(y)$ belastet sind. Wenn diese letzteren in dem Stück $-c < y < c$ den konstanten Wert $q_x = -q$ haben, ist

$$A_n = -\frac{4q}{\pi n \alpha_n} \sin \frac{n \pi c}{b}$$

und

$$w = -\frac{8 q b^3}{(1-\nu) \pi^4 N} \sum_n \frac{\sin \frac{n \pi c}{b} U\left(\frac{n \pi x}{b}\right) \cos \frac{n \pi y}{b}}{n^4} \quad \ldots \quad (60).$$

Auf $y = \frac{b}{2}$ ergibt diese Fläche $w = 0$, $m_y = 0$ und die Schubkraft

$$q_y = \frac{8q}{\pi} \sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \sin \frac{n \pi c}{b} Z\left(\frac{n \pi x}{b}\right) \quad \ldots \quad (61).$$

Wir erhalten, wenn $\alpha)$ $c = \frac{b}{2}$

$$w = -\frac{8 q b^3}{(1-\nu) \pi^4 N} \sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^4} U\left(\frac{n \pi x}{b}\right) \cos \frac{n \pi x}{b} \qquad q_y = \frac{8q}{\pi} \sum_n \frac{Z\left(\frac{n \pi x}{b}\right)}{n} \quad (62)$$

auf $x = \frac{a}{2}$ gleichmäßig verteilte Schubkräfte q_x. $\beta)$ Wenn $\underset{c=0,\ q=\infty}{\text{limes}}\ 2qc = Q$

$$w = -\frac{4 Q b^2}{(1-\nu) \pi^3 N} \sum \frac{U\left(\frac{n \pi x}{b}\right) \cos \frac{n \pi y}{b}}{n^3}, \quad q_y = \frac{4Q}{b} \sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} Z\left(\frac{n \pi x}{b}\right). \quad (63)$$

je eine in der Mitte der Seiten $x = \pm \frac{a}{2}$ angreifende Einzelkraft Q, die entgegen der positiven w Richtung wirkt. Schließlich $\gamma)$ wenn zwei Spannungszustände der Art Gl. (60) für zwei wenig verschiedene Werte von $c \ldots$ miteinander kombiniert werden,

$$w = -\frac{8 Q b^2}{(1-\nu) \pi^3 N} \sum \frac{1}{n^3} \cos \frac{n \pi c}{b} U\left(\frac{n \pi x}{b}\right) \cos \frac{n \pi y}{b}, \quad q_y = \frac{8Q}{b} \sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n \pi c}{b} Z\left(\frac{n \pi x}{b}\right) \quad (64)$$

auf dem Seitenpaar $x = \pm \frac{a}{2}$ je zwei Einzelkräfte Q, die in der Entfernung $\pm c$ von der Mitte $x = \pm \frac{a}{2}$, $y = 0$ dieser Seiten angreifen.

Wir können den Verlauf der Schubkräfte q_x Gl. (62) und (63) auf $y = \pm \frac{b}{2}$ näher angeben. Wenn das Argument $\frac{n \pi x}{b}$ der Funktion Z zunimmt, nähert sich der Wert von Z rasch der Funktion

$$Z\left(\frac{n \pi x}{b}\right) = -\frac{1}{2} \frac{1-\nu}{3+\nu} [(2 - n\xi_1) e^{-n\xi_1} + (2 - n\xi_2) e^{-n\xi_2}] \quad \ldots \quad (65),$$

wo

$$\xi_1 = \frac{\pi a}{b}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{a}\right), \quad \xi_2 = \frac{\pi a}{b}\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{a}\right) \quad \ldots \quad (66).$$

Setzt man $z = e^{-\xi}$ . . . . . (67),

so ist

$$2\Sigma z^n = \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\xi},\quad 2\Sigma\frac{z^n}{n} = \ln \mathfrak{Cotg}\,\frac{\xi}{2},\quad 2\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}} z^n = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\xi},\quad 2\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}} n z^n = \frac{\mathfrak{Sin}\,\xi}{\mathfrak{Cof}^2\xi} \quad (68),$$

sofern $n = 1, 3, 5 \ldots$ und $z < 1$ ist. Demnach ist im Falle α)

$$q_y = \frac{8q}{\pi}\Sigma_n \left\{ \frac{Z\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{n} - \frac{1}{2}\frac{1-\nu}{3+\nu}\left[(2-n\xi_1)\frac{e^{-n\xi_1}}{n} + (2-n\xi_2)\frac{e^{-n\xi_2}}{n}\right]\right\}$$
$$- \frac{1-\nu}{3+\nu}\frac{4q}{\pi}\left\{\ln \mathfrak{Tg}\,\frac{\xi_1}{2} + \ln \mathfrak{Tg}\,\frac{\xi_2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi_1}{\mathfrak{Sin}\,\xi_1} + \frac{\xi_2}{\mathfrak{Sin}\,\xi_2}\right)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

und im Falle β)

$$q_y = \frac{4Q}{b}\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left\{Z\left(\frac{n\pi x}{b}\right) - \frac{1}{2}\frac{1-\nu}{3+\nu}\left[(2-n\xi_1)e^{-n\xi_1} + (2-n\xi_2)e^{-n\xi_2}\right]\right\}$$
$$- \frac{1-\nu}{3+\nu}\frac{Q}{b}\left\{\frac{\xi_1\,\mathfrak{Sin}\,\xi_1 - 2\,\mathfrak{Cof}\,\xi_1}{\mathfrak{Cof}^2\xi_1} + \frac{\xi_2\,\mathfrak{Sin}\,\xi_2 - 2\,\mathfrak{Cof}\,\xi_2}{\mathfrak{Cof}^2\xi_2}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (70).$$

Durch diese Zerlegung wurde der Charakter der Schubspannungskurven klargestellt. Wir geben im nachstehenden einige Zahlenangaben für ihren Verlauf bei einer quadratischen Platte und die Werte der Funktionen $U\left(\frac{\pi x}{a}\right)$, $U\left(\frac{3\pi x}{a}\right)$, $U\left(\frac{5\pi x}{a}\right)$ und $Z\left(\frac{\pi x}{a}\right)$, die wir im folgenden benötigen werden.

Zahlentafel 2.

$\frac{\pi x}{a} =$	0,000	0,2625	0,524	0,785	1,047	1,309	1.396	1,484	1,518	1,571	Faktor
$\frac{\pi x}{a}$ in Winkelgraden	0^0	15^0	30^0	45^0	60^0	75^0	80^0	85^0	87^0	90^0	
Schubkraft q_y (Fall α) nach Gl. (69) für $a = b$	0,072	0,084	0,120	0,188	0,303	0,517	0,645	0,858	1,011	∞	q
Schubkraft q_y (Fall β) nach Gl. (70) für $a = b$	0,140	0,159	0,218	0,310	0,423	0,531	—	—	—	0,602	$\frac{Q}{a}$
$Z\left(\frac{\pi x}{a}\right) =$	0,030	0,035	0,049	0,076	0,118	0,180	0,206	0,236	0,248	0,269	—
$U\left(\frac{\pi x}{a}\right) =$	0,2198	0,2237	0,2352	0,2546	0,2817	0,3166	—	—	—	0,3580	—
$U\left(\frac{3\pi x}{a}\right) =$	0,016	0,018	0,031	0,056	0,102	0,181	—	—	—	0,308	—
$U\left(\frac{5\pi x}{a}\right) =$	0,000	0,000	0,005	0,015	0,045	0,124	—	—	—	0,308	—

8. Verwendung der Lösungen $u_n(x,y)$ zur Befriedigung der Grenzbedingungen von Platten, auf deren Ränder nur Einzelkräfte wirken. Mit Hilfe der Funktionen $\mu_n(x,y)$, Gl. (57), kann die Lösung angegeben werden, die in einem Rechteck die folgenden Grenzbedingungen erfüllt:

$$\left.\begin{array}{llll} x = \pm\frac{a}{2} & 1.\ m_x = 0 & 2.\ q_x = f(y) \\ y = \pm\frac{b}{2} & 3.\ m_y = 0 & 4.\ q_y = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71).$$

$f(y)$ soll im Hinblick auf die Beschränkung auf gerade Funktionen $u_n(x,y)$ gerade sein. Sie ist darstellbar durch eine Summe

$$w = \Sigma B_n w_n(x,y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72),$$

wo
$$w_n(x,y) = u_n(x,y) + v_n(x,y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73),$$

und

$$v_n(x,y) = \frac{a^3}{(1-\nu)\pi^3 N}\Sigma_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\left(m^2 + \frac{n^2a^2}{b^2}\right)^2} U\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\cos\frac{m\pi x}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

so bestimmt wurde, daß $w_n(x,y)$ die Bed. 1, 3 und 4 erfüllt, wozu nur im besondern notwendig war, daß das von v_n herrührende q_y gleich und entgegengesetzt dem q_y von u_n (s. Gl. (58)) wird.

Von v_n rühren die Schubkräfte

$$\text{auf } x = \frac{a}{2} \quad q_x = -\sum \frac{m^3 Z\left(\frac{m\pi y}{a}\right)}{\left(m^2 + \frac{n^2 a^2}{b^2}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (75),$$

$$\text{auf } y = \frac{b}{2} \quad q_y = \frac{1}{2}\sum \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} m^3 \cos\frac{m\pi x}{a}}{\left(m^2 + n^2\frac{a^2}{b^2}\right)^2} \quad \ldots\ldots \quad (76)$$

her, an denen sich dieses i. d. T. bestätigt. Die Lösungen $w_n(x,y)$ (73) hinterlassen also einzig und allein auf dem Seitenpaar $x = \pm\frac{a}{2}$ Schubkräfte, die gleich

$$\alpha_n \cos\frac{n\pi y}{b} - \sum_m \frac{m^3 Z\left(\frac{m\pi y}{a}\right)}{\left(m^2 + n^2\frac{a^2}{b^2}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

sind. Die Randwertaufgabe (71) läuft schließlich darauf hinaus, auf den Seiten $x = \pm\frac{a}{2}$ eine gegebene Verteilung der Schubkräfte $q_x = f(y)$ nach den Funktionen

$$s_n(y) = \alpha_n \cos\frac{n\pi y}{b} - \sum \frac{m^3 Z\left(\frac{m\pi y}{a}\right)}{\left(m^2 + n^2\frac{a^2}{b^2}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

zu entwickeln, was ähnlich, wie bei der eingespannten Platte, durch ein aus den $s_n(y)$ gebildetes Orthogonalsystem $S_n(y)$ durch die Summe

$$f(y) = \sum_n A_n S_n(y), \quad A_n = \frac{\int f(y) S_n(y)\,dy}{\int S_n^2(y)\,dy} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

geschehen könnte. Wegen der weitgehenden Anpassung der Funktionen $w_n(x,y)$ an die Bedingungen (71) wird indessen genügen, ein oder zwei Glieder anzusetzen und ihre Festwerte aus irgend welchen einfachen Variationsforderungen, die sich auf die Verteilung der Schubkräfte beziehen, zu bestimmen. Die Funktionen $s_n(y)$ schmiegen sich den Kurven $\alpha_n \cos\frac{n\pi y}{b}$ mit Ausnahme der Enden des Intervalles nahe an und zeigen in der Umgebung der Ecken einen Verlauf, der verwandt mit dem der Schubkraftkurven q_y in der Gl. (69) ist.

δ) Die rechteckige Platte ist in ihren Ecken unterstützt und wird durch zwei Kräfte Q in der Mitte $\left(x = \pm\frac{a}{2},\ y = 0\right)$ eines gegenüberliegenden Seitenpaares belastet. Wir benötigen die Lösung β) Gl. (63) der Nummer 7.

$$w' = -\frac{4Qb^2}{(1-\nu)\pi^3 N}\sum \frac{1}{n^3} U\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\cos\frac{n\pi y}{b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (80).$$

Die Verteilung von Schubkräften

$$q_y = \frac{4Q}{b}\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} Z\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (81),$$

die sie nach (63) auf dem Seitenpaar $y = \pm\frac{b}{2}$ hinterläßt, läßt sich jetzt fortschaffen, wenn zu w' Lösungen vom Typus $v_n(x,y)$ Gl. (74) hinzugenommen werden. Es genügt bereits die Funktion für $n = 1$

$$A_1 v_1(x,y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

zu w' zu addieren und A_1 so zu bestimmen, daß das erste Glied der Reihe für q_y sich gegen die von (82) herrührende Schubkraft forthebt. Wir erhalten so

$$w = w' + A_1 v_1(x,y) = -\frac{2Qb^2}{(1-\nu)\pi^3 N} \sum_n \left[\frac{2}{n^3} U\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \cos\frac{n\pi y}{b} + \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} a^3}{b^3 \alpha\left(\frac{\pi b}{a}\right)} \frac{U\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cos\frac{n\pi x}{a}}{\left(n^2+\frac{a^2}{b^2}\right)^2} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

einen recht guten Näherungsausdruck für die Durchbiegung, der auch zur Berechnung der Spannungsmomente brauchbar ist. Er erfüllt die Differentialgleichung und die Grenzbedingungen $x = \frac{a}{2}$ $m_x = 0$, $y = \frac{b}{2}$ $m_y = 0$ streng und von den Bedingungen für die Schubkräfte die Forderung $y = \frac{b}{2}$ $q_y = 0$ bis auf sehr geringe Fehler. Allein die Werte von q_x auf dem Seitenpaar $x = \pm\frac{a}{2}$ zeigen in der Gegend der Ecken eine Abweichung, statt der konzentrierten Kräfte in den Ecken ergeben sich Kurven für q_x, deren Ordinaten in der Umgebung der Ecken von Null verschieden sind und gegen diese hin plötzlich zunehmen. Eine quadratische Platte, die in dieser Art belastet ist, weist die Erhebungen

in der Mitte des Quadrates	$(x = y = 0)$	$w = -0{,}02217\frac{pa^4}{N}$
» » » » belasteten Seitenpaares	$\left(x = \frac{a}{2},\ y = 0\right)$	$w = -0{,}03198\frac{pa^4}{N}$
» » » » unbelasteten »	$\left(x = 0,\ y = \frac{a}{2}\right)$	$w = -0{,}00511\frac{pa^4}{N}$

auf (Abb. 14), sofern $Q = \frac{pa^2}{2}$ mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung gesetzt wird.

ε) Biegung einer in den Ecken unterstützten rechteckigen Platte durch 4 symmetrisch angreifende Kräfte Q' nach Abb. 13. Statt an β) ist hier an die Lösung γ) Gl. (64) anzuknüpfen. Die Durchbiegung ist:

$$w = -\frac{4Q'b^2}{(1-\nu)\pi^3 N} \sum_n [\,]_n \cos\frac{n\pi c}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84),$$

wo mit $[\,]_n$ der in der eckigen Klammer der Gl. (83) enthaltene Ausdruck bezeichnet ist.

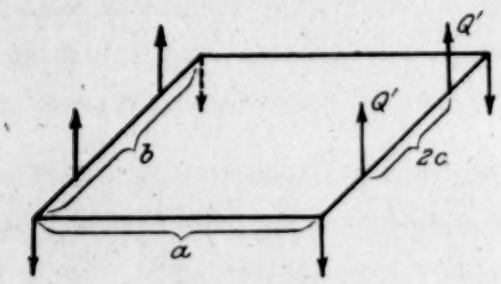


Abb. 13

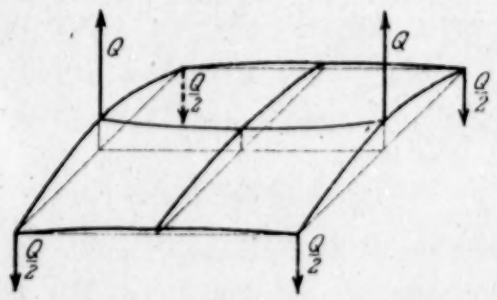


Abb. 14

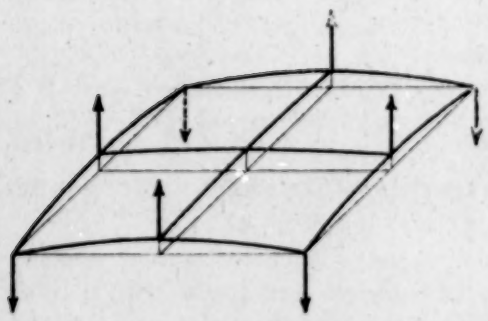


Abb. 15

9. Die Synthese der Lösungen, die zu einem freien Plattenrand führt, ist durch diese Einzelausführungen vorgezeichnet. Zu einer rechteckigen Platte, die durch ein in ihrem Innern aufgebrachtes System von Lasten im Gleichgewicht gehalten wird, läßt sich stets eine unbegrenzte angeben, deren Formänderungen doppeltperiodische Funktionen der Koordinaten x und y sind und deren Belastungen in jedem Viertel des Periodenparallelogramms mit dem gegebenen Lastsystem zur Deckung gebracht werden können.

Durchbiegungen von quadratischen Platten[1]).

Zahlentafel 3.

2 Kräfte $Q = \frac{pa^2}{2}$ im Gleichgewicht mit 4 Eckkräften.

(Belastungsfall δ) Gl. (83), Abb. 14 und 21).

$\frac{x}{a}$ \ $\frac{y}{a}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$
0	2217	1981	1348	511
$\frac{1}{6}$	2311	2050	1361	453
$\frac{2}{6}$	2621	2270	1393	284
$\frac{3}{6}$	3198	2685	1452	0

Zahlentafel 4.

4 Kräfte $Q = \frac{pa^2}{4}$ in den Seitenmitten, 4 Eckkräfte.

(Abb. 15.)

$\frac{x}{a}$ \ $\frac{y}{a}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$
0	2217	2148	1985	1851
$\frac{1}{6}$	2148	2050	1816	1570
$\frac{2}{6}$	1985	1816	1393	868
$\frac{3}{6}$	1851	1570	868	0

Die elastische Fläche w' dieser kontinuierlichen Platte erfüllt auf dem Rand des fundamentalen Rechtecks ab die Grenzbedingungen $w' = 0$ und $\Delta w' = 0$ (der beiden Lösungen w_I und w_{II} Gl. (2) und (4) von Navier). Sie ruft auf seinem Rand nur Schubkräfte q_x bezw. q_y und 4 Einzelkräfte in dessen Ecken hervor. Nachdem die äußeren Kräfte im Innern des Rechtecks ab ein Gleichgewichtssystem bilden, müssen auch die Schubkräfte auf dem Rand einschließlich den 4 Eckkräften sich das Gleichgewicht halten. Spannungszustände dieser Art sind unter 7. und 8. angegeben worden. Es bleibt nur übrig, zur doppeltperiodischen Lösung w' die Deformationszustände w'', w''' usw. von der unter 7. und 8. angegebenen Art hinzuzufügen, die von dem Gleichgewichtssystem der entgegengesetzt gerichteten Randkräfte einschließlich der Eckkräfte herrühren, um die Ränder frei zu bekommen.

11. Rechteckige Platten, die auf ihrem Rand in Punkten unterstützt sind.

Die Grenzbedingungen einer »frei aufliegenden« Platte bedürfen beim Rechteck (und allgemein bei jeder Kontur, die Ecken besitzt) einer genaueren Fassung, weil sie oft nicht eindeutig oder nicht zutreffend formuliert worden sind. Versteht man unter einem frei aufliegenden Rand, daß entlang desselben keine Biegungsmomente auf die Platte von außen übertragen werden, so ist durch diese Aussage der Deformationszustand der Platte noch nicht festgelegt. Es muß eine weitere hinzugefügt werden, beispielsweise die Angabe, nach welcher Kurve sich der Rand krümmen soll. Als Bedingungen eines frei aufliegenden Randes wurden bisher meist angenommen

$$x = \pm \frac{a}{2}, \quad w = 0, \quad m_x = 0$$

$$y = \pm \frac{b}{2}, \quad w = 0, \quad m_y = 0.$$

Abgesehen davon, daß durch eine derartige Aussage der Begriff zu eng gefaßt wurde, trifft er im Falle verschwindender Durchbiegungen auf dem Rande, wie bereits erwähnt wurde, nicht mehr zu. Durch die Form der Kurve, nach der sich der Rand bei der Deformation der Platte wölbt, wird das Verteilungsgesetz der Schubkräfte q_x, q_y bestimmt. Wenn die Lasten, welche die Platte trägt, alle gleich gerichtet sind, wird von einem frei aufliegenden Rand noch stillschweigend vorausgesetzt, daß sich das Vorzeichen der Stützkräfte nicht ändern darf. Unter den Randkurven müssen deshalb alle ausgeschlossen werden, für die Vorzeichenwechsel von q_x oder q_y eintritt. Dieser letztere ergibt sich aber beispielsweise für das Rechteck als Folge der obigen Festsetzung. Man umgeht diese Schwierigkeit, wenn man statt der kinematischen die statischen Verhältnisse hinsichtlich der Stützung vorschreibt.

---

[1]) Die Zahlenangaben sind mit $-10^{-5}\frac{pa^4}{N}$ zu multiplizieren.

Die folgenden Fälle beziehen sich auf Platten, die durch einen gleichmäßig verteilten Druck p belastet sind. Wir könnten hier, entsprechend den Bemerkungen von Nummer 9, von der doppeltperiodischen Lösung ausgehen, die zu diesem Belastungsgesetz gehört, nämlich von w_{II} Gl. (5). Wenn p = konst., läßt sich jedoch die Fläche

$$\left.\begin{aligned} w' &= \frac{p}{48(1-\nu)N}\left\{x^4 - \frac{3}{2}(a^2-\nu b^2)x^2 - 6\nu x^2y^2 - \frac{3}{2}(b^2-\nu a^2)y^2 + y^4 + c\right\} \\ c &= \frac{5a^4 - 6\nu a^2b^2 + 5b^4}{16} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (85)$$

anschreiben, die der Bedingung verschwindender Randmomente $x = a$, $m_x' = 0$; $y = b$, $m_y' = 0$ wegen

$$\left.\begin{aligned} m_x' &= (1+\nu)\frac{pa^2}{16}\left(1 - \frac{4x^2}{a^2}\right) \\ m_y' &= (1+\nu)\frac{pb^2}{16}\left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right) \\ t' &= \frac{\nu p x y}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

auch genügt. Sie ergibt

$$\left.\begin{aligned} &\text{auf } x = \frac{a}{2} \quad q_x' = -(1-\nu)\frac{pa}{4} = q_a \\ &\text{auf } y = \frac{b}{2} \quad q_y' = -(1-\nu)\frac{pb}{4} = q_b \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87)$$

gleichmäßig verteilte Schubkräfte und in den 4 Ecken des Rechtecks je eine Einzelkraft

$$P = \frac{\nu p a b}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88).$$

a) Das Rechteck ist in den Ecken unterstützt. Wir bilden zunächst die Summe

$$w' + w'' + w''' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89).$$

w' ist durch Gl. (85), w'' durch Gl. (62), § 7, α) gegeben, sofern in dieser $q = -q_a$ gesetzt wird.

$$w'' = \frac{2pab^3}{\pi^4 N}\sum \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^4} U\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\cos\frac{n\pi y}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90).$$

w''' geht aus w'' nach Vertauschung von x gegen y und von a gegen b hervor.

$$w''' = \frac{2pa^3b}{\pi^4 N}\sum \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^4} U\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cos\frac{n\pi x}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91).$$

Jede von den 3 Funktionen w', w'' und w''' erfüllt die Bedingungen $x = \pm\frac{a}{2}$ $m_x = 0$, $y = \pm\frac{b}{2}$ $m_y = 0$; bei ihrer Superposition heben sich auf den Rechteckseiten q_x' gegen q_x'' und q_y' gegen q_y''' fort und es verbleiben

$$\left.\begin{aligned} &\text{auf } x = \frac{a}{2} \quad q_x = q_x''' \frac{8q_b}{\pi}\sum \frac{Z\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{n} \\ &\text{auf } y = \frac{b}{2} \quad q_y = q_y'' \frac{8q_a}{\pi}\sum \frac{Z\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{n} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92).$$

Funktionen für die Schubkräfte, deren Verlauf durch Gl. (69) und für eine quadratische Platte in der Zahlentafel 2 angegeben worden ist. Durch die Hinzunahme von $w'' + w'''$ zu w' wurden von den gleichförmig verteilten Randkräften (87) die Lasten aus den mittleren Teilen der Rechteckseiten gegen die Ecken hin verschoben. Die verbleibenden Randkräfte (92) können weiter in die Ecken gedrängt werden, wenn zu (89) zwei Funktionen v'' und v''' vom Typus (74) addiert werden. Wir begnügen uns damit, durch v'' und v''' nur das erste Glied der Reihen (92) ($n = 1$) zu kompensieren und finden, daß dieses der Fall ist, wenn

$$v'' = \frac{p b^4}{\pi^4 N \alpha\left(\frac{\pi a}{b}\right)} \Sigma \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\left(m^2 + \frac{b^2}{a^2}\right)^2} U\left(\frac{m\pi x}{b}\right) \cos \frac{m\pi y}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93)$$

$$v''' = \frac{p a^4}{\pi^4 N \alpha\left(\frac{\pi b}{a}\right)} \Sigma \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\left(m^2 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2} U\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \cos \frac{m\pi x}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94).$$

Wir erhalten beispielsweise die elastische Fläche der in ihren Ecken unterstützten quadratischen Platte, die unter einem Druck p verbogen ist:

$$w_1 = w' + \frac{p a^4}{\pi^4 N} \Sigma_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{2}{n^4} + \frac{1}{(n^2+1)^2 \alpha(\pi)}\right]\left[U\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\frac{n\pi y}{a} + U\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cos\frac{n\pi x}{a}\right] \quad (95),$$

worin für $n = 1, 3, 5 \ldots$ zu nehmen und für w' der Ausdruck (85), schließlich für $\alpha(\pi)$ nach (57)

$$\alpha(\pi) = \frac{\pi}{16} \frac{3+\nu}{1-\nu} \frac{\mathfrak{Sin}\,\pi - \pi}{\mathfrak{Cof}\,\pi + 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

zu setzen sind. Wir benutzen die Fläche w_1 Gl. (95) im folgenden.

b) Die quadratische Platte ruht in zwei diagonal gegenüberliegenden Ecken auf:

$$w = w_1 + \frac{p a^2 x y}{8(1-\nu)N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97).$$

c) Die quadratische Platte ruht in der Mitte von zwei gegenüberliegenden Seiten auf: Wir haben zu w_1 den Spannungszustand § 8 δ) Gl. (83) hinzuzufügen und die Kraft Q gleich der Hälfte der gleichförmig verteilten Last zu setzen. Dies ergibt $Q = \frac{p a^2}{2}$

Abb. 16

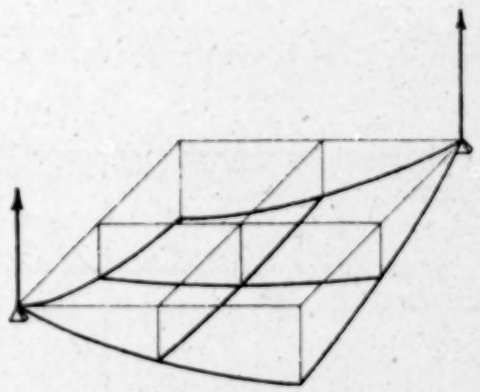


Abb. 17

$$w = w_1 - \frac{p a^4}{(1-\nu)\pi^3 N} \Sigma_n \left[\frac{2}{n^3} U\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\frac{n\pi y}{a} + \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\alpha(\pi)} \frac{U\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cos\frac{n\pi x}{a}}{(n^2+1)^2}\right] \quad (98).$$

d) Die quadratische Platte ruht in der Mitte von jeder Seite auf. Wir haben zu w_1 zwei Lösungen nach Gl. (83) zu addieren, jedoch $Q = \frac{p a^2}{4}$ zu setzen:

$$w = w_1^* - \frac{p a^4}{2(1-\nu)\pi^3 N} \Sigma_n \left[\frac{2}{n^3} + \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(n^2+1)^2 \alpha(\pi)}\right]\left[U\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\frac{n\pi y}{a} + U\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cos\frac{n\pi x}{a}\right] \quad (99).$$

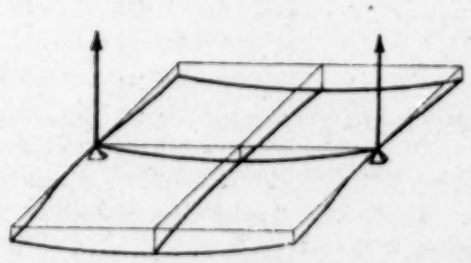


Abb. 18

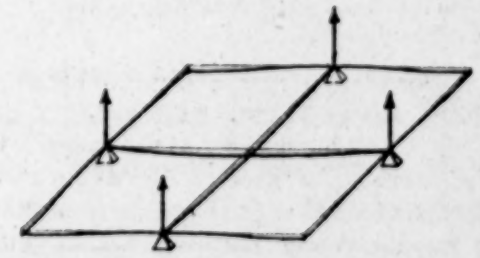


Abb. 19

e) 4 Stützpunkte nach Abb. 13. Hier haben wir statt an δ) an den Fall ε) Gl. (84) anzuknüpfen.

$$w = w_1 - \frac{p a^4}{(1-\nu)\pi^3 N} \sum_n [\,]_n \cos \frac{n\pi c}{a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (100),$$

wo mit $[\,]_n$ der in der eckigen Klammer der Summe Gl. (98) enthaltene Ausdruck und mit $2c$ die Entfernung der Stützpunkte bezeichnet sind.

f) 8 Stützpunkte nach Abb. 20.

$$w = w_1 - \frac{p a^4}{2(1-\nu)\pi^3 N} \sum_n [\,]_n \cos \frac{n\pi c}{a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (101),$$

wo $[\,]_n$ für das Produkt der beiden eckigen Klammern von Gl. (99) gesetzt ist.

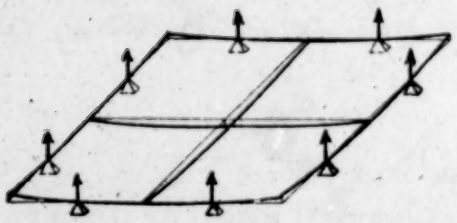


Abb. 20

Die vorstehenden Formeln, insbesondere die Gl. (100) und (101) gestatten unter Verwendung von den in der Zahlentafel 2 enthaltenen Werten der Funktionen $U\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ in einfacher Rechnung die Veränderungen der Plattenform zu verfolgen, wenn die Entfernung der Stützpunkte $2c$ abgeändert wird. Mit der Zunahme der Entfernung $2c$ vergrößert sich der Durchhang in der Mitte des Quadrates vom Wert 0,00449 ($c = 0$, die 8 Stützpunkte fallen mit den 4 Seitenmitten zusammen) auf $0{,}02532 \frac{p a^4}{N}$ ($c = \frac{a}{2}$, die

Durchbiegungen einer gleichmäßig belasteten quadratischen Platte[1]).

Zahlentafel 5.

Auflage in den Ecken (a. Gl. (95), Abb. 16 u. 22).

$\frac{x}{a}$ \ $\frac{y}{a}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$
0	2532	2413	2102	1717
$\frac{1}{6}$	2413	2284	1936	1500
$\frac{2}{6}$	2102	1936	1485	882
$\frac{3}{6}$	1717	1500	882	0

Zahlentafel 6.

Auflage in der Mitte von zwei gegenüberliegenden Seiten. (c Gl. (98), Abb. 18.)

$\frac{x}{a}$ \ $\frac{y}{a}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$
0	1796	1923	2235	2687
$\frac{1}{6}$	1583	1715	2056	2528
$\frac{2}{6}$	962	1147	1573	2079
$\frac{3}{6}$	0	296	911	1481

Zahlentafel 7.

Auflage in den 4 Seitenmitten (d. Gl. (99), Abb 19 und 23.)

$\frac{x}{a}$ \ $\frac{y}{a}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$
0	449	399	251	0
$\frac{1}{6}$	399	368	254	64
$\frac{2}{6}$	251	254	226	148
$\frac{3}{6}$	0	64	148	134

[1]) Die Zahlen sind mit $10^{-5} \frac{p a^4}{N}$ zu multiplizieren.

Durchbiegungen von quadratischen Platten.

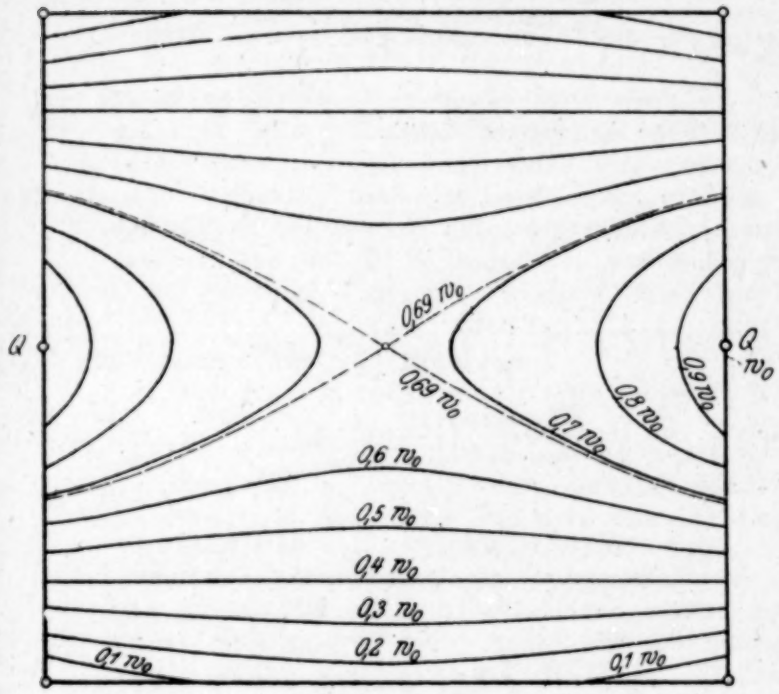


Abb 21

2 Kräfte $Q = \frac{pa^2}{2}$ im Gleichgewicht mit 4 Eckkräften.

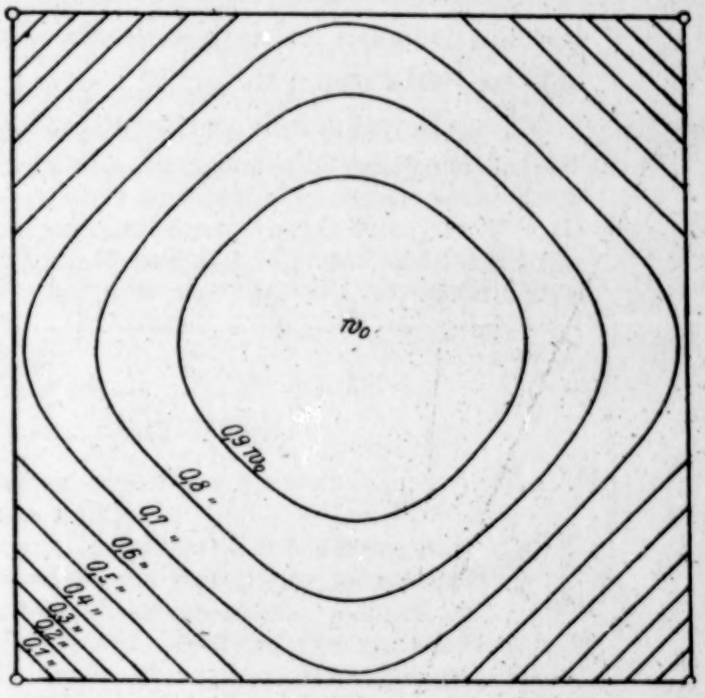


Abb. 22

Gleichförmige Belastung. Das Quadrat ist in den Ecken unterstützt.

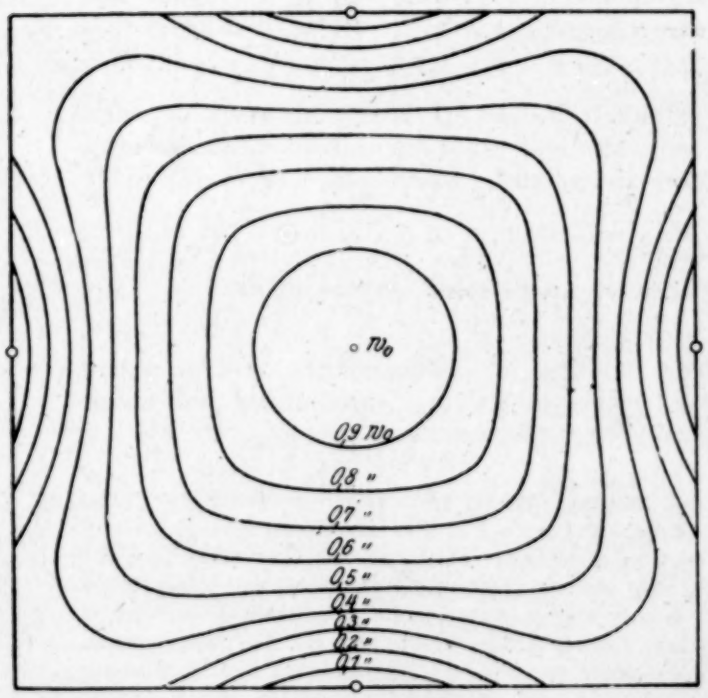


Abb. 23

Gleichförmige Belastung. Das Quadrat ist in den Seitenmitten unterstützt.

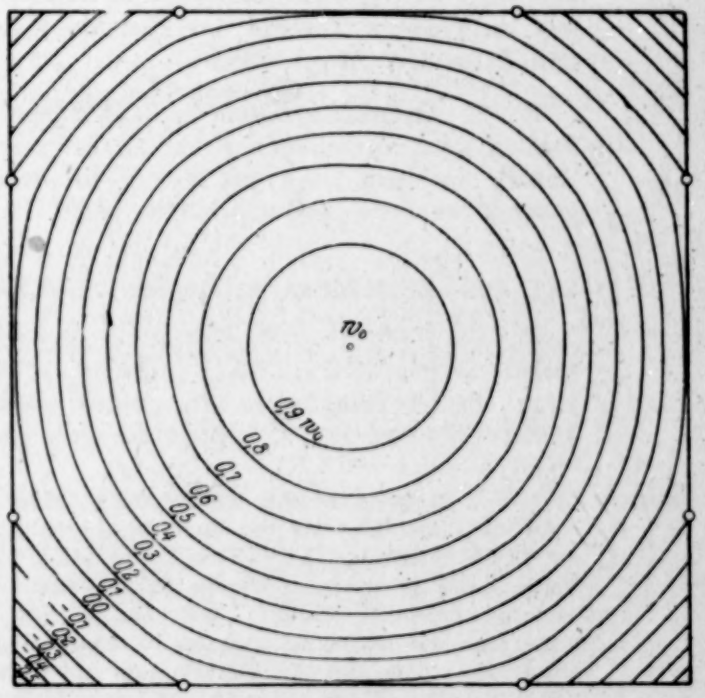


Abb. 24

Gleichförmige Belastung. Das Quadrat ruht in 8 Punkten auf.

8 Stützpunkte fallen mit den Ecken zusammen). Der Summenfaktor $\cos \frac{n\pi c}{a}$ bringt die Abhängigkeit von c in die Formeln (100) und (101) herein. Solange c kleiner als ungefähr $\frac{a}{8}$ ist, haben bei 8 Stützpunkten die Ecken eine positive Durchbiegung. Mit der weiteren Zunahme der Entfernung c beginnen sie sich über die Ebene der 8 Stützpunkte

zu erheben. Die Erhebung der Ecken erreicht bei ungefähr $c = \frac{a}{3}$ ihren größten Wert und nimmt, wenn die Auflagerpunkte weiter gegen die Ecken verschoben werden, wieder auf den Wert Null $\left(\text{für } c = \frac{a}{2}\right)$ ab [1].

In ähnlicher Weise und in nur unwesentlich veränderter Rechnung wird sich die Veränderung der Plattengestalt verfolgen lassen, wenn der Rand des Quadrates oder Rechteckes nicht in einzelnen Punkten, sondern, wie dies bei den Versuchen von C. v. Bach und Graf [2] an Eisenbetonplatten beobachtet wurde, in stetiger Berührung mit einer elastisch nachgiebigen Unterlage auf einem kurzen Stück in den Seitenmitten aufruht [3]. 90

Allgemeine Theorie der Blattfeder.

Von **Y. TANAKA** in Tokio.

Die vorliegende Arbeit behandelt das Gleichgewicht der Blattfeder unter dem Einflusse einer schief angreifenden Last, wobei die Reibung und der Anfangsdruck zwischen den Platten, verschiedene Stärke und Gestalt der Platten und die Krümmung der Feder berücksichtigt werden. Mit der Theorie der Blattfeder beschäftigten sich schon Arbeiten von Redtenbacher [4], Castigliano [5], Marié [6], Loewe [7] usw., doch geben diese Arbeiten hinsichtlich der eben genannten Punkte nur wenig Resultate.

Die Blattfeder gehört zu den notwendigen Bestandteilen der Eisenbahnwagen und ist von großer Bedeutung für einen sichern und glatten Gang der Eisenbahnzüge. Es ist unumgänglich, ihr Verhalten und ihre Eigenschaften im wesentlichen zu kennen, um geeignete Konstruktionen und Verbesserungen der Federn angeben zu können. Die hier entwickelte Theorie der Blattfeder soll, wie ich hoffe, auch für diese Zwecke Neues und Wissenswertes bringen.

1. Grundlegende Gleichungen. Gewöhnlich besteht die Blattfeder aus federnden Platten von verschiedener Anfangskrümmung, so daß diese einander nur an ihren äußeren Enden berühren und an der Verbindungsstelle nur dann, wenn sie hier aneinander gepreßt werden. Jedenfalls gilt (Abb. 1):

$$ {}_{m-1}\delta_m = {}_{m-1}\delta_{m-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1) $$

und, falls die Platten zu Beginn ohne Zwischenraum aneinander liegen, auch:

$$ y_m \leq y_{m-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2), $$

wobei ${}_{m-1}\delta_m$ und ${}_{m-1}\delta_{m-1}$ die Ausbiegungen für $x = a_{m-1}$ bezeichnen und y_m sowie y_{m-1} die Ausbiegungen für einen beliebigen Punkt x zweier aufeinander folgender Platten B_m und B_{m-1}, die durch eine Last P hervorgerufen werden (vergl. Abb. 1).

---

[1] Hiernach werden die Eckzipfel einer in den Seitenmitten unterstützten quadratischen Platte unter der Last ihres eigenen Gewichtes herabhängen. Dieses Ergebnis gilt nur für dicke Platten. Wenn die Dicke vermindert wird, hört die ursprüngliche Gleichgewichtslage bald auf stabil zu sein und die Platte biegt sich nach einer von dieser verschiedenen, mit den vier Unterstützungspunkten verträglichen Gleichgewichtsform durch. Der Versuch mit einem Bogen steifen Papiers von passender Größe lehrt, wenn man den Bogen durch vier in einer wagerechten Ebene gelegene Punkte in den Seitenmitten unterstützt, daß sich die Deformation gar nicht symmetrisch in den vier Quadranten des Rechteckes vollzieht. Der Bogen krümmt sich unter seinem Eigengewicht nach einer Zylinderfläche, deren Erzeugende parallel zur einen Diagonalen des Rechtecks verlaufen.

[2] Heft 30 der Veröff. d. deutschen Ausschusses f. Eisenbeton, Berlin 1915.

[3] Es ist vielleicht erwähnenswert, daß die Stelle der größten Inanspruchnahme von einer derart unterstützten rechteckigen Platte über den Auflagern liegt, wenn die Strecken, in denen die Platte auf der Unterlage aufliegt, kürzer als ein gewisses Maß ist.

[4] F. Redtenbacher, Die Gesetze des Lokomotivbaus. Mannheim 1855.

[5] A. Castigliano, Theorie der Biegungs- und Torsions-Federn. Wien 1888.

[6] G. Marié, Les dénivellations de la voie et les oscillations du matériel des chemins de fer. Paris 1906.

[7] Automobiltechnische Bibliothek VI 2. Berlin 1918.

Ist aber zu Anfang zwischen den Platten m und $m-1$ an der Stelle x der Zwischenraum s_m vorhanden, so gilt anstatt (2) die Gleichung:

$$s_m \geqq y_m - y_{m-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

wobei für $x = 0$ und $x = a_{m-1}$ natürlich $s_m = 0$ zu setzen ist.

Wir wollen im folgenden nachstehende Bezeichnungen verwenden:

B_m bezeichne die m-te Platte einer Feder, wobei die kürzeste Platte als die erste angenommen werde.

M_m, M_m' seien die Biegungsmomente in B_m.

P sei die am Ende der längsten Platte B_n angreifende statische Last.

X_m sei der zwischen B_{m+1} und B_m in vertikaler Richtung wirkende Druck.

p_0 bezeichne den als konstant vorausgesetzten Anfangsdruck zwischen den Platten.

μ bezeichne den als konstant vorausgesetzten Reibungskoeffizienten zwischen den Platten.

η_m sei die Gestalt der neutralen Linie von B_m vor der Belastung.

y_m, y_m' seien die Deformationen von η_m unter der Einwirkung von P.

f_0 sei die Pfeilhöhe von B_n vor der Belastung.

f_n, f_{n-1} die Pfeilhöhen von B_n und B_{n-1} nach der Belastung.

e kleiner Abstand des Angriffspunktes der Last P von der neutralen Linie von B_n, gemessen am Ende von B_n.

ψ Neigungswinkel der schief angreifenden Last gegen die Vertikale, wobei $0 \leqq \psi \leqq 90^0$.

ϑ_{n-1} Neigungswinkel zwischen B_n und B_{n-1} in den Berührungspunkten dieser Platten nach der Belastung; von diesem soll angenommen werden, daß er den Wert von etwa 8^0 nicht übersteigt, so daß man $\sin \vartheta_{n-1}$ und $\operatorname{tg} \vartheta_{n-1}$ durch ϑ_{n-1} ersetzen und $\cos \vartheta_{n-1} = 1$ setzen darf.

t_m Stärke von B_m.

a_m effektive Länge von B_m.

I_m, I_m' Trägheitsmomente von B_m.

E Elastizitätsmodul des Materials bei Normalspannung.

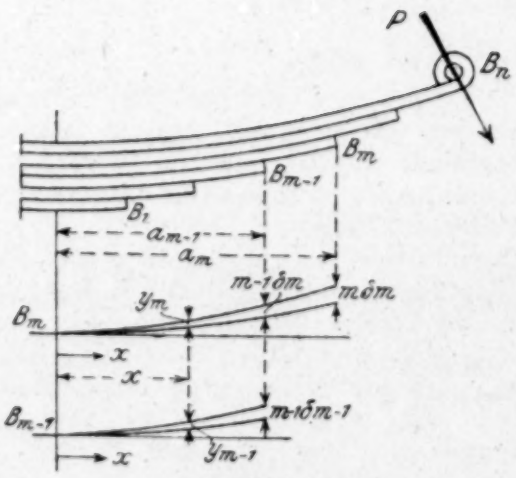


Abb. 1

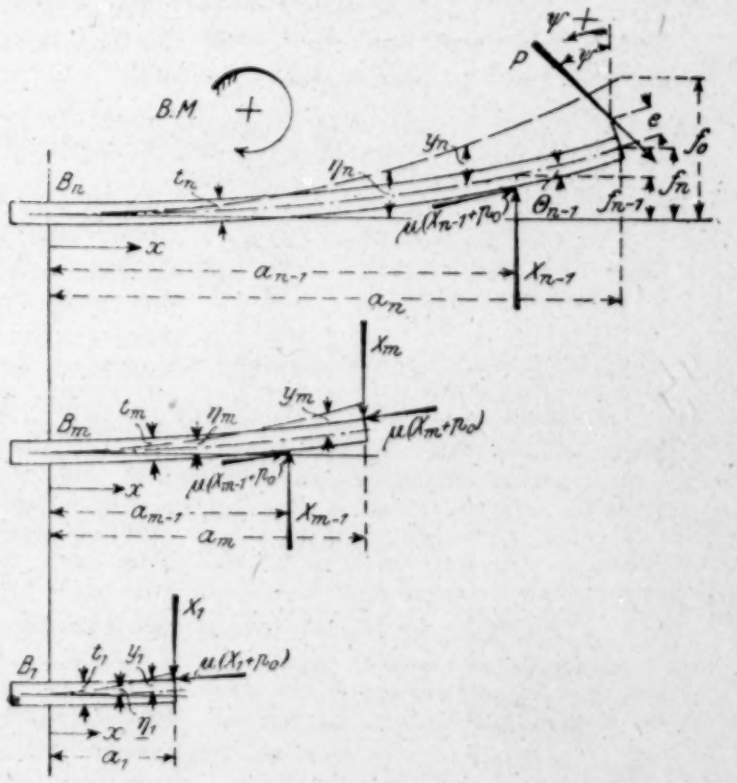


Abb. 2

Man kann dann (vgl. Abb. 2) nach der unter Einfluß von P erfolgten Ausdehnung der Feder für die Biegungsmomente B_n und B_m die folgenden Ausdrücke anschreiben:

Für B_n und $0 \leqq x \leqq a_m-1$

$$\left.\begin{aligned} M_n &= \{(a_n - x)\cos\psi + (f_n + e - \eta_n + y_n)\sin\psi\} P \\ &\quad - (a_{n-1} - x) X_{n-1} - \mu \left\{(a_{n-1} - x)\,\vartheta_{n-1} - \left(f_{n-1} - \frac{t_n}{2} - \eta_n + y_n\right)\right\}(X_{n-1} + p_0) \\ &\text{für } a_{n-1} \leqq x \leqq a_n \\ M_n' &= \{(a_n - x)\cos\psi + (f_n + e - \eta_n + y_n)\sin\psi\} P \end{aligned}\right\} \quad (4).$$

Für B_m und $0 \leqq x \leqq a_{m-1}$

$$\left.\begin{aligned} M_m &= (a_m - x) X_m - (a_{m-1} - x) X_{m-1} - \frac{1}{2}\mu t_m (X_m + X_{m-1} + 2p_0) \\ &\text{und für } a_{m-1} \leqq x \leqq a_m \\ M_m' &= (a_m - x) X_m - \frac{1}{2}\mu t_m (X_m + p_0) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (5).$$

In den Gleichungen (5) wurde die Wirkung der Plattenkrümmung vernachlässigt. Dies ist praktisch tatsächlich meist erlaubt, denn in den praktisch vorkommenden Fällen ist für die längeren Platten X_m und X_{m-1} fast gleich groß und für die kürzeren Platten ist der Einfluß der Plattenkrümmung sehr klein.

Wenn man annimmt, daß für die Deformation der Platte die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

gilt, so ist:

Für B_m und $0 \leqq x \leqq a_{m-1}$

$$y_m = \frac{1}{E}\int_0^x dx \int_0^x \frac{M_m}{I_m}\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und für $a_{m-1} \leqq x \leqq a_m$

$$y_m' = \frac{1}{E}\left\{\int_0^x dx \int_0^x \frac{M_m'}{I_m}\,dx + \int_0^{a_{m-1}} dx \int_0^x \frac{(M_m - M_m')}{I_m}\,dx + (x - a_{m-1})\int_0^{a_{m-1}} \frac{(M_m - M_m')}{I_m}\,dx\right\}. \quad (7);$$

aus (6) können wir ${}_{m-1}\delta_m = (y_m)_{x=a_{m-1}}$ bestimmen und aus (7) ergibt sich ebenso ${}_{m-1}\delta_{m-1} = (y_{m-1}')_{x=a_{m-1}}$ und nach (1) gelten die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n P - \beta_n X_{n-1} + \gamma_n X_{n-2} &= -\zeta_n p_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots \\ \alpha_n X_m - \beta_m X_{m-1} + \gamma_m X_{m-2} &= -\zeta_m p_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots \\ \alpha_2 X_2 - \beta_2 X_1 &= -\zeta_2 p_0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (8),$$

wobei wir mit α, β, γ und ζ gewisse als konstant annehmbare Faktoren bezeichnen. Aus (8) können $(n-1)$ der X bestimmt werden und wir können sodann die Spannungen, Ausbiegungen und das sonstige Verhalten der Feder angeben.

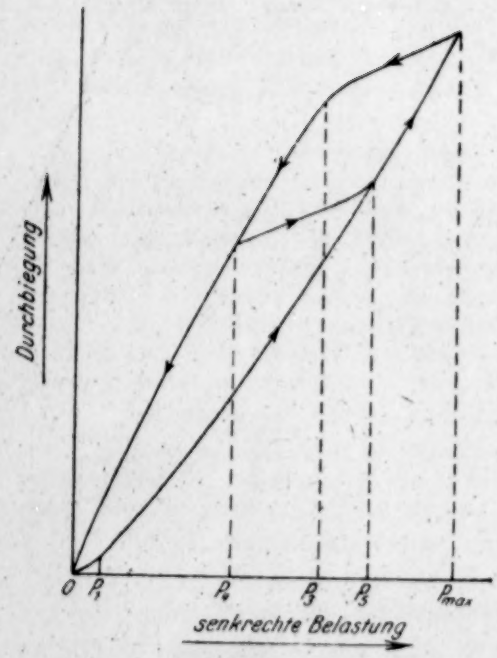


Abb. 3

Die durchgeführten Ueberlegungen galten für eine Feder mit sozusagen »zunehmender Belastung, aber wenn wir das Zeichen von μ umkehren, so gelten sie auch für »abnehmende« Belastung. Der Versuch bestätigt, daß die Ausbiegung einer Blattfeder sich ähnlich wie in Abb. 3 verhält und es gilt also für irgend eine Last zwischen $P_1 \rightarrow P_{max}$ (für »zunehmende« Belastung) oder zwischen $P_3 \rightarrow 0$ (für »abnehmende« Belastung) die vorstehende Theorie. Auch das Verhalten der Feder für Lasten zwischen $P_{max} \rightarrow P_3$ oder zwischen $P_4 \rightarrow P_5$ kann nach unserer Theorie angenähert bestimmt werden, wenn man nur sorgfältig die Wirkung der Reibung in Rechnung stellt, ebenso die Wirkung des Anfangsdruckes und schließlich den Sinn des Reibungswiderstandes.

2. Lösungen der Grundgleichungen. a) Deformation der längsten Platte B_n. — Wir wollen als ursprüngliche Gestalt von B_n vor der Belastung eine flache Parabel annehmen, deren Gleichung

$$\eta_n = \frac{f_0 x^2}{a_n^2}$$

sei, und wir setzen in erster Näherung

$$y_n = 0,\quad \eta_n = \frac{f_0 x^2}{a_n^2},\quad f_n = f_0,\quad f_{n-1} = \frac{f_0 a_{n-1}^2}{a_n^2} \quad \text{und} \quad \vartheta_{n-1} = \frac{2 f_0 a_{n-1}}{a_n^2},$$

dann schreibt sich (4):

$$\left.\begin{aligned} M_n &= \left\{(a_n - x)\cos\psi + \left(f_0 + e - \frac{f_0}{a_n^2}x^2\right)\sin\psi\right\} P \\ &- (a_{n-1} - x) X_{n-1} - \mu\left\{\frac{2 f_0 a_{n-1}}{a_n^2}(a_{n-1} - x) - \left(\frac{f_0 a_{n-1}^2}{a_n^2} - \frac{t_n}{2} - \frac{f_0 x^2}{a_n^2}\right)\right\}(X_{n-1} + p_0) \\ \text{und} \\ M_n' &= \left\{(a_n - x)\cos\psi + \left(f_0 + e - \frac{f_0}{a_n^2}x^2\right)\sin\psi\right\} P \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Wenn das Trägheitsmoment von B_n konstant ist, so entnimmt man aus (6) und (9) für $0 \leq x \leq a_{n-1}$

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{x^2}{6 E I_n}\left[\left\{(3 a_n - x)\cos\psi + \left(3(e + f_0) - \frac{f_0 x^2}{2 a_n^2}\right)\sin\psi\right\} P\right. \\ &\left. - (3 a_{n-1} - x) X_{n-1} - \frac{1}{2}\mu\left\{3 t_n + \frac{f_0}{a_n^2}(6 a_{n-1}^2 - 4 a_{n-1} x + x^2)\right\}(X_{n-1} + p_0)\right] \quad (10) \end{aligned}$$

und

$$ {}_{n-1}\delta_n = (y_n)_{x = a_{n-1}} = \frac{1}{6 E I_n}(A_n P - B_n X_{n-1} - C_n p_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

wobei

$$\begin{aligned} A_n &= \left[(3 a_n - a_{n-1})\cos\psi + \left\{3 e + \frac{f_0}{2 a_n^2}(6 a_n^2 - a_{n-1}^2)\right\}\sin\psi\right] a_{n-1}^2, \\ B_n &= \left\{2 a_{n-1} + \frac{3}{2}\mu\left(t_n + \frac{f_0 a_{n-1}^2}{a_n^2}\right)\right\} a_{n-1}^2, \\ C_n &= \frac{3}{2}\mu\left(t_n + \frac{f_0 a_{n-1}^2}{a_n^2}\right) a_{n-1}^2 \end{aligned}$$

und ebenso aus (7) und (9) für $a_{n-1} \leq x \leq a_n$

$$\begin{aligned} y_n' &= \frac{1}{6 E I_n}\left[\left\{(3 a_n - x) x^2 \cos\psi + \left(3(f_0 + e) - \frac{f_0 x^2}{2 a_n^2}\right) x^2 \sin\psi\right\} P\right. \\ &\left. - (3 x - a_{n-1}) a_{n-1}^2 X_{n-1} - \frac{1}{2}\mu\left\{3 t_n a_{n-1}(2 x - a_{n-1}) + \frac{f_0 a_{n-1}^3}{a_n^2}(4 x - a_{n-1})\right\}(X_{n-1} + p_0)\right] \quad (12) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} {}_n\delta_n = (y_n')_{x = a_n} &= \frac{1}{6 E I_n}\left[\left\{2 a_n^3 \cos\psi + \left(3 e + \frac{5}{2} f_0\right) a_n^2 \sin\psi\right\} P - 3 (a_n - a_{n-1}) a_{n-1}^2 X_{n-1}\right. \\ &\left. - \frac{1}{2}\mu\left\{3 t_n (2 a_n - a_{n-1}) a_{n-1} + \frac{f_0 a_{n-1}^3}{a_n^2}(4 a_n - a_{n-1})\right\}(X_{n-1} + p_0)\right] \quad (13). \end{aligned}$$

Wenn $P\cos\psi$ und X_{n-1} nahezu gleich sind, so bilden die hauptsächlichen auf B_n wirkenden äußeren Kräfte nahezu ein Kräftepaar, so daß y_n ungefähr die Gestalt einer Parabel haben wird und wenn n (die Anzahl der Platten) hinlänglich groß ist, werden diese Ueberlegungen tatsächlich anwendbar sein.

Kennt man also in erster Näherung f_n (oder $f_0 - {}_n\delta_n$), so erhält man genauere Gleichungen für y_n und ${}_{n-1}\delta_n$, wenn man in die erste Näherungsgleichung f_n an Stelle von f_0 einsetzt.

b) Deformation einer beliebigen anderen Platte als B_n. — In der Praxis haben die Federplatten mit Ausnahme von B_n eine Gestalt, wie Abb. 4 sie zeigt (oder aber wir wollen annehmen, daß sie eine solche haben). Dabei besitzt B_m für $0 \leq x \leq a_{m-1}$ ein

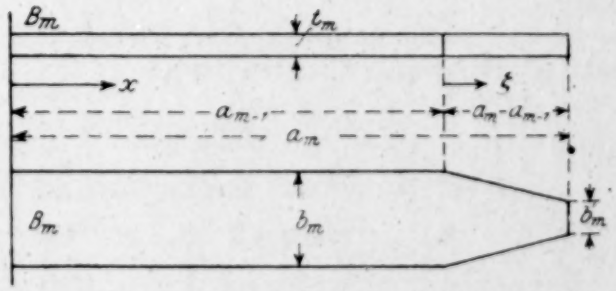


Abb. 4

konstantes Trägheitsmoment I_m, aber für $a_{m-1} \leqq x \leqq a_m$ kann das Trägheitsmoment variabel sein:

$$I_m' = I_m (1 - k_m \xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

wobei

$$I_m = \frac{b_m t_m^3}{12}, \quad \xi = (x - a_{m-1}), \quad k_m = \frac{(b_m - b_m')}{b_m (a_m - a_{m-1})} = \frac{(1-\lambda_m)}{\Delta a_m}, \quad \Delta a_m = (a_m - a_{m-1})$$

und

$$\lambda_m = \frac{b_m'}{b_m}.$$

Daher drückt sich die Deformation von B_m folgendermaßen aus:
Für $0 \leqq x \leqq a_{m-1}$ nach (5) und (6)

$$y_m = \frac{x^2}{6 E I_m'} \left\{ (3 a_m - x) X_m - (3 a_{m-1} - x) X_{m-1} - \frac{3}{2} \mu t_m (X_m + X_{m-1} + 2 p_0) \right\} \quad (15)$$

und

$$_{m-1}\delta_m = (y_m)_{x = a_{m-1}} = \frac{1}{6 E I_m} (A_m X_m - B_m X_{m-1} - C_m p_0) \quad . \quad . \quad . \quad (16),$$

wobei

$$A_m = \left(3 a_m - a_{m-1} - \frac{3}{2} \mu t_m\right) a_{m-1}^2,$$

$$B_m = \left(2 a_{m-1} + \frac{3}{2} \mu t_m\right) a_{m-1}^2,$$

$$C_m = 3 \mu t_m a_{m-1}^2$$

und für $a_{m-1} \leqq x \leqq a_m$ nach (5) und (7)

$$y_m' = \frac{1}{6 E I_m} \left[(3 a_m - x) x^2 X_m - (3 x - a_{m-1}) a_{m-1}^2 X_{m-1} - \frac{3}{2} \mu t_m \left\{ (X_m + p_0) x^2 \right.\right.$$
$$\left.\left. + (2 x - a_{m-1}) a_{m-1} (X_{m-1} + p_0) \right\} + 6 R_m \right] \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Dabei ist R_m ein Korrektionsglied hinsichtlich der Wirkung des variablen Trägheitsmomentes I_m' (ist I_m' konstant, so ist $R_m = 0$) und es ist:

$$R_m = \frac{1}{k_m^2} \left\{ \left(\Delta a_m - \frac{1}{k_m} - \frac{1}{2} \mu t_m \right) X_m - \frac{1}{2} \mu t_m p_0 \right\} \left\{ (1 - k_m \xi) \ln (1 - k_m \xi) \right.$$
$$\left. + k_m \xi - \frac{1}{2} k_m^2 \xi^2 \right\} + \frac{1}{6} X_m \xi^3$$

und

$$_m\delta_m = (y_m')_{x = a_m} = \frac{1}{6 E I_m} (A_m' X_m - B_m' X_{m-1} - C_m' p_0) \quad . \quad . \quad . \quad (18),$$

wobei

$$A_m' = \left(2 a_m - \frac{3}{2} \mu t_m\right) a_m^2 + 6 F_m,$$

$$B_m' = (3 a_m - a_{m-1}) a_{m-1}^2 + \frac{3}{2} \mu t_m (2 a_m - a_{m-1}) a_{m-1},$$

$$C_m' = \frac{3}{2} \mu t_m \{(a_m + a_{m-1})^2 - 2 a_{m-1}^2\} + 6 N_m,$$

und

$$F_m = \frac{-\Delta a_m^2}{(1-\lambda_m)^2} \left\{ \frac{\lambda_m \Delta a_m}{(1-\lambda_m)} + \frac{1}{2} \mu t_m \right\} \left\{ \lambda_m \ln \lambda_m + (1 - \lambda_m) - \frac{1}{2} (1 - \lambda_m)^2 \right\} + \frac{1}{6} \Delta a_m^3,$$

$$N_m = \frac{1}{2} \mu t_m \frac{\Delta a_m^2}{(1-\lambda_m)^2} \left\{ \lambda_m \ln \lambda_m + (1 - \lambda_m) - \frac{1}{2} (1 - \lambda_m)^2 \right\},$$

$$\Delta a_m = (a_m - a_{m-1}), \quad \lambda_m = \frac{b_m'}{b_m}$$

c) Bestimmung der zur Berechnung der X erforderlichen Koeffizienten. — Setzt man $_{m-1}\delta_m = {}_{m-1}\delta_{m-1}$, so ist

$$\frac{A_m}{I_m} X_m - \left(\frac{B_m}{I_m} + \frac{A_{m-1}'}{I_{m-1}} \right) X_{m-1} + \frac{B_{m-1}'}{I_{m-1}} X_{m-2} = \left(\frac{C_m}{I_m} - \frac{C_{m-1}'}{I_{m-1}} \right) p_0 \quad . \quad . \quad (19).$$

Daher lauten die Koeffizienten in (8) folgendermaßen:

$$\alpha_m = \frac{A_m}{I_m}, \quad \beta_m = \frac{B_m}{I_m} + \frac{A_{m-1}'}{I_{m-1}}, \quad \gamma_m = \frac{B_{m-1}'}{I_{m-1}}, \quad \zeta_m = -\left(\frac{C_m}{I_m} - \frac{C_{m-1}'}{I_{m-1}} \right).$$

Beachtet man nun, daß die A_n, B_n und C_n die besondern durch (11) gegebenen Werte besitzen, so hat man

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{1}{I_n}\left\{(3a_n - a_{n-1})\,a_{n-1}^2\cos\psi + \left(3e + \frac{f_0}{2a_n^2}(6a_n^2 - a_{n-1}^2)\right)a_{n-1}^2\sin\psi\right\},\\
\beta_n &= \frac{1}{I_n}\left\{2a_{n-1}^3 + \frac{3}{2}\mu\left(t_n + \frac{f_0 a_{n-1}^2}{a_n^2}\right)a_{n-1}^2\right\} + \frac{1}{I_{n-1}}\left\{2a_{n-1}^3 - \frac{3}{2}t_{n-1}a_{n-1}^2 + 6F_{n-1}\right\},\\
\gamma_n &= \frac{1}{I_{n-1}}\left\{(3a_{n-1} - a_{n-2})\,a_{n-2}^2 + \frac{3}{2}\mu t_{n-1}(2a_{n-1} - a_{n-2})a_{n-2}\right\},\\
\zeta_n &= \frac{-1}{I_n}\left\{\frac{3}{2}\mu t_n a_{n-1}^2 + \frac{f_0 a_{n-1}^4}{a_n^2}\right) + \frac{1}{I_{n-1}}\left\{\frac{3}{2}\mu t_{n-1}\{(a_{n-1}+a_{n-2})^2 - 2a_{n-2}^2\} + 6N_{n-1}\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

und

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_m &= \frac{1}{I_m}\left\{(3a_m - a_{m-1})\,a_{m-1}^2 - \frac{3}{2}\mu t_m a_{m-1}^2\right\},\\
\beta_m &= \frac{1}{I_m}\left\{2a_{m-1}^3 + \frac{3}{2}\mu t_m a_{m-1}^2\right\} + \frac{1}{I_{m-1}}\left\{2a_{m-1}^3 - \frac{3}{2}\mu t_{m-1}a_{m-1}^2 + 6F_{m-1}\right\}\\
\gamma_m &= \frac{1}{I_m}\left\{(3a_{m-1} - a_{m-2})\,a_{m-2}^2 + \frac{3}{2}\mu t_{m-1}(2a_{m-1} - a_{m-2})\,a_{m-2}\right\},\\
\zeta_m &= \frac{-1}{I_m}\{3\mu t_m a_{m-1}^2\} + \frac{1}{I_{m-1}}\left\{\frac{3}{2}\mu t_{m-1}\{(a_{m-1} + a_{m-2})^2 - 2a_{m-2}^2\} + 6N_{m-1}\right\},
\end{aligned}\right\}$$

wobei:

$$F_{m-1} = \frac{-\Delta a_{m-1}^2}{(1-\lambda_{m-1})^2}\left\{\frac{\lambda_{m-1}\Delta a_{m-1}}{(1-\lambda_{m-1})} + \frac{1}{2}\mu t_{m-1}\right\}\left\{\lambda_{m-1}\ln\lambda_{m-1} + (1-\lambda_{m-1}) - \frac{1}{2}(1-\lambda_{m-1})^2\right\} + \frac{1}{6}\Delta a_{m-1}^3,$$

$$N_{m-1} = \frac{1}{2}\mu t_{m-1}\frac{\Delta a_{m-1}^2}{(1-\lambda_{m-1})^2}\left\{\lambda_{m-1}\ln\lambda_{m-1} + (1-\lambda_{m-1}) - \frac{1}{2}(1-\lambda_{m-1})^2\right\},$$

dabei durchläuft m die Werte $2, 3 \ldots n$ und es ist selbstverständlich $F_{m-1} = 0$, $N_{m-1} = 0$ für $\lambda_{m-1} = 1$.

3. Anwendungen und numerische Beispiele. I. Anwendung. Bestimmung des Koeffizienten des Reibungswiderstandes einer Blattfeder. — Nach (13) kann man im allgemeinen setzen:

$$\varkappa = \mp\frac{\frac{1}{2}\mu\left\{3t_n(2a_n - a_{n-1})\,a_{n-1} + \frac{f_n a_{n-1}^3}{a_n^2}(4a_n - a_{n-1})(X_{n-1} + p_0)\right\}}{\left\{2a_n^3\cos\psi + \left(3e + \frac{5}{2}f_n\right)a_n^2\sin\psi\right\}P - (3a_n - a_{n-1})\,a_{n-1}^2 X_{n-1}} \quad\ldots\quad(21),$$

wobei $\varkappa$ = Koeffizient des Reibungswiderstandes

$$= \frac{\text{Aenderung der Ausbiegung infolge der Reibung}}{\text{Ausbiegung ohne Reibung}}.$$

Das obere Zeichen gilt für den Fall »zunehmender« Belastung, das untere für »abnehmende«. Wenn also:

$$a_n = na, \quad a_{n-1} = (n-1)a \text{ und } X_{n-1} = P,$$

so kann man schreiben:

$$\varkappa = \mp\frac{\frac{1}{2}\mu\left\{3t_n(n^2-1) + \frac{f_n}{n^2}(n-1)^3(3n+1)\right\}\left(1 + \frac{p_0}{P}\right)}{a\left\{2n^3\cos\psi + \left(3e + \frac{5}{2}f_n\right)n^2\sin\psi - (2n+1)(n-1)^2\right\}} \quad\ldots\quad(22)$$

und wenn $\psi = 0$, d. h. P vertikal wirkt, so wird

$$\varkappa = \mp\frac{\frac{1}{2}\mu\left\{3t_n(n^2-1) + \frac{f_n}{n^2}(n-1)^3(3n+1)\right\}\left(1 + \frac{p_0}{P}\right)}{a\{2n^3 - (2n+1)(n-1)^2\}},$$

wenn n hinlänglich groß ist, für die Praxis genügt auch die Formel:

$$\varkappa = \mp\frac{\mu}{2a}\left\{t_n + f_n\left(1 - \frac{8}{3n}\right)\right\}\left(1 + \frac{p_0}{P}\right) \quad\ldots\quad(23).$$

I. Numerisches Beispiel. — $\varkappa$ ist zu berechnen für eine Feder, bei der $t_n = 13$ mm, $a = 30$ mm, $n = 14$, $\psi = 0$, $\mu = 0{,}30$; aus (23) ergibt sich

$$\varkappa = \mp \frac{0{,}30}{2 \cdot 30} \left\{ 13 + f_n \left(1 - \frac{8}{3 \cdot 14} \right) \right\} \left(1 + \frac{p_0}{P} \right) = \mp \frac{1}{200} (13 + 0{,}810 f_n) \left(1 + \frac{p_0}{P} \right).$$

Wenn wir unter gewissen Bedingungen die Gültigkeit der folgenden Beziehungen annehmen:

für	$P =$	p	$2p$	$3p$	$4p$	$5p$	
	$\left(1 + \frac{p_0}{P}\right) =$	1,50	1,25	1,17	1,13	1,10	
und	$f_n =$	30	24	18	12	6	mm,
so erhalten wir:							
	$\lvert\varkappa\rvert =$	0,280	0,203	0,161	0,128	0,098.	

II. Numerisches Beispiel: $\varkappa$ zu bestimmen für eine Feder, bei der $t_n = 9{,}5$ mm, $a = 60$ mm, $n = 7$, $\psi = 0$, $\mu = 0{,}45$ (Fall 1) resp. $\mu = 0{,}31$ (Fall 2) — Nach (23) ergibt sich für Fall 1:

$$\varkappa = \mp \frac{0{,}45}{2 \cdot 60} \left\{ 9{,}5 + f_n \left(1 - \frac{8}{3 \cdot 7} \right) \right\} \left(1 + \frac{p_0}{P} \right) = \mp \frac{1}{267} (9{,}5 + 0{,}619 f_n) \left(1 + \frac{p_0}{P} \right),$$

und für Fall 2:

$$\varkappa = \mp \frac{0{,}31}{2 \cdot 60} \left\{ 9{,}5 + f_n \left(1 - \frac{8}{3 \cdot 7} \right) \right\} \left(1 + \frac{p_0}{P} \right) = \mp \frac{1}{387} (9{,}5 + 0{,}619 f_n) \left(1 + \frac{p_0}{P} \right).$$

Wenn wir unter gewissen Bedingungen die Gültigkeit der folgenden Beziehungen annehmen:

für	$P =$	p	$2p$	$3p$	$4p$	$5p$	$6p$	$7p$	
	$\left(1 + \frac{p_0}{P}\right) =$	1,35	1,18	1,12	1,09	1,07	1,06	1,05	
und	$f_n =$	76	70	64	58	52	46	40	mm,
so ergibt sich:									
Fall 1:	$\lvert\varkappa\rvert =$	0,286	0,234	0,207	0,185	0,167	0,149	0,135	
Fall 2:	$\lvert\varkappa\rvert =$	0,197	0,162	0,143	0,128	0,115	0,104	0,093.	

Herr Fukushima in Tokio hat Versuche über die Deformation einiger Blattfedern angestellt und einige seiner Deformationsdiagramme wurden in seiner Dissertation[1]) veröffentlicht. Von diesen Diagrammen, die sich auf dieselben Federn beziehen, für die wir eben $|\varkappa|$ berechnet haben, entnehme ich die folgenden Werte von $|\varkappa|$:

Für die Feder in unserem I. Beispiele,

$\lvert\varkappa\rvert =$	0,24	0,20	0,175	0,11	0,08 bezw.

und für die Feder in unserem II. Beispiele,

Fall 1:	$\lvert\varkappa\rvert =$	0,28	0,23	0,19	0,16	0,17	0,17	0,14
Fall 2:	$\lvert\varkappa\rvert =$	—	0,16	0,15	0,13	0,12	0,12	0,09 bezw.

(vergl. Abb. 5 und 6).

Natürlich können wir in den vorliegenden Fällen nicht die tatsächlichen Werte von $\frac{p_0}{P}$ und μ für die geprüften Federn angeben, aber die Uebereinstimmung der errechneten charakteristischen Werte von $\varkappa$ mit den experimentell gefundenen scheint immerhin bemerkenswert.

G. Marié hat seinerzeit für den Koeffizienten des Reibungswiderstandes einer Blattfeder die Formel $f = \frac{2\varphi(n-1)c}{l}$ gegeben[2]) (oder nach unserer Bezeichnungsweise: $\varkappa = \frac{\mu(n-1)t}{na}$). Nach dieser Formel wäre $\varkappa$ für ein vorgegebenes μ konstant, unabhängig

[1]) »Tetsudosharyo Doyogairon« (Allgemeine Theorie der schwingenden Bewegung der Eisenbahnwagen). Tokio 1918.

[2]) G. Marié, Les dénivellations de la voie et les oscillations du matériel des chemins de fer. Paris 1906.

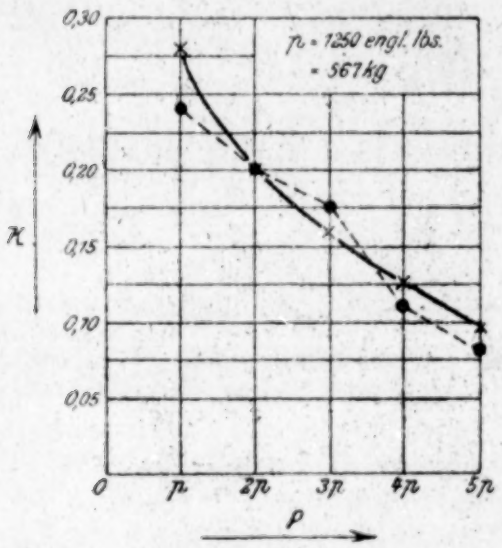


Abb. 5

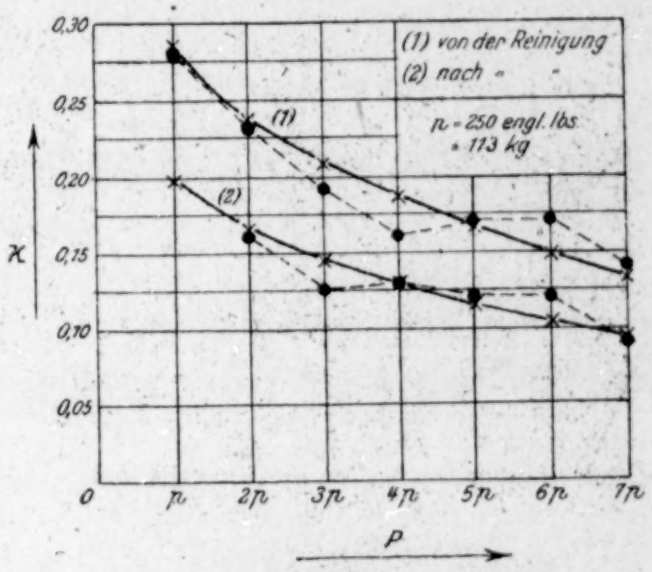


Abb. 6

von der Größe der Belastung. Im Gegensatz dazu zeigt der Versuch deutlich die Abhängigkeit des Koeffizienten $\varkappa$ von der Größe der Belastung, welche Abhängigkeit, soweit ich unterrichtet bin, bis jetzt noch nicht näher untersucht worden ist.

II. Anwendung. Die Koeffizienten der Gleichungen für die X sind zu bestimmen, wenn für jede einzelne Federplatte eine konstante Stärke, konstante Gestalt (mit Ausnahme von B_n) und konstante Längendifferenz angenommen wird. — Wir können dann setzen:

$$t_n = t_m = t, \quad a_m = ma, \quad \Delta a_m = (a_m - a_{m-1}) = a, \quad \lambda_m = \lambda,$$

und für die Koeffizienten α, β, γ und ζ ergeben sich aus (20) die folgenden einfacheren Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_n' &= (2n+1)(n-1)^2\cos\psi + \frac{1}{a}\left\{3e + \frac{f_0}{2n^2}\{6n^2-(n-1)^2\}\right\}(n-1)^2\sin\psi,\\
\beta_n' &= 4(n-1)^3 + \frac{3}{2}\mu\frac{f_0(n-1)^4}{an^2} + 6F',\\
\gamma_n' &= (2n-1)(n-2)^2 + \frac{3}{2}\mu\frac{t}{a}n(n-2),\\
\zeta_n' &= -\frac{3}{2}\frac{\mu}{a}\left\{\frac{f_0(n-1)^4}{n^2} - tn(n-2)\right\} + 6N',\\
\alpha_m' &= (2m+1)(m-1)^2 - \frac{3}{2}\mu\frac{t}{a}(m-1)^2,\\
\beta_m' &= 4(m-1)^3 + 6F',\\
\gamma_m' &= (2m-1)(m-2)^2 + \frac{3}{2}\mu\frac{t}{a}m(m-2),\\
\zeta_m' &= -\frac{3}{2}\mu\frac{t}{a} + 6N',
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

wobei:

$$F' = \frac{-1}{(1-\lambda)^2}\left\{\frac{\lambda}{(1-\lambda)} + \frac{1}{2}\mu\frac{t}{a}\right\}\left\{\lambda\ln\lambda + (1-\lambda) - \frac{1}{2}(1-\lambda)^2\right\} + \frac{1}{6},$$

$$N' = \frac{1}{2}\mu\frac{t}{a}\frac{1}{(1-\lambda)^2}\left\{\lambda\ln\lambda + (1-\lambda) - \frac{1}{2}(1-\lambda)^2\right\}.$$

III. Numerisches Beispiel. Die X sind zu bestimmen bei Einwirkung einer Maximallast P für folgende Feder: $n = 6$, $t = 13$ mm, $a = 80$ mm, $\mu = 0{,}30$, $e = \frac{t}{2}$ $\lambda = \frac{b'}{b} = \frac{1}{8}$, $\psi = 45^0$, $f_n = 20$ mm für P_{max} — Die zu bestimmenden X ergeben sich aus den folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha_6' P_{max} - \beta_6' X_5 + \gamma_6' X_4 &= -\zeta_6' p_0 \\
\alpha_5' X_5 - \beta_5' X_4 + \gamma_5' X_3 &= -\zeta_5' p_0 \\
\alpha_4' X_4 - \beta_4' X_3 + \gamma_4' X_2 &= -\zeta_4' p_0 \\
\alpha_3' X_3 - \beta_3' X_2 + \gamma_3' X_1 &= -\zeta_3' p_0 \\
\alpha_2' X_2 - \beta_2' X_1 &= -\zeta_2' p_0.
\end{aligned}$$

Und die Koeffizienten ergeben sich aus (24) (wenn man $f_0 = f_n = 20$ mm setzt), wie folgt:

$\alpha_6' = 245{,}9$	$\alpha_5' = 174{,}8$	$\alpha_4' = 80{,}3$	$\alpha_3' = 27{,}7$	$\alpha_2' = 4{,}99$
$\beta_6' = 502{,}7$	$\beta_5' = 256{,}7$	$\beta_4' = 108{,}7$	$\beta_3' = 32{,}7$	$\beta_2' = 4{,}70$
$\gamma_6' = 177{,}8$	$\gamma_5' = 82{,}1$	$\gamma_4' = 28{,}6$	$\gamma_3' = 5{,}2$	
$\zeta_6' = -0{,}154$	$\zeta_5' = 0{,}04$	$\zeta_4' = 0{,}04$	$\zeta_3' = 0{,}04$	$\zeta_2' = 0{,}04$.

(In diesem Falle ist $F' = 0{,}116$ und $N' = 0{,}007$.) Also können wir die Wirkung von p_0 bei der Berechnung der X vernachlässigen und die Auflösung der Gleichungen ergibt:

$$X_1 = 0{,}833\ P_{max} = 1{,}178\ V, \quad X_2 = 0{,}781\ P_{max} = 1{,}104\ V, \quad X_3 = 0{,}769\ P_{max} = 1{,}087\ V,$$
$$X_4 = 0{,}762\ P_{max} = 1{,}077\ V, \quad X_5 = 0{,}758\ P_{max} = 1{,}072\ V,$$

dabei ist $V = \frac{P_{max}}{\sqrt{2}}$ = Vertikalkomponente von P_{max}. Nimmt man in diesem Beispiele $\psi = 0$ und $f_n = 0$ an, so ist:

$$\alpha_6' = 325, \quad \beta_6' = 500{,}7, \quad \gamma_6' = 176 \text{ und } \zeta_6' = +\,1{,}76.$$

Die anderen Koeffizienten ändern sich nicht und wir haben:

$$X_1 = 1{,}104\ P_{max}, \quad X_2 = 1{,}040\ P_{max}, \quad X_3 = 1{,}020\ P_{max}, \quad X_4 = 1{,}010\ P_{max}, \quad X_5 = 1{,}005\ P_{max}$$

und für $\psi = 0$, $f_n = 0$, $\mu = 0$, $p_0 = 0$ ergibt sich:

$\alpha_6' = 325$	$\alpha_5' = 176$	$\alpha_4' = 81$	$\alpha_3' = 28$	$\alpha_2' = 5$
$\beta_6' = 500{,}7$	$\beta_5' = 256{,}7$	$\beta_4' = 108{,}7$	$\beta_3' = 32{,}7$	$\beta_2' = 4{,}74$
$\gamma_6' = 176$	$\gamma_5' = 81$	$\gamma_4' = 28$	$\gamma_3' = 5$	
$\zeta_6' = 0$	$\zeta_5' = 0$	$\zeta_4' = 0$	$\zeta_3' = 0$	$\zeta_2' = 0$,

(In diesem Falle ist $F' = 0{,}123$, $N' = 0$) und endlich

$$X_1 = 1{,}104\ P_{max}, \quad X_2 = 1{,}047\ P_{max}, \quad X_3 = 1{,}026\ P_{max}, \quad X_4 = 1{,}015\ P_{max}, \quad X_5 = 1{,}008\ P_{max}.$$

Aus diesen Rechnungsresultaten läßt sich entnehmen, daß der Einfluß der Reibung und des Anfangsdruckes zwischen den Platten auf die Größe des X für P_{max} sehr gering ist. Dagegen erscheint der Einfluß der trapezförmigen Enden der Federplatten und einer Schiefstellung der Last bemerkenswert. 141

Über Biegungsschwingungen stabförmiger Träger.

Von **W. KAUFMANN** in Hannover.

Während die Theorie der Schwingungen, wie überhaupt die Dynamik, im praktischen Maschinenbau verhältnismäßig weit ausgedehnte Anwendung gefunden hat, spielen in den theoretischen Untersuchungen, die der Bauingenieur zur Berechnung seiner Bauwerke auszuführen pflegt, dynamische Betrachtungen im allgemeinen nur eine untergeordnete Rolle. In Wirklichkeit sind dynamische Einflüsse natürlich vorhanden und sie können mitunter zu recht unliebsamen Erscheinungen führen. Außer bei den Hauptträgern eiserner Brücken, über deren dynamische Eigenschaften in der Literatur verschiedentlich berichtet ist[1]), treten auch im Ingenieurhochbau unter dem Einfluß von Arbeitsmaschinen, Laufkranen usw. Schwingungen einzelner Bauteile auf, die mitunter das auf statischem Wege ermittelte Spannungsbild nicht unwesentlich verändern können.

Für stabförmige, ebene Träger haben allein die Biegungs- oder Transversalschwingungen Bedeutung, während die Längsschwingungen praktisch ohne Belang sind, und Drehungsschwingungen nicht eintreten, solange nur Kräfte in der Trägerebene wirken, was hier vorausgesetzt wird.

[1]) Engesser, Zeitschr. d. Oesterr. Arch- und Ing.-Ver. 1892, S. 386, 671; Steiner, ebenda S. 388, 672; Lebert, Ann. des ponts et chaussées 1899, S 215—293; Reißner, Zeitschr. f. Bauwesen 1899, S. 477; 1903, S. 135; E. Pohlhausen, diese Zeitschr. 1, 1921, S. 28 bis 42.

1. Ansatz und allgemeine Lösung. Die Biegungsschwingungen des prismatischen Stabes in einer Hauptebene (Lastebene des Trägers) werden dargestellt durch die Bewegungsgleichung

$$\varrho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - E i^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

wenn ϱ die Materialdichte, E die Elastizitätsziffer, i den Trägheitsradius des Querschnitts in bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende zur Biegungsebene senkrechte Hauptachse bezeichnen[1]), und der von den Trägheitskräften der Drehung herrührende Beitrag vernachlässigt wird[2]).

Für die Folge wird angenommen, daß eine Ueberschreitung der Proportionalitätsgrenze, also auch der Gültigkeitsgrenze von (1), während der Schwingung nicht eintritt. Dann können — da sich Kräfte und Formänderungen einfach superponieren — die Schwingungsordinaten als Verrückungen von einer statischen Gleichgewichtslage aus betrachtet werden, wenn man unter den sie erzeugenden Kräften die Trägheitskräfte allein versteht.

Die allgemeine periodische Lösung der Gleichung (1) stellt sich, wie bekannt, als Summe von Gliedern der folgenden Form dar:

$$y = \sin(\beta t + \varphi)\,(A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + C \mathfrak{Sin}\, \alpha x + D \mathfrak{Cof}\, \alpha x) \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Hierin bezeichnet β die Schwingungsfrequenz und φ den Phasenverschiebungswinkel, während α mit β zusammenhängt durch die Beziehung:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\varrho \beta^2}{E i^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2'),$$

die man durch Einsetzen von (2) in (1) erhält.

Für die in (2) enthaltenen Konstanten A, B, C, D ergeben sich ebenso viele lineare, homogene Bestimmungsgleichungen aus den Grenz- und Gleichgewichtsbedingungen. Damit die Unbekannten dieses Gleichungssystems nicht sämtlich zu Null werden, muß die Nennerdeterminante verschwinden; diese Bedingung liefert eine transzendente Gleichung zur Berechnung der Werte α und damit der Schwingungsfrequenzen β, eine Gleichung, die ∞-viele Wurzeln für α, also auch ∞-viele Werte β ergibt. Das vollständige Integral der Schwingungsgleichung und damit der gesamte Schwingungsvorgang wird dargestellt durch Summation der ∞-vielen partikulären Integrale, in die der Reihe nach die gefundenen Werte für α und β einzusetzen sind, nachdem vorher die sämtlichen Integrationskonstanten A, B, C, D des partikulären Integrals vermöge der zwischen ihnen bestehenden linearen Gleichungen durch je eine ausgedrückt sind.

Ist dies geschehen, dann erscheint das partikuläre Integral für die $r$te Teilschwingung (die also der Frequenz β_r entspricht) in der Form

$$y_r = \sin(\beta_r t + \varphi_r)\, A_r\, \eta_r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Die Konstante A_r und der Phasenverschiebungswinkel φ_r können ermittelt werden, sobald die Anfangsverrückungen aus der Gleichgewichtslage und die Anfangsgeschwindigkeiten bekannt sind. Dann bestehen für A_r und φ_r zwei Beziehungen, die für Biegungsschwingungen in der Lastebene unter der Voraussetzung, daß an beiden Stabenden $x = 0$ und $x = l$ für jedes r die Ausdrücke $\eta_r \frac{\partial^3 \eta_r}{\partial x^3}$ und $\frac{\partial \eta_r}{\partial x} \frac{\partial^2 \eta_r}{\partial x^2}$ verschwinden, lauten:

$$A_r \sin \varphi_r = \frac{\int_0^l \eta\, y_0\, dx}{\int_0^l \eta_r^2\, dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4), \qquad A_r \cos \varphi_r = \frac{\int_0^l \eta_r v_0\, dx}{\beta_r \int_0^l \eta_r^2\, dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

wo y_0 die Verrückung und v_0 die Verrückungs-Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$. Die Gl. (4) und (5) ergeben sich, wenn man die Ansätze für y_0 und v_0:

$$y_0 = \sum_r A_r \sin \varphi_r\, \eta_r, \qquad v_0 = \sum_r \beta_r A_r \cos \varphi_r\, \eta_r$$

---

[1]) Théorie de l'élasticité de Clebsch tradult par de St. Venant, S. 473; G. Kirchhoff, Mechanik, S. 429. A. E. H. Love, Lehrb. d. Elastizität, Leipzig und Berlin 1907, deutsch von A. Timpe, Kptl. XX.

[2]) Ueber Beibehaltung dieses Gliedes vergl. Love, Lehrb. d. Elastizität, S. 493.

beiderseits mit η_s multipliziert, von 0 bis l integriert und beachtet, daß unter den getroffenen Annahmen die Integrale $\int_0^l \eta_r \eta_s dx$ zu Null werden müssen, wenn r und s verschiedene Zahlen sind. Mit Hilfe von (4) und (5) kann man für den einseitig eingespannten wie für den an seinen Enden gelagerten Balken den Schwingungsvorgang genau verfolgen.

2. Einseitig eingespannter Träger bei plötzlicher Entlastung. Ein einseitig eingespannter Träger (Kragträger) möge als Lastenaufzug dienen, und zwar soll an seinem freien Ende durch die Hebevorrichtung (Rolle oder dergl.) eine Kraft ausgeübt werden, deren senkrecht nach unten gerichtete Komponente P sei. Durch irgend einen Vorgang (Reißen des Seiles, Versagen der Sperrvorrichtung usw.) möge die Kraft P plötzlich entfernt werden. Es sollen die Biegungsschwingungen dargestellt werden, in welche der Träger dadurch versetzt wird. Das partikuläre Integral der Schwingungsgleichung lautet nach (2):

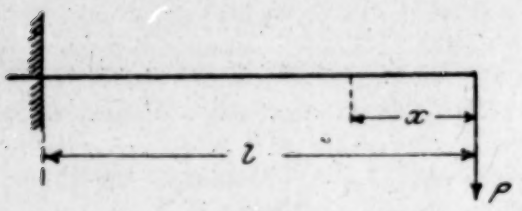


Abb. 1

$$y = \sin(\beta t + q)\,(A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + C \operatorname{Sin} \alpha x + D \operatorname{Cof} \alpha x).$$

Für die 4 Integrationskonstanten A, B, C, D stehen 4 Gleichungen zur Verfügung (Abb. 1):

a) für $x = 0$ ist $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ also $0 = -B + D$

b) » $x = 0$ » $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$ » $0 = -A + C$

c) » $x = l$ » $y = 0$ » $0 = A \sin \alpha l + B \cos \alpha l + C \operatorname{Sin} \alpha l + D \operatorname{Cof} \alpha l$

d) » $x = l$ » $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ » $0 = A \cos \alpha l - B \sin \alpha l + C \operatorname{Cof} \alpha l + D \operatorname{Sin} \alpha l$

Unter Beachtung von a) und b) liefern c) und d)

e) $A(\sin \alpha l + \operatorname{Sin} \alpha l) + B(\cos \alpha l + \operatorname{Cof} \alpha l) = 0$

f) $A(\cos \alpha l + \operatorname{Cof} \alpha l) - B(\sin \alpha l - \operatorname{Sin} \alpha l) = 0.$

Da A und B nicht gleichzeitig zu Null werden können, so muß die Nennerdeterminante der Gleichungen e) und f) zu Null werden, weshalb

$$\sin^2 \alpha l - \operatorname{Sin}^2 \alpha l + (\cos \alpha l + \operatorname{Cof} \alpha l)^2 = 0, \qquad \cos \alpha l \operatorname{Cof} \alpha l = -1 \quad . \quad . \quad \text{(I)}.$$

Bringt man die Kurven der Funktionen $y = \cos x$ und $y' = -\frac{1}{\operatorname{Cof} x}$ zum Schnitt (Abb. 2), so findet man mit für praktische Zwecke hinreichender Genauigkeit die Wurzeln der Gleichung (I). (Frequenzgleichung):

$$(\alpha l)_1 = 1{,}875; \quad (\alpha l)_2 = 4{,}694; \quad (\alpha l)_3 = \frac{5\pi}{2}; \quad (\alpha l)_4 = \frac{7\pi}{2}; \quad \ldots .$$

Damit wird

$$\beta_1 = \alpha_1^2 \sqrt{\frac{E i^2}{\varrho}} = \frac{3{,}516}{l^2} \sqrt{\frac{E i^2}{\varrho}}; \quad \beta_2 = \frac{22{,}034}{l^2} \sqrt{\frac{E i^2}{\varrho}}; \quad \beta_3 = \frac{25}{4} \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{E i^2}{\varrho}}; \ldots .$$

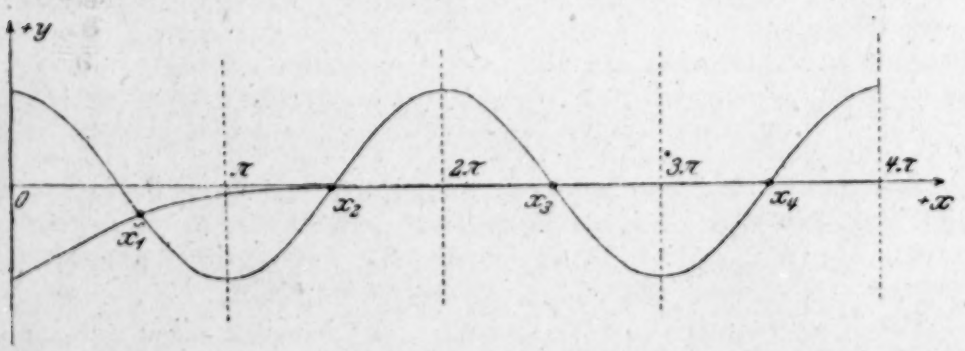


Abb. 2

Drückt man in e) B durch A aus, so wird:

$$B = -A\frac{\sin\alpha l + \mathfrak{Sin}\,\alpha l}{\cos\alpha l + \mathfrak{Cof}\,\alpha l} = -Ar,$$

und das partikuläre Intregal geht nur über in:

$$y = \sin(\beta t + \varphi)\,A\{\sin\alpha x + \mathfrak{Sin}\,\alpha x - r(\cos\alpha x + \mathfrak{Cof}\,\alpha x)\}.$$

Zur Darstellung des Schwingungszustandes bedarf es somit nur noch der Ermittlung von A und φ für die einzelnen Teilschwingungen. In dem Augenblick, wo P entfernt wird, sind die Anfangsgeschwindigkeiten der Schwingung sämtlich gleich Null, weshalb nach (5) $Ar\cos\varphi_r = 0$. Da aber die Anfangsverrückungen endliche Werte haben, so ist unter Beachtung von (4) $\frac{\cos\varphi_r}{\sin\varphi_r} = 0$; weshalb $\varphi_r = \frac{\pi}{2}$.

Nach den Lehren der Elastizitätstheorie erhält man für die Anfangsverrückungen

$$y_0 = \frac{Pl^3}{2EJ}\left(\frac{2}{3} - \frac{x}{l} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{l^3}\right),$$

während η_r aus dem partikulären Integral entnommen wird.

$$\eta_r = \sin\alpha_r x + \mathfrak{Sin}\,\alpha_r x - r_r(\cos\alpha_r x + \mathfrak{Cof}\,\alpha_r x).$$

Damit wird nach (4)

$$A_r = \frac{Pl^3\int_0^l [\sin\alpha_r x + \mathfrak{Sin}\,\alpha_r x - r_r(\cos\alpha_r x + \mathfrak{Cof}\,\alpha_r x)]\left(\frac{2}{3} - \frac{x}{l} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{l^3}\right)dx}{2EJ\int_0^l [\sin\alpha_r x + \mathfrak{Sin}\,\alpha_r x - r_r(\cos\alpha_r x + \mathfrak{Cof}\,\alpha_r x)]^2\,dx}$$

oder nach Ausführung der Integration:

$$A_r = -\frac{4Pr_r}{EJ\alpha_r^3}$$

$$\frac{1}{(r_r^2-1)(\sin\alpha_r l + 2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_r l)\cos\alpha_r l + (r_r^2+1)(2\sin\alpha_r l + \mathfrak{Sin}\,\alpha_r l)\mathfrak{Cof}\,\alpha_r l - 2r_r(\sin\alpha_r l + \mathfrak{Sin}\,\alpha_r l)^2 + 2r_r^2\alpha_r l}$$

In diesen Ausdruck sind der Reihe nach die oben gefundenen Wurzeln der Frequenzgleichung einzuführen. Damit findet man:

$$A_1 = -\frac{Pl^3}{EJ}0{,}1188;\quad A_2 = -\frac{Pl^3}{EJ}0{,}0043;\quad A_3 = -\frac{Pl^3}{EJ}0{,}0005;\ \ldots\ldots$$

Die tatsächliche Schwingungsordinate für einen beliebigen Trägerpunkt ist nunmehr durch folgenden Ausdruck dargestellt:

$$y = -\frac{Pl^3}{EJ}\{\cos\beta_1 t\,\eta_1\,0{,}1188 + \cos\beta_2 t\,\eta_2\,0{,}0043 + \cos\beta_3 t\,\eta_3\,0{,}0005 + \ldots\ldots\}$$

Für den Endquerschnitt am freien Trägerende ist wegen $x = 0$ $\eta_r = -2r_r$, womit die Schwingungsordinate dieses Querschnitts lautet:

$$y_e = -\frac{2Pl^3}{EJ}\{\cos\beta_1 t\,r_1\,0{,}1188 + \cos\beta_2 t\,r_2\,0{,}0043 + \cos\beta_3 t\,r_3\,0{,}0005 + \ldots\ldots\}$$

und zwar ist

$$r_1 = 1{,}3623;\quad r_2 = 0{,}9819;\quad r_3 = \sim 1;\quad r_4 = \sim 1;\ \ldots\ldots$$

Zur Zeit $t = 0$ wird

$$y_e = \frac{2Pl^3}{EJ}\{r_1\,0{,}1188 + r_2\,0{,}0043 + r_3\,0{,}0005 + \ldots\ldots\} = \frac{Pl^3}{3EJ},$$

d. h. gleich der Anfangsverrückung des Endquerschnitts. Da die Werte A sehr schnell abnehmen, so genügen schon die ersten 3 Wurzeln, um die Uebereinstimmung der beiden Seiten der vorstehenden Gleichung zu erkennen. Eine größere Schwingungsordinate als diese kann nicht eintreten, da die $\cos\beta_r t$ stets ≤ 1 sind.

Für die praktische Ausführung ist zu beachten, daß die Schwingungsordinaten abwechselnd positive und negative Werte annehmen (bis sie schließlich zu Null abgedämpft werden), die Spannungen im Stabe also die Vorzeichen ändern, ein Umstand, der für Eisenbetonkonstruktionen hinsichtlich dsr Eisenbewehrung wichtig ist.

3. Träger auf zwei Stützen, von einer herabfallenden Last getroffen.

Ein einfacher Träger auf zwei starren Stützen, welcher sich mit den auf ihm ruhenden

Lasten im Gleichgewicht befinden möge, werde plötzlich in Trägermitte von einem herabfallenden Körper getroffen. Es sollen die durch den Stoß hervorgerufenen Biegungsschwingungen des Trägers berechnet werden (Abb. 3).

Das partikuläre Integral

$$y = \sin(\beta t + \varphi)(A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + C \,\mathfrak{Sin}\, \alpha x + D \,\mathfrak{Cos}\, \alpha x)$$

enthält 4 Konstanten, zu deren Bestimmung folgende 4 Bedingungen dienen:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{a)} & \text{für } x = 0 \text{ ist } y = 0 & \text{oder } 0 = & B + D \\ \text{b)} & \text{»} \quad x = 0 \quad \text{»} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 & \text{»} \quad 0 = & -B + D \end{array}\right\} \text{ woraus } B = D = 0$$

$$\begin{array}{llll} \text{c)} & \text{»} \quad x = l \quad \text{»} \quad y = 0 & \text{»} \quad 0 = & A \sin \alpha l + C \,\mathfrak{Sin}\, \alpha l \\ \text{d)} & \text{»} \quad x = l \quad \text{»} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 & \text{»} \quad 0 = & -A \sin \alpha l + C \,\mathfrak{Sin}\, \alpha l \end{array}$$

Die Bedingung, daß die Nennerdeterminante der Gleichungen c) und d) gleich Null sein muß, liefert die Frequenzgleichung

$$\sin \alpha l \,\mathfrak{Sin}\, \alpha l = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}.$$

Deren Wurzeln sind (abgesehen von $\alpha l = 0$, die hier unbrauchbar ist, da für diesen Fall keine Schwingungen entstehen können)

$$(\alpha l)_1 = \pi; \quad (\alpha l)_2 = 2\pi; \quad (\alpha l)_3 = 3\pi; \ldots \quad (\alpha l)_n = n\pi; \ldots$$

Damit wird

$$\beta_1 = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{E i^2}{\varrho}}; \quad \beta_2 = \frac{4\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{E i^2}{\varrho}}; \quad \ldots \quad \beta_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{E i^2}{\varrho}}; \ldots$$

Durch Addition von c) und d) ergibt sich $C = 0$, weshalb das partikuläre Integral übergeht in

$$y = \sin(\beta t + \varphi) A \sin \alpha x.$$

A und φ müssen nun aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden. Die Masse des herabfallenden Körpers sei mit M, seine Geschwindigkeit im Augenblick des Auftreffens mit V bezeichnet. Der Körper selbst soll als starr angenommen werden. Rechnet man die Zeit τ vom Augenblick des Auffallens des Körpers auf den Träger aus, dann hat sich letzterer zur Zeit $\tau = \tau_1$ um ein bestimmtes Maß y eingesenkt, wobei τ_1 kleiner sein soll als diejenige Zeit, zu welcher der Träger seine größte Einsenkung erfährt. Da der stoßende Körper in der Zeit τ_1 den gleichen Weg y zurücklegt, so beträgt dessen Beschleunigung $\frac{d^2 y}{d\tau^2}$. Bezeichnet man mit K diejenige Kraft, welche den Träger an der Stoßstelle um 1 cm durchbiegen würde, so hat der Stoßdruck zwischen Träger und stoßendem Körper zur Zeit τ_1 die Größe Ky. Die Bewegungsgleichung für letzteren, auf den Ky verzögernd wirkt, lautet somit:

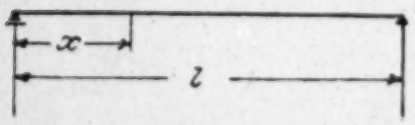


Abb. 3

$$M \frac{d^2 y}{d\tau^2} = -K y.$$

Ihr Integral ist

$$y = \mathfrak{A} \sin \gamma \tau + \mathfrak{B} \cos \gamma \tau, \text{ mit } \gamma = \sqrt{\frac{K}{M}}.$$

Für $\tau = 0$ ist $y = 0$, woraus $\mathfrak{B} = 0$. Weiter ist für $\tau = 0$ auch $\frac{dy}{d\tau} = V$, d. h. gleich der Geschwindigkeit des stoßenden Körpers im Augenblick des Auffallens auf den Träger. Diese Bedingung liefert

$$V = \mathfrak{A}\gamma, \quad \text{oder} \quad \mathfrak{A} = \frac{V}{\gamma} \text{ und damit } y = \frac{V}{\gamma} \sin \gamma \tau.$$

Seinen Größtwert erreicht y für $\tau = \frac{\pi}{2\gamma}$

$$y_{\max} = \frac{V}{\gamma} = V\sqrt{\frac{M}{K}}.$$

V und M sind gegebene Größen, K kann in einfacher Weise berechnet werden. Bezeichnet nämlich δ_m cm die durch eine in Trägermitte aufgestellte Last 1 erzeugte

Durchbiegung des Trägers an dieser Stelle, so würde eine Last $K = \frac{1}{\delta_m}$ die Durchbiegung 1 cm hervorbringen. Somit ist y_{max} und mit ihm der ganze Verrückungszustand des Trägers zur Zeit $\tau = \frac{\pi}{2\gamma}$ bekannt. Betrachtet man nun diesen Zustand des Trägers als Anfangszustand für die nach dem Stoß eintretenden Biegungsschwingungen, und setzt voraus, daß der stoßende Körper, sobald y_{max} erreicht ist, entfernt wird, seine Masse an der Schwingung des Stabes also nicht mehr teilnimmt, dann stellen die durch y_{max} festgelegten Biegungsordinaten die Anfangsverrückungen y_0 dar, während die Anfangsgeschwindigkeiten zu dieser Zeit, die in bezug auf die Schwingungen nun mit $t = 0$ bezeichnet werden möge, sämtlich gleich Null gesetzt werden können. Der Phasenverschiebungswinkel ist somit wieder für alle Teilschwingungen $\varphi = \frac{\pi}{2}$, während für Ar nach Gleichung (4) gilt:

$$A_r = \frac{\int_0^l \eta_r y_0 \, dx}{\int_0^l \eta_r^2 \, dx}, \quad \text{wobei } \eta_r = \sin \alpha_r x.$$

Bezeichnet Q das Gewicht des fallenden Körpers, h seine Fallhöhe und g die Erdbeschleunigung, so wird die größte Stoßordinate mit $V = \sqrt{2gh}$; $M = \frac{Q}{g}$ und $\frac{1}{K} = \delta_m = \frac{l^3}{48\,EJ}$

$$y_{0\max} = \sqrt{\frac{Qhl^3}{24\,EJ}} = \frac{\mu l}{12},$$

wenn $\mu = \sqrt{\frac{6\,Qhl}{EJ}}$ gesetzt wird.

Für eine beliebige Ordinate zwischen $x = 0$ und $x = \frac{l}{2}$ gilt dann

$$y_0 = \frac{\mu l}{4}\left(\frac{x}{l} - \frac{4}{3}\frac{x^3}{l^3}\right).$$

Dann wird

$$A_r = \frac{\mu l \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\sin(\alpha_r x)\frac{x}{l} - \frac{4}{3}\frac{x^3}{l^3}\sin \alpha_r x\right) dx}{2\int_0^l \sin^2 \alpha_r x \, dx}$$

oder nach Ausführung der Integration

$$A_r = \frac{\mu}{3 l^3 \alpha^4}\left\{24 \sin\frac{\alpha l}{2} - \cos\frac{\alpha l}{2}\left[(\alpha l)^2 + 12\right]\alpha l\right\}.$$

In diesen Ausdruck sind der Reihe nach die oben gefundenen Wurzeln der Frequenzgleichung einzuführen. Man erhält dann:

$A_1 = 0{,}08213\,\mu l$; $A_2 = 0{,}06918\,\mu l$; $A_3 = -0{,}00101\,\mu l$; $A_4 = -0{,}02854\,\mu l$;
$A_5 = 0{,}00013\,\mu l$; $A_6 = 0{,}01828\,\mu l$; $A_7 = -0{,}00002\,\mu l$; $A_8 = -0{,}01351\,\mu l$; . . . . .,

so daß das vollständige Integral der Schwingungsgleichung nunmehr lautet:

$y = \mu l \{\cos\beta_1 t\,\eta_1\,0{,}08213 + \cos\beta_2 t\,\eta_2\,0{,}06918 - \cos\beta_3 t\,\eta_3\,0{,}00101 - \cos\beta_4 t\,\eta_4\,0{,}02854$
$+ \cos\beta_5 t\,\eta_5\,0{,}00013 + \cos\beta_6 t\,\eta_6\,0{,}01828 - \cos\beta_7 t\,\eta_7\,0{,}00002 - \cos\beta_8 t\,\eta_8\,0{,}01351 + \ldots\}.$

Man erkennt, daß die Amplituden der symmetrischen Oberschwingungen A_3, A_5, A_7 . . . sehr schnell, diejenigen der unsymmetrischen Oberschwingungen A_2, A_4, A_6 . . . dagegen wesentlich langsamer abnehmen. Für die Trägermitte ist mit $\eta_r = \sin\frac{\alpha_r l}{2}$

$y_m = \mu l\,(\cos\beta_1 t\,0{,}08213 + \cos\beta_3 t\,0{,}00101 + \cos\beta_5 t\,0{,}00013 + \cos\beta_7 t\,0{,}00002 + \ldots\ldots)$

und für $t = 0$ wird

$$y_m = \mu l\,(0{,}08213 + 0{,}00101 + 0{,}00013 + 0{,}00002 + \ldots.) = 0{,}8333\,\mu l,$$

d. h. gleich der Anfangsverrückung des mittleren Stabquerschnitts.

Mit Hilfe des oben angegebenen vollständigen Integrals der Schwingungsgleichung kann der Verrückungszustand des Trägers zu jeder beliebigen Zeit angegeben werden. Erfolgt nun zur Zeit $t = t_1$ ein 2. Stoß mit derselben Intensität wie der erste, so wird offenbar der Schwingungszustand des Trägers eine Aenderung erfahren. Denkt man sich den Träger in der Lage festgehalten, in welcher er sich im Augenblick des 2. Stoßes befindet, so würde der stoßende Körper die an dieser Stelle bereits vorhandene Verrückung y_m' um das Maß $V\sqrt{\frac{M}{K}}$ vergrößern oder verringern, je nachdem die augenblickliche Verrückung im gleichen oder im entgegengesetzten Sinne wie der Stoß besteht. Nun befindet sich der Träger aber zur Zeit t_1 in Bewegung und würde zur Zeit $t_2 = t_1 + \tau$ an der Stoßstelle eine Verrückung y_m'' aufweisen, die sich ebenfalls aus dem vollständigen Integral berechnen läßt. Da aber die Verrückungsordinate aus dem Stoß allein zur Zeit τ die Größe

$$y_{m_S} = \frac{V}{\gamma} \sin \gamma \tau$$

aufweist, so ergibt sich die zur Zeit t_2 tatsächlich vorhandene Verrückung an der Stoßstelle nach dem Prinzip der Superposition kleiner Bewegungen zu

$$y_m = y_m'' + y_{m_S}$$

und an einer beliebigen anderen Stelle

$$y = y'' + 3\,\frac{V}{\gamma} \sin \gamma \tau \left(\frac{x}{l} - \frac{4}{3}\,\frac{x^3}{l^3}\right).$$

Für $\tau = \frac{\pi}{2\gamma}$ ergibt sich an der Stoßstelle

$$y_m = y_m'' + V\sqrt{\frac{M}{K}}.$$

Wird wieder angenommen, daß nach Eintritt der größten Stoßordinate $V\sqrt{\frac{M}{K}}$ der stoßende Körper entfernt wird, so kann dieser Zeitpunkt als Beginn der neuen Schwingungen aufgefaßt werden. Durch y_m sind sämtliche Anfangsverrückungen y_0 festgelegt, und zwar ist

$$y_0 = \Sigma \cos \beta_r t_2\, Ar \sin \alpha_r x + \frac{\mu l}{4}\left(\frac{x}{l} - \frac{4}{3}\,\frac{x^3}{l^3}\right).$$

für

$$t_2 = t_1 + \frac{\pi}{2\gamma}.$$

Die Anfangsgeschwindigkeiten v_0 ergeben sich aus den Verrückungen durch Differentiation nach τ, wobei $t = t_1 + \tau$ zu setzen ist. Für $\tau = \frac{\pi}{2\gamma}$ findet man

$$v_0 = -\Sigma \beta_r \sin \beta_r t_2\, Ar \sin \alpha_r x.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (4) und (5) können nun Ar und φ_r für die neuen Schwingungen berechnet werden. Schließlich findet man wieder durch Summation der partikulären Integrale die tatsächlichen Schwingungsordinaten.

Bezeichnet T_1 die Schwingungsdauer der Grundschwingungen, so gilt für diese bekanntlich

$$T_1 = \frac{2\pi}{\beta_1}.$$

Erfolgt nun der 2. Stoß zur Zeit $t_1 = T_1 - \frac{\pi}{2\gamma}$, d. h. genau um T_1 später als der erste, dann ist zur Zeit $t_2 = t_1 + \frac{\pi}{2\gamma} = T_1$ die Verrückung an der Stoßstelle für die Grundschwingung

$$y_1 = y_1''_{\max} + V\sqrt{\frac{M}{K}},$$

denn für $t = \frac{2\pi}{\beta_1}$ und $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ erreicht y_1 ein Maximum. Man erkennt also, daß in diesem Falle eine Vergrößerung der Schwingungsausschläge für die Grundschwingung zu erwarten ist. Muß mit periodisch wiederkehrenden Stößen an der gleichen Stelle des Trägers gerechnet werden, so ist ihre Aufeinanderfolge in Zeitabständen von T_1 als die

kritische zu bezeichnen, da für die Grundschwingung am ehesten eine Resonanz zu befürchten tst.

Ganz ähnlich wie die vorhergehende gestaltet sich die Untersuchung für den Fall, daß der 2. Stoß nicht wieder an der gleichen Stelle wie der erste, sondern an einer um die Strecke c von der ersten entfernten anderen Stelle erfolgt. Von der Besprechung dieses Falles soll indessen hier Abstand genommen werden.

Die Anwendung der Schwingungsgleichung sowie die Einführung des Anfangszustandes dürften durch die vorstehenden einfachen Beispiele zur Genüge erläutert sein. Nachstehend sollen jetzt noch die Schwingungsfrequenzen für den Träger auf 3 und 4 Stützen ermittelt werden.

4. Schwingungszahlen eines Trägers auf 3 Stützen. Das partikuläre Integral enthält jetzt 8 Konstante, für jede Trägeröffnung 4. Setzt man mit Bezug auf Abb. 4 die Bedingungen an: für $x_1 = 0$ ist $y_1 = 0$, für $x_1 = l$ ist $y_1 = 0$, für $x_1 = 0$ ist $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} = 0$, so ergibt sich $B_1 = D_1 = 0$ und $C_1 = -A_1 \frac{\sin \alpha_1 l_1}{\mathfrak{Sin}\, \alpha_1 l_1}$. Damit lautet das partikuläre Integral für die erste Oeffnung

$$y_1 = \sin(\beta t + \varphi) A_1 \left(\sin \alpha_1 x_1 - \frac{\sin \alpha_1 l_1}{\mathfrak{Sin}\, \alpha_1 l_1} \mathfrak{Sin}\, \alpha_1 x_1\right)$$

und analog für die zweite

$$y_2 = \sin(\beta t + \varphi) A_2 \left(\sin \alpha_2 x_2 - \frac{\sin \alpha_2 l_2}{\mathfrak{Sin}\, \alpha_2 l_2} \mathfrak{Sin}\, \alpha_2 x_2\right).$$

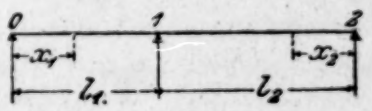


Abb. 4

Für A_1 und A_2 stehen zwei weitere Bedingungen zur Verfügung:

für $x_1 = l_1$, $x_2 = l_2$ ist $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial y_2}{\partial x_2}$ und $J_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} = J_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2}$.

Diese liefern:

a) $\alpha_1 A_1 (\cos \alpha_1 l_1 - \sin \alpha_1 l_1 \mathfrak{Ctg}\, \alpha_1 l_1) = -\alpha_2 A_2 (\cos \alpha_2 l_2 - \sin \alpha_2 l_2 \mathfrak{Ctg}\, \alpha_2 l_2)$

b) $-2 \alpha_1^2 J_1 A_1 \sin \alpha_1 l_1 = -2 \alpha_2^2 J_2 A_2 \sin \alpha_2 l_2$.

Nun ist aber

$$\alpha_1^2 = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\varrho \beta^2}{E}} \quad \text{und} \quad \alpha_2^2 = \frac{1}{i_2} \sqrt{\frac{\varrho \beta^2}{E}},$$

weshalb

$$\frac{J_1 \alpha_1^2}{J_2 \alpha_2^2} = \frac{i_1 F_1}{i_2 F_2} = \nu; \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \sqrt{\frac{i_2}{i_1}} = \nu'.$$

Unter Beachtung dieser Werte gehen die obigen Gleichungen a) und b) über in:

$$\left.\begin{aligned} A_1 \nu' (\cos \alpha_1 l_1 - \sin \alpha_1 l_1 \mathfrak{Ctg}\, \alpha_1 l_1) + A_2 (\cos \alpha_2 l_2 - \sin \alpha_2 l_2 \mathfrak{Ctg}\, \alpha_2 l_2) &= 0 \\ A_1 \nu \sin \alpha_1 l_1 - A_2 \sin \alpha_2 l_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}.$$

Die Nennerdeterminante dieser linearen homogenen Gleichungen muß zu Null werden. Diese Bedingung liefert die Frequenzgleichung:

$$\nu \sin \alpha_2 l_2 (\cos \alpha_1 l_1 - \sin \alpha_1 l_1 \mathfrak{Ctg}\, \alpha_1 l_1) + \nu \sin \alpha_1 l_1 (\cos \alpha_2 l_2 - \sin \alpha_2 l_2 \mathfrak{Ctg}\, \alpha_2 l_2) = 0 \quad \text{(II)},$$

aus welcher α_1 (bezw. α_2) und damit β berechnet werden können. Für den Fall gleicher Stützweiten und Stabquerschnitte lauten die Gleichungen (I):

$$(A_1 + A_2)(\cos \alpha l - \sin \alpha l \mathfrak{Ctg}\, \alpha l) = 0, \qquad (A_1 - A_2) \sin \alpha l = 0 \quad \ldots \quad \text{(I')}.$$

Sie besagen, daß in diesem Sonderfall die Gesamtschwingung sich aus symmetrischen Schwingungen in bezug auf die mittlere Stützensenkrechte, bei denen $A_1 = A_2$ wird, und gegensymmetrischen, bei denen $A_1 = -A_2$ wird, zusammensetzen. Man erhält demnach auch 2 verschiedene Frequenzgleichungen. Für die symmetrischen Schwingungen liefert die 1. der Gleichungen (I') wegen $A_1 = A_2$

$$\operatorname{ctg} \alpha l = \mathfrak{Ctg}\, \alpha l \quad \ldots \quad \text{(III)}.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung (III) sind aus Abb. 5 als Schnittpunkte der daselbst aufgetragenen Kurven der Funktionen $y = \operatorname{ctg} x$ und $y' = \mathfrak{Ctg}\, x$ zu entnehmen. Man findet mit hinreichender Genauigkeit

$$(\alpha l)_1 = \frac{5\pi}{4}; \quad (\alpha l)_2 = \frac{9\pi}{4}; \quad (\alpha l)_3 = \frac{13\pi}{4}; \ldots .$$

und damit die Frequenzen

$$\beta_1 = \frac{25}{16} \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{E i^2}{\varrho}}; \quad \beta_2 = \frac{81}{16} \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{E i^2}{\varrho}}; \ldots$$

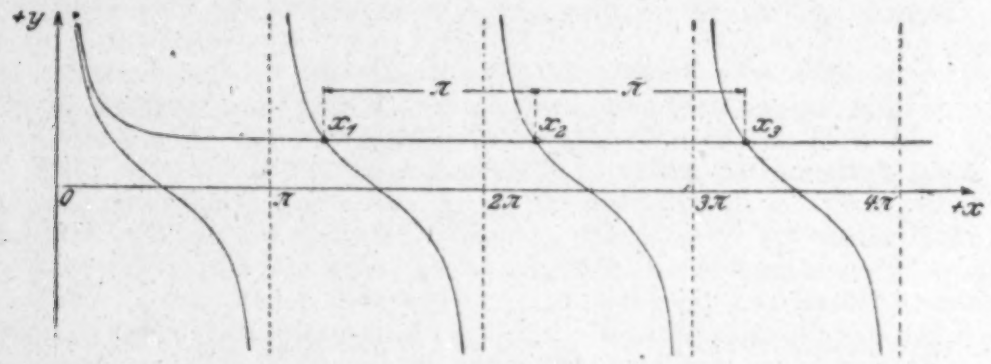


Abb. 5

Für die gegensymmetrischen Schwingungen liefert die 2. der Gleichungen (I') wegen $A_2 = -A_1$

$$\sin \alpha l = 0 \quad \ldots \quad \text{(IV)},$$

woraus

$$(\alpha l)_1 = \pi; \quad (\alpha l)_2 = 2\pi; \ldots . \quad (\alpha l)_n = n\pi; \ldots .$$

Wichtig ist hier die Bemerkung, daß die Frequenzen der gegensymmetrischen Schwingungen die gleichen sind wie die eines einfachen Balkens auf 2 Stützen.

Um das totale Integral zu finden, hat man wieder unter Einführung der oben gefundenen Werte für α und β die Summe der partikulären Integrale zu bilden und erhält dann

für die symmetrischen Schwingungen:

$$y_1 = \Sigma \sin(\beta_r t + \varphi_r)\, Ar \left(\sin \alpha_r x - \mathfrak{Sin}\, \alpha_r x \frac{\sin \alpha_r l}{\mathfrak{Sin}\, \alpha_r l}\right), \quad y_2 = y_1,$$

für die gegensymmetrischen Schwingungen (unter Beachtung von (IV)):

$$y_1 = \Sigma \sin(\beta_r t + \varphi_r)\, Ar \sin \alpha_r x, \qquad y_2 = -y_1.$$

5. Schwingungszahlen eines Trägers auf 4 Stützen (Abb. 6). Im ganzen sind hier, da es sich um 3 Oeffnungen handelt, 12 Bestimmungsgleichungen für die 12 Integrationskonstanten erforderlich. Die ersten 3 liefern in Uebereinstimmung mit dem Träger auf 3 Stützen:

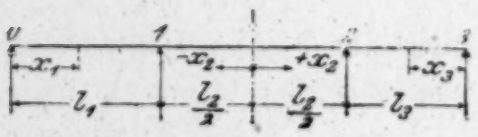


Abb. 6

$$y_1 = \sin(\beta t + \varphi)\, A_1 \left(\sin \alpha_1 x_1 - \frac{\sin \alpha_1 l_1}{\mathfrak{Sin}\, \alpha_1 l_1} \mathfrak{Sin}\, \alpha_1 x_1\right)$$

und analog wird

$$y_3 = \sin(\beta t + \varphi)\, A_3 \left(\sin \alpha_3 x_3 - \frac{\sin \alpha_3 l_3}{\mathfrak{Sin}\, \alpha_3 l_3} \mathfrak{Sin}\, \alpha_3 x_3\right).$$

Ferner ist

$$y_2 = 0 \text{ für } x_2 = -\frac{l_2}{2} \text{ (vergl. Abb. 6)}; \quad y_2 = 0 \text{ für } x_2 = +\frac{l_2}{2}.$$

Daraus ergibt sich

$$D_2 = -B_2 \frac{\cos \frac{\alpha_2 l_2}{2}}{\mathfrak{Cof}\, \frac{\alpha_2 l_2}{2}} \quad \text{und} \quad C_2 = -A_2 \frac{\sin \frac{\alpha_2 l_2}{2}}{\mathfrak{Sin}\, \frac{\alpha_2 l_2}{2}}.$$

Mit diesen Werten wird

$$y_2 = \sin(\beta t + \varphi) \left\{ A_2 \left(\sin \alpha_2 x_2 - \frac{\sin \frac{\alpha_2 l_2}{2}}{\mathfrak{Sin}\, \frac{\alpha_2 l_2}{2}} \mathfrak{Sin}\, \alpha_2 x_2 \right) + B_2 \left(\cos \alpha_2 x_2 - \frac{\cos \frac{\alpha_2 l_2}{2}}{\mathfrak{Cof}\, \frac{\alpha_2 l_2}{2}} \mathfrak{Cof}\, \alpha_2 x_2 \right) \right\}.$$

Für die in y_1, y_2 und y_3 noch vorhandenenen Konstanten A_1, A_2, B_2 und A_3 stehen 4 weitere Gleichungen zur Verfügung:

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } x_1 = l_1 \\ x_2 = -\frac{l_2}{2} \end{array}\right\} \text{ ist } \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \quad \text{und} \quad J_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} = J_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } x_3 = l_3 \\ x_2 = +\frac{l_2}{2} \end{array}\right\} \text{ ist } \frac{\partial y_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial y_2}{\partial x_2} \quad \text{und} \quad J_3 \frac{\partial^2 y_3}{\partial x_3^2} = J_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2}.$$

Diese liefern die folgenden 4 Beziehungen:

a) $A_1 \alpha_1 (\cos \alpha_1 l_1 - \sin \alpha_1 l_1 \operatorname{Ctg} \alpha_1 l_1)$

$$= \alpha_2 A_2 \left(\cos \frac{\alpha_2 l_2}{2} - \sin \frac{\alpha_2 l_2}{2} \operatorname{Ctg} \frac{\alpha_2 l_2}{2}\right) + B_2 \alpha_2 \left(\sin \frac{\alpha_2 l_2}{2} + \cos \frac{\alpha_2 l_2}{2} \operatorname{Tg} \frac{\alpha_2 l_2}{2}\right)$$

b) $A_3 \alpha_3 (\cos \alpha_3 l_3 - \sin \alpha_3 l_3 \operatorname{Ctg} \alpha_3 l_3)$

$$= - \alpha_2 A_2 \left(\cos \frac{\alpha_2 l_2}{2} - \sin \frac{\alpha_2 l_2}{2} \operatorname{Ctg} \frac{\alpha_2 l_2}{2}\right) + B_2 \alpha_2 \left(\sin \frac{\alpha_2 l_2}{2} + \cos \frac{\alpha_2 l_2}{2} \operatorname{Tg} \frac{\alpha_2 l_2}{2}\right)$$

c) $$- 2 J_1 \alpha_1^2 A_1 \sin \alpha_1 l_1 = 2 J_2 \alpha_2^2 \left(A_2 \sin \frac{\alpha_2 l_2}{2} - B_2 \cos \frac{\alpha_2 l_2}{2}\right)$$

d) $$- 2 J_3 \alpha_3^2 A_3 \sin \alpha_3 l_3 = - 2 J_2 \alpha_2^2 \left(A_2 \sin \frac{\alpha_2 l_2}{2} + B_2 \cos \frac{\alpha_2 l_2}{2}\right).$$

Nun läßt sich B_2 durch Addition von a) und b) durch A_1 und A_3 ausdrücken, desgleichen durch Addition von c) und d). Setzt man die so gefundenen Werte einander gleich, so ergibt sich eine Gleichung, die nur A_1 und A_3 enthält. Eine 2. Beziehung zwischen A_1 und A_3 findet man, indem man erst b) von a), dann d) von c) subtrahiert und die sich daraus für A_2 ergebenden Werte einander gleichsetzt. Nach Durchführung einiger Zwischenrechnungen lauten diese 2 Beziehungen:

e) $$\alpha_1 A_1 \sin \alpha_1 l_1 \left[J_2 \alpha_2 (\operatorname{ctg} \alpha_1 l_1 - \operatorname{Ctg} \alpha_1 l_1) - J_1 \alpha_1 \left\{\operatorname{tg} \frac{\alpha_2 l_2}{2} + \operatorname{Tg} \frac{\alpha_2 l_2}{2}\right.\right]$$

$$+ \alpha_3 A_3 \sin \alpha_3 l_3 \left[J_2 \alpha_2 (\operatorname{ctg} \alpha_3 l_3 - \operatorname{Ctg} \alpha_3 l_3) - J_3 \alpha_3 \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha_2 l_2}{2} + \operatorname{Tg} \frac{\alpha_2 l_2}{2}\right)\right] = 0.$$

f) $$\alpha_1 A_1 \sin \alpha_1 l_1 \left[J_2 \alpha_2 (\operatorname{ctg} \alpha_1 l_1 - \operatorname{Ctg} \alpha_1 l_1) + J_1 \alpha_1 \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha_2 l_2}{2} - \operatorname{Ctg} \frac{\alpha_2 l_2}{2}\right)\right]$$

$$- \alpha_3 A_3 \sin \alpha_3 l_3 \left[J_2 \alpha_2 (\operatorname{ctg} \alpha_3 l_3 - \operatorname{Ctg} \alpha_3 l_3) + J_3 \alpha_3 \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha_2 l_2}{2} - \operatorname{Ctg} \frac{\alpha_2 l_2}{2}\right)\right] = 0.$$

Die Bedingung, daß die Nennerdeterminante dieser linearen homogenen Gleichungen zu Null werden muß, liefert die Frequenzgleichung.

Wesentliche Vereinfachungen der Lösung treten ein für den Fall gleicher Stützweiten und Stabquerschnitte. Dann gehen e) und f) wegen

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha, \quad J_1 = J_2 = J_3 = J, \quad l_1 = l_2 = l_3 = l$$

über in

g) $$(A_1 + A_3) \left(\operatorname{ctg} \alpha l - \operatorname{Ctg} \alpha l - \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} - \operatorname{Tg} \frac{\alpha l}{2}\right) \sin \alpha l = 0$$

h) $$(A_1 - A_3) \left(\operatorname{ctg} \alpha l - \operatorname{Ctg} \alpha l + \operatorname{ctg} \frac{\alpha l}{2} - \operatorname{Ctg} \frac{\alpha l}{2}\right) \sin \alpha l = 0.$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man, daß auch hier symmetrische und gegen symmetrische Schwingungen eintreten, erstere für $A_1 = A_3$, letztere für $A_1 = - A_3$. Das partikuläre Integral ergibt:

$$y_1 = \sin (\beta t + \varphi) A_1 \left(\sin \alpha x - \operatorname{Sin} \alpha x \frac{\sin \alpha l}{\operatorname{Sin} \alpha l}\right)$$

$$y_2 = \sin (\beta t + \varphi) \left[A_2 \left(\sin \alpha x - \operatorname{Sin} \alpha x \frac{\sin \frac{\alpha l}{2}}{\operatorname{Sin} \frac{\alpha l}{2}}\right) + B_2 \left(\cos \alpha x - \operatorname{Cof} \alpha x \frac{\cos \frac{\alpha l}{2}}{\operatorname{Cof} \frac{\alpha l}{2}}\right)\right]$$

$$y_3 = \sin (\beta t + \varphi) A_3 \left(\sin \alpha x - \operatorname{Sin} \alpha x \frac{\sin \alpha l}{\operatorname{Sin} \alpha l}\right).$$

Subtrahiert man d) von c), so findet man

$$A_2 = (A_3 - A_1) \frac{\sin \alpha l}{2 \sin \frac{\alpha l}{2}} = (A_3 - A_1) \cos \frac{\alpha l}{2}.$$

Addiert man dagegen c) und d), so ergibt sich

$$B_2 = (A_3 + A_1) \frac{\sin \alpha l}{2 \cos \frac{\alpha l}{2}} = (A_3 + A_1) \sin \frac{\alpha l}{2}.$$

Man erhält also für die symmetrischen Schwingungen mit $A_1 = A_3$:

$$y_1 = y_3 = \sin(\beta t + \varphi) A_1 \left(\sin \alpha x - \operatorname{Sin} \alpha x \frac{\sin \alpha l}{\operatorname{Sin} \alpha l}\right)$$

$$y_2 = 2 \sin(\beta t + \varphi) A_1 \sin \frac{\alpha l}{2} \left(\cos \alpha x - \operatorname{Cof} \alpha x \frac{\cos \frac{\alpha l}{2}}{\operatorname{Cof} \frac{\alpha l}{2}}\right)$$

und für die gegensymmetrischen mit $A_1 = -A_3$:

$$y_1 = -y_3 = \sin(\beta t + \varphi) A_1 \left(\sin \alpha x - \operatorname{Sin} \alpha x \frac{\sin \alpha l}{\operatorname{Sin} \alpha l}\right)$$

$$y_2 = 2 \sin(\beta t + \varphi) \cos \frac{\alpha l}{2} A_1 \left(\operatorname{Sin} \alpha x \frac{\sin \frac{\alpha l}{2}}{\operatorname{Sin} \frac{\alpha l}{2}} - \sin \alpha x\right).$$

In gleicher Weise wie beim Träger auf 3 Stützen ist auch hier die Frequenz der symmetrischen und gegensymmetrischen Schwingungen zu bestimmen. Für erstere wird nach Gleichung g)

$$\operatorname{ctg} \alpha l - \operatorname{Ctg} \alpha l - \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} - \operatorname{Tg} \frac{\alpha l}{2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)},$$

für letztere nach Gleichung h)

$$\operatorname{ctg} \alpha l - \operatorname{Ctg} \alpha l + \operatorname{ctg} \frac{\alpha l}{2} - \operatorname{Ctg} \frac{\alpha l}{2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}.$$

Der Faktor $\sin \alpha l$ konnte weggehoben werden, da alle Werte αl, für die $\sin \alpha l = 0$ wird, die Frequenzgleichungen nicht befriedigen.

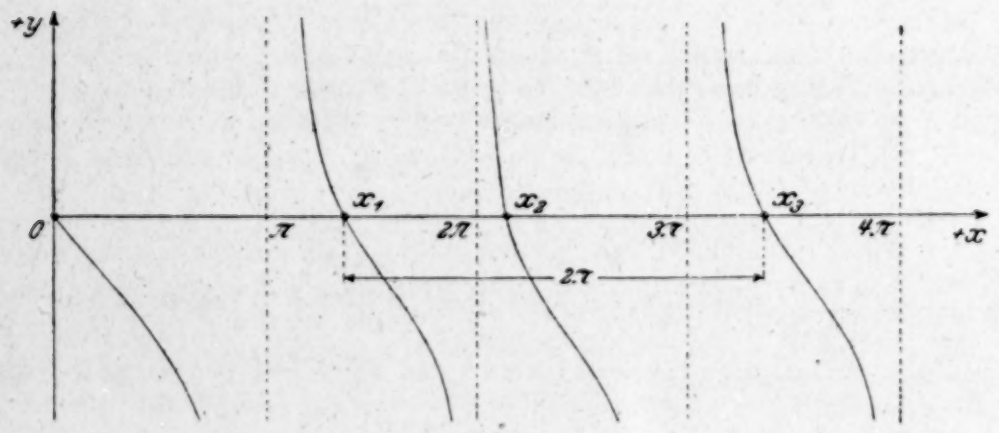


Abb. 7

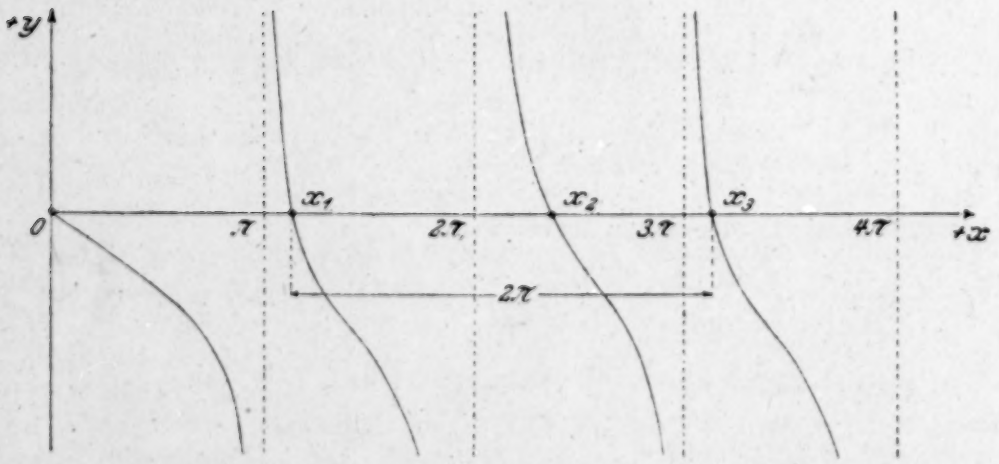


Abb. 8

In Abb. 7 ist die Kurve der Funktion $y = \operatorname{ctg} x - \mathfrak{Ctg}\, x - \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \mathfrak{Tg}\frac{x}{2}$, in Abb. 8 diejenige der Funktion $y' = \operatorname{ctg} x - \mathfrak{Ctg}\, x + \operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \mathfrak{Ctg}\frac{x}{2}$ aufgetragen. Man findet mit genügender Genauigkeit für praktische Zwecke folgende Wurzeln:

für die symmetrischen Schwingungen:

$(\alpha l)_1 = 4{,}300$; $(\alpha l)_2 = 6{,}708$; $(\alpha l)_3 = 4{,}3 + 2\pi$; $(\alpha l)_4 = 6{,}708 + 2\pi$; $(\alpha l)_5 = 4{,}3 + 4\pi \ldots$,

für die gegensymmetrischen Schwingungen:

$(\alpha l)_1 = 3{,}558$; $(\alpha l)_2 = 7{,}429$; $(\alpha l)_3 = 3{,}558 + 2\pi$; $(\alpha l)_4 = 7{,}429 + 2\pi$; $(\alpha l)_5 = 3{,}558 + 4\pi \ldots$.

Damit sind auch die Frequenzen selbst bekannt, und das vollständige Integral kann angeschrieben werden.

Die Einführung des Anfangszustandes aus irgend einer Schwingungen erregenden Ursache hat nun in der gleichen Weise zu erfolgen, wie dieses an den ersten Beispielen gezeigt wurde. Als solche kommen außer den dort besprochenen Fällen insbesondere die Stöße schwerer Lastwagen auf Brücken mit Kopfsteinpflaster in Frage, ferner das ruckartige Nachgeben der Lastkette bei Krahnbahnen und Aufzugvorrichtungen, die Stöße von Arbeitsmaschinen bei Hochbauten und viele andere. 69

Zur Konstruktion des Übergangsbogens für Eisenbahngleise.

Von **K. LACHMANN** und **R. ROTHE** in Berlin.

Bei der Ueberführung eines Eisenbahngleises aus der geraden Strecke in einen Kreisbogen muß man bekanntlich einen »Uebergangsbogen« zwischenschalten, durch den die äußere Schiene allmählich in die überhöhte Lage gebracht wird, die sie in dem Kreisbogen, entsprechend seiner Krümmung und der Bahngeschwindigkeit, einzunehmen hat. In der Regel benutzt man hierzu eine kubische Parabel, die man auf Grund folgender Ueberlegung erhält. Man nimmt an, die Ueberhöhung der äußeren Schiene des Gleises wachse, von dem Werte Null in der geraden Strecke beginnend, im Uebergangsbogen proportional der Schienenlänge bis zu dem größten Werte an, den sie im Kreisbogen besitzt; außerdem macht man noch einige die Rechnung vereinfachende Annahmen, nämlich daß die doppelt gekrümmte Raumkurve, um die es sich doch in Wirklichkeit handelt, durch ihre Projektion auf die Horizontalebene ersetzt, vor allem aber, daß ihre Bogenlänge gleich der in der geraden Gleisrichtung gemessenen Abszisse genommen werden dürfe, da die Kurve nur wenig aus der Richtung des geraden Gleises abweiche.

Die Annahme, daß die Ueberhöhung Z der äußeren Schiene proportional der Bogenlänge s des Uebergangsbogens wachse, hat aber das Auftreten zweier Knicke in dem Verlauf der äußeren Schiene zur Folge; vergl. die beistehende Abb. 1, die das Längenprofil der äußeren Schiene darstellen soll, und in der O den Ansatzpunkt des Uebergangsbogens an den geraden Schienenstrang, E den Ansatzpunkt an den Kreisbogen, Z die Ueberhöhung der äußeren Schiene im Uebergangsbogen bedeutet. Diese Knicke geben zu plötzlichen Belastungsänderungen der führenden Räder und hierdurch zu Stößen Veranlassung, die die Gefahr der Entgleisung der Fahrzeuge herbeiführen können. In der Literatur ist wiederholt darauf hingewiesen, daß es bei großen Geschwindigkeiten und scharfen Krümmungen nicht immer genügt, diese Ecken nach dem Augenmaß ab zurunden, wie es meistens in der Praxis geschieht. Man hat infolgedessen vorgeschlagen, die kubische Parabel durch andere Kurven zu ersetzen, bei denen das Gefälle längs der äußeren Schiene stetig veränderlich ist, z. B. die Parabel vierter Ordnung, die Sinuslinie, die Lemniskate usw., wobei man allerdings die Auswahl ohne Rücksicht auf die theoretischen Grundlagen des Problems wesentlich unter dem Gesichtspunkt der Einfachheit der Rechnung oder Zeichnung getroffen hat.

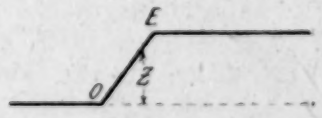


Abb. 1

Unter diesen Umständen scheint es wünschenswert, die Theorie des Uebergangsbogens noch einmal einer genaueren Durchsicht zu unterziehen. Die fruchtbaren Verfahren der praktischen Mathematik erlauben, das vorliegende Problem nicht nur für flache Bögen zu lösen, sondern Uebergangskurven für beliebige Richtungsunterschiede mit jeder gewünschten Genauigkeit zu entwerfen. Wir erblicken hierin einen Fortschritt gegenüber den bisher vorliegenden Ergebnissen.

1. Eine vereinfachende Annahme. Da die äußere Schiene im Uebergangsbogen eine doppelt gekrümmte Kurve sein muß, die innere aber in der wagerechten Ebene verläuft, so können bei einem mehrachsigen Wagen, dessen Achsen starr mit dem Gestell verbunden sind, nicht alle Räder gleichzeitig auf den Schienen laufen. Um ein Schweben des inneren Vorder- oder des äußeren Hinterrades zu vermeiden und die Stöße, die durch die Belastungsänderungen der führenden Räder auftreten, möglichst zu vermindern, muß man daher den Anstieg der äußeren Schiene genügend klein halten. Aus diesem Grunde ist es zulässig, anzunehmen, daß die Aenderungen, die die Lage des Schwerpunktes des Fahrzeuges während der Fahrt erleidet, in einer vom Fahrzeug mitgeführten lotrechten Ebene vor sich gehen. Eine solche Annahme, die gewiß dann streng erfüllt wird, wenn auf der äußeren Schiene nur ein Rad läuft, ist um so unbedenklicher zu machen, als das Spiel der in den Lagern federnden Achsen ohnehin außer Betracht bleiben soll.

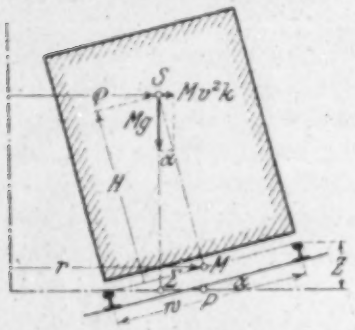


Abb. 2

2. Grundlegende Beziehungen. Den Ausgangspunkt der Betrachtung bildet die bekannte Forderung, daß sich im Schwerpunkte des den Uebergangsbogen durchlaufenden Fahrzeuges die Zentrifugalkraft und das Gewicht des Fahrzeuges das Gleichgewicht halten müssen, damit ein seitlicher Druck der Räder gegen die Schienen vermieden werde. Die Abb. 2 stellt einen senkrecht zur Schwerpunktsbahn und zur Horizontalebene durch den Schwerpunkt des Fahrzeuges gelegten Schnitt dar.

Es bedeute:

α den Ueberhöhungswinkel,
w die Spurweite des Gleises, die als konstant angenommen wird, gemessen in der eben genannten Vertikalebene,
H die Höhe des Schwerpunktes S über der Schienenmitte M,
z_m die Ueberhöhung der Schienenmitte,
$Z = 2\,z_m$ die Ueberhöhung der äußeren Schiene,
Σ die Projektion von S auf die Horizontalebene,
P die Projektion von M auf die Horizontalebene,
ϱ den Krümmungsradius der Schwerpunktsbahn im Punkte S,
$k = \frac{1}{\varrho}$ die zugehörige Krümmung,
r den Krümmungsradius der Gleismitte im Punkte M,
v die als konstant angenommene zulässige Höchstgeschwindigkeit,
M die Masse des Fahrzeuges, im Schwerpunkt vereinigt gedacht,
g die Erdbeschleunigung.

Es wird später gezeigt werden, daß für die hier in Frage kommenden Kurven die Krümmung k der Schwerpunktsbahn durch die Krümmung der Projektion der Kurve auf die Horizontalebene mit genügender Annäherung ersetzt werden darf. Daher wird von nun ab unter k auch die Krümmung der Bahn des Punktes Σ verstanden.

Aus der Abbildung ist ersichtlich

$$Z = w \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

während die Bedingung des Kräftegleichgewichts ergibt:

$$\mathrm{M}\, g \operatorname{tg} \alpha = \mathrm{M}\, k\, v^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Ist α so klein, daß $\sin \alpha$ näherungsweise durch $\operatorname{tg} \alpha$ ersetzt werden kann, dann ergibt sich hieraus die Formel

$$\frac{k\,v^2}{g} \approx \frac{Z}{w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3) \qquad \text{oder} \qquad \frac{Z}{w} \approx \frac{1}{127}\, k\, V^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3'),$$

wenn V in km/Std., ϱ in m gemessen und $g = 9{,}81$ m/sec² gesetzt wird.

Faßt man in (3′) die als unveränderlich vorausgesetzten Größen zu einer Konstanten zusammen, so folgt

$$2\,z_m = Z = Ck, \quad \text{worin } C \approx \frac{w}{127}\, V^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Die geradlinige Verlängerung der Schienenmitte sei die x-Achse, durch den Ansatzpunkt des Uebergangsbogens gehe in der Horizontalebene die y-Achse und zwar positiv nach dem Innern des Bogens gezählt. Man betrachte die Grundrißprojektion (Σ) der Schwerpunktsbahn und die Projektion (P) der Gleismitte (Abb. 3); (x, y) seien die Koordinaten des Punktes Σ, (x_m, y_m) die Koordinaten des entsprechenden Punktes P. Dann ist, wenn man mit u den Abstand der Punkte Σ, P und mit ϑ den Neigungswinkel der Tangente an die Schwerpunktsbahn im Punkte Σ bezeichnet,

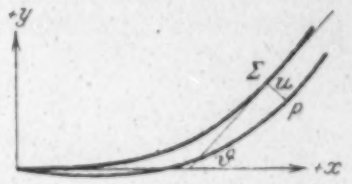


Abb. 3

$$x_m - x = u \sin \vartheta, \quad y - y_m = u \cos \vartheta.$$

Nach Abb. 2 ist unter Benutzung der Formel (1)

$$u = H \sin \alpha = \frac{H Z}{w},$$

mithin wird

$$x_m = x + H \sin \alpha \sin \vartheta, \quad y_m = y - H \sin \alpha \cos \vartheta, \quad z_m = z - H \cos \alpha = \frac{c}{2} k \quad . \quad (5).$$

Ist s die Bogenlänge der Kurve (Σ), vom Nullpunkt an gerechnet, so gelten die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= \int_{s=0}^{s=s} k \, ds \\ x = \int_{s=0}^{s=s} \cos \vartheta \, ds, \qquad y &= \int_{s=0}^{s=s} \sin \vartheta \, ds, \qquad z = z_m + H \cos \alpha = \frac{c}{2} k + H \sqrt{1 - \frac{c^2}{w^2} k^2} \end{aligned}\right\} \quad (6).$$

Wenn man nun weiß, in welcher Weise sich die Krümmung k in Abhängigkeit von der Bogenlänge s ändert, so kann man aus der ersten Formel (6) den Tangentenwinkel ϑ und danach aus den übrigen Formeln (6) die Koordinaten x, y, z des Schwerpunktes S bestimmen. Die Formel (2) liefert dann den Winkel α und schließlich lassen sich nach den Gleichungen (5) auch die Koordinaten x_m, y_m, z_m der Gleismitte finden. Hierdurch ist die Aufgabe prinzipiell gelöst, wenn, wie gesagt, bekannt ist, welche Funktion k von s ist.

Nun betrachte man das Längenprofil der Schwerpunktsbahn, worunter (Abb. 4) die Abwicklung ihres projizierenden Zylinders auf eine lotrechte Ebene zu verstehen ist. Zu Anfang des Uebergangsbogens (für $s = 0$) muß es sich berührend und mit verschwindender Krümmung an die wagerechte Gerade der Höhe H anschließen; am Ende des Uebergangsbogens (für $s = S$) ebenso an die wagerechte Gerade der Höhe z_1, wo z_1 die Erhebung des Schwerpunktes im Kreisbogen bedeutet, denn der Kreisbogen geht bei der Abwicklung in diese Gerade über. Das heißt, es muß sein:

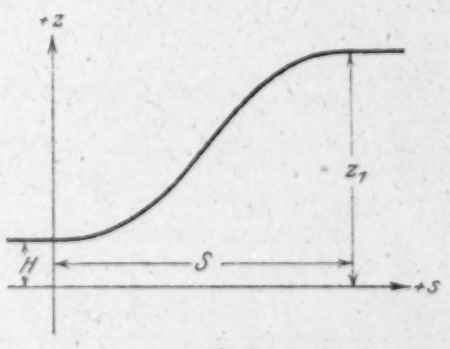


Abb. 4

1. für $s = 0$: $z = H$, $\frac{dz}{ds} = 0$, $\frac{d^2 z}{ds^2} = 0$;

2. für $s = S$: $z = z_1$, $\frac{dz}{ds} = 0$, $\frac{d^2 z}{ds^2} = 0$.

Aus dem Zusammenhang von z mit k nach der dritten der Gl. (6) folgt aber, daß mit den Ableitungen von z auch die von k verschwinden müssen. Also ergeben sich für die unbekannte Funktion $k = k(s)$ folgende Grenzbedingungen:

1. für $s = 0$: $k = 0$, $\frac{dk}{ds} = 0$, $\frac{d^2 k}{ds^2} = 0$;

2. für $s = S$: $k = K$, $\frac{dk}{ds} = 0$, $\frac{d^2 k}{ds^2} = 0$,

worin K die konstante Krümmung der projizierten Schwerpunktsbahn im Kreisbogen der Gleiskurve bedeutet. Diese Konstante K ist als gegeben zu betrachten. Ueber ihre Bestimmung siehe weiter unten in **5**.

3. Annahme einer Funktion $k(s)$. Es gibt unendlich viele Funktionen $k(s)$, die diesen Grenzbedingungen genügen, und insofern ist das ganze Problem unbestimmt, solange nicht weitere, den Verlauf der Funktion $k(s)$ bestimmende Bedingungen hinzugenommen werden. Die einfachste ganze Funktion, die ihnen genügt, ist vom fünften Grade, und zwar ist, wie man sich leicht überzeugt,

$$k(s) = \frac{10\,K}{S^3}\,s^3 - \frac{15\,K}{S^4}\,s^4 + \frac{6\,K}{S^5}\,s^5.$$

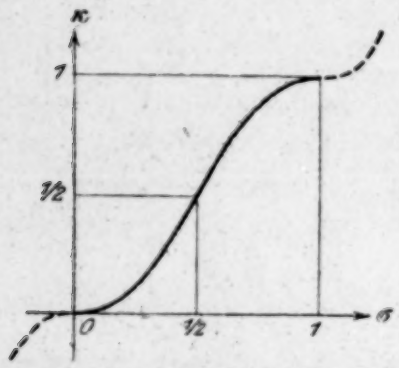


Abb. 5

Setzt man nun

$$\sigma = \frac{s}{S}, \qquad \varkappa = \frac{k}{K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

so durchlaufen σ und $\varkappa$ die Werte von 0 bis 1, und es ist

$$\varkappa(\sigma) = 10\,\sigma^3 - 15\,\sigma^4 + 6\,\sigma^5 \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Diese Funktion soll den weiteren Betrachtungen zugrunde gelegt werden. Ihren Verlauf zeigt Abb. 5. Hier kommt er natürlich nur für den Bereich $0 \leqq \sigma \leqq 1$ in Betracht, außerhalb dieses Bereiches ist die Kurve gestrichelt gezeichnet. Setzt man noch

$$\frac{d\varkappa}{d\sigma} = \varkappa'(\sigma), \qquad \frac{d^2\varkappa}{d\sigma^2} = \varkappa''(\sigma),$$

so kann man leicht folgende zusammengehörige Werte feststellen:

σ	0	$^1/_2$	1
$\varkappa$	0	$^1/_2$	1
$\varkappa'$	0	$^{15}/_8$	0
$\varkappa''$	0	0	0

Der ersten Formel (6) zufolge ergibt sich

$$\vartheta(s) = \int_0^s k(s)\,d\,s = S\,K \int_0^\sigma \varkappa(\sigma)\,d\,\sigma,$$

oder

$$\vartheta = S\,K\left(\frac{5}{2}\,\sigma^4 - 3\,\sigma^5 + \sigma^6\right) = S\,K\,\varphi(\sigma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Für $\sigma = 1$, d. h. $s = S$ hat ϑ den Wert

$$\Theta = {}^1/_2\,S\,K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Zur numerischen Berechnung[1]) von $\varkappa(\sigma)$ und $\varphi(\sigma)$, also auch von k und ϑ dienen die nachstehenden Zahlentafeln I und II.

Zahlentafel I.

σ	$\frac{k}{K} = \varkappa(\sigma)$
0	0
0,1	0,00856
0,2	0,05792
0,3	0,16308
0,4	0,31744
0,5	0,5
0,6	0,68256
0,7	0,83692
0,8	0,94208
0,9	0,99144
1	1

Zahlentafel II.

σ	$\frac{\vartheta}{SK} = \varphi(\sigma)$
0	0
0,1	0,00022
0,2	0,00310
0,3	0,01369
0,4	0,03738
0,5	0,07812
0,6	0,13738
0,7	0,21369
0,8	0,30310
0,9	0,40022
1	0,5

[1]) Diese und alle folgenden numerischen Berechnungen hat der an erster Stelle genannte Verfasser durchgeführt.

Aus (4) und (7) folgt

$$\frac{dZ}{ds} = C\frac{dk}{ds} = CK\frac{d\varkappa}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds} = C\frac{K}{S}\varkappa'.$$

Nun ist der Höchstwert von $\varkappa'$ gleich $\frac{15}{8}$. Bezeichnet man also den Höchstwert von $\frac{dZ}{ds}$, d. h. den größten Anstieg der äußeren Schiene mit $1:n$, so wird

$$S = \frac{15}{8} C K n, \text{ worin } C \approx \frac{w}{127} V^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Durch diese Formel ist die Gesamtlänge des Uebergangsbogens (angenähert) bestimmt, wenn der größte Anstieg der äußeren Schiene gegeben ist.

4. Gestalt des Uebergangsbogens. Schließlich folgen aus (6), (7), (9) und (10)

$$x = S\int_0^\sigma \cos(2\,\Theta\,\varphi(\sigma))\,d\sigma, \quad y = S\int_0^\sigma \sin(2\,\Theta\,\varphi(\sigma))\,d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Diese Integrale lassen sich nicht in geschlossener Form durch elementare Funktionen darstellen.

Die zahlenmäßige Berechnung der Werte von x und y geschieht am besten durch Reihenentwicklung. Es ist

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x}{S} &= \int_0^\sigma \cos(2\,\Theta\,\varphi(\sigma))\,d\sigma = \int_0^\sigma \left(1 - \frac{4\,\Theta^2\varphi(\sigma)^2}{2!} + \frac{16\,\Theta^4\varphi(\sigma)^4}{4!} - \frac{64\,\Theta^6\varphi(\sigma)^6}{6!} + \ldots\right)d\sigma \\
&= \sigma - 2\,\Theta^2\int_0^\sigma \varphi(\sigma)^2 d\sigma + \frac{2}{3}\,\Theta^4\int_0^\sigma \varphi(\sigma)^4\,d\sigma - \frac{4}{45}\,\Theta^6\int_0^\sigma \varphi(\sigma)^6\,d\sigma + \ldots. \\
\frac{y}{S} &= \int_0^\sigma \sin(2\,\Theta\,\varphi(\sigma))\,d\sigma = \int_0^\sigma \left(2\,\Theta\,\varphi(\sigma) - \frac{8\,\Theta^3\varphi(\sigma)^3}{3!} + \frac{32\,\Theta^5\varphi(\sigma)^5}{5!} + \ldots\right)d\sigma \\
&= 2\,\Theta\int_0^\sigma \varphi(\sigma)\,d\sigma - \frac{4}{3}\,\Theta^3\int_0^\sigma \varphi(\sigma)^3\,d\sigma + \frac{4}{15}\,\Theta^5\int_0^\sigma \varphi(\sigma)^5\,d\sigma - \ldots.
\end{aligned}\right\} \quad (13).$$

Diese Reihen konvergieren für alle Werte von σ. Die Integrale $\int_0^\sigma \varphi(\sigma)^n d\sigma$ lassen sich für die verschiedenen Werte von σ genau und einfach genug durch zeichnerische Integration der Kurven $\varphi(\sigma)^n$ bestimmen. Es ergeben sich so die in nachstehender Zahlentafel vereinigten Anfangsglieder.

Zahlentafel III.

σ	$\frac{x}{S}$	$\frac{y}{S}$
0	0	0
0,1	0,1	0
0,2	0,2	$0{,}00026\,\Theta$
0,3	$0{,}3 - 0{,}00002\,\Theta^2$	$0{,}00176\,\Theta$
0,4	$0{,}4 - 0{,}00014\,\Theta^2$	$0{,}00662\,\Theta$
0,5	$0{,}5 - 0{,}00080\,\Theta^2$	$0{,}01786\,\Theta - 0{,}00003\,\Theta^3$
0,6	$0{,}6 - 0{,}00312\,\Theta^2 + 0{,}00001\,\Theta^4$	$0{,}03910\,\Theta - 0{,}00020\,\Theta^3$
0,7	$0{,}7 - 0{,}00928\,\Theta^2 + 0{,}00007\,\Theta^4$	$0{,}07396\,\Theta - 0{,}00095\,\Theta^3$
0,8	$0{,}8 - 0{,}02268\,\Theta^2 + 0{,}00036\,\Theta^4$	$0{,}12546\,\Theta - 0{,}00329\,\Theta^3 + 0{,}00004\,\Theta^5$
0,9	$0{,}9 - 0{,}04750\,\Theta^2 + 0{,}00141\,\Theta^4$	$0{,}19570\,\Theta - 0{,}00927\,\Theta^3 + 0{,}00018\,\Theta^5$
1	$1 - 0{,}08814\,\Theta^2 + 0{,}00424\,\Theta^4 - 0{,}00010\,\Theta^6$	$0{,}28572\,\Theta - 0{,}02140\,\Theta^3 + 0{,}00070\,\Theta^5$

Nach den Angaben der Zahlentafel III kann man für elf Punkte die Koordinaten und die Richtung der Tangente an die gesuchte Schwerpunkts-Kurve ermitteln und sie dadurch leicht und mit genügender Genauigkeit zeichnen. Einen Ueberblick über die

Größe der Werte $\frac{x}{s}$ und $\frac{y}{s}$ für verschiedene Werte von Θ gibt Abb. 6, worin der Maßstab für y überhöht ist. Diese Kurven stellen selbst Uebergangsbögen dar, wenn $S = 1$ ist, d. h. wenn x und y mit der Länge des Uebergangsbogens als Einheit gemessen werden.

Verläuft der Uebergangsbogen so nahe der x-Achse, daß man $\sin\vartheta \approx \vartheta$ und $\cos\vartheta \approx 1$ setzen kann, so ergeben die Formeln (12) die Näherungswerte

$$x = \int_0^s \cos\vartheta\, ds \approx s, \qquad y = \int_0^s \sin\vartheta\, ds \approx \int_0^s \vartheta\, ds = S\,\Theta\left(\sigma^5 - \sigma^6 + \frac{2}{7}\sigma^7\right) \quad (14).$$

Die sind die Anfangsglieder der Reihenentwicklungen (13) und ihre Zahlenwerte sind aus der vorstehenden Zahlentafel III zu entnehmen, wenn man nur die ersten Glieder in Betracht zieht. Setzt man $\sigma = \frac{s}{S} = \frac{x}{S}$ in die Formel für y ein, so folgt als Gleichung der Uebergangskurve für hinreichende Nähe an der geraden Fortsetzung der Strecke:

$$y = \frac{\Theta}{S^4}\, x^5 \left(1 - \frac{x}{S} + \frac{2}{7}\,\frac{x^2}{S^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Diese Kurve tritt also in gewissem Sinne an die Stelle der kubischen Parabel.

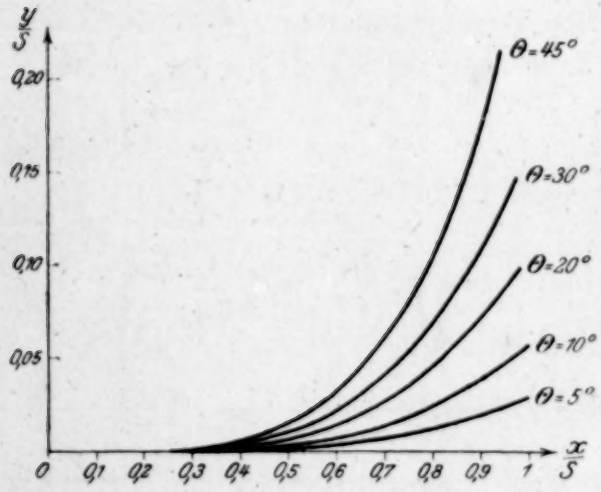


Abb. 6

5. Gang der praktischen Rechnung.

Es sind nur noch ein paar Worte zu sagen über den Rechnungsgang im praktischen Falle. Hier ist gegeben: erstens der Radius R für die Gleismitte; zweitens die hierfür zulässige Höchstgeschwindigkeit v; drittens die Spurweite w; viertens die Höhe H des Schwerpunktes des Fahrzeuges über Schienenmitte. Endlich muß noch fünftens eine die Länge des Uebergangsbogens bestimmende Angabe gemacht sein. Oft ist dies der mittlere Anstieg, worunter das Verhältnis λ der größten Ueberhöhung der äußeren Schiene zur Länge des Uebergangsbogens zu verstehen ist:

$$\lambda = \frac{z_1}{S} = \frac{CK}{S} \quad . \quad . \quad . \quad (16),$$

oder der höchste zulässige Anstieg $\frac{1}{n}$ des Uebergangsbogens, nämlich der in der Mitte des Uebergangsbogens (vergl. Formel 11).

Es ist

$$\lambda = \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Aus diesen Angaben werden zunächst die in den Formeln vorkommenden Konstanten K, S und Θ bestimmt. Hierbei ist K die Krümmung der Projektion der Schwerpunktsbahn im Kreisbogen. Nach Abb. 2 wird, da $\frac{1}{K}$ der zugehörige Krümmungsradius ist,

$$\frac{1}{K} = R - H\sin A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18),$$

wo A der Endwert des Ueberhöhungswinkels α bedeutet. Andererseits folgt aus (2) und (3')

$$\operatorname{tg} A = \frac{Kv^2}{g} = \frac{KV^2}{127} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Man könnte diese beiden Formeln benutzen, um A zu eliminieren und alsdann K aus der entstehenden Gleichung vierten Grades zu bestimmen. Aber diese Mühe lohnt kaum. Denn da $H\sin A$ sehr klein ist, so kann man näherungsweise

$$H\sin A \approx H\operatorname{tg} A \approx H\,\frac{v^2}{127\,R}$$

setzen (nach (1) und (3')) und erhält

$$\frac{1}{K} \approx R - H\,\frac{V^2}{127\,R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Mit dem aus dieser Formel errechneten Näherungswerte von K bestimmt man nach (19) den Winkel A und hat zu untersuchen, ob der Wert $R - H \sin A$, der Formel (18) entsprechend, mit dem Werte $\frac{1}{K}$ genau genug übereinstimmt.

Nach Errechnung des Wertes C nach der Formel (4) ist man in der Lage, auf Grund der Angaben über den größten oder den mittleren Anstieg der äußeren Schiene den Wert von S nach (11) oder (16) zu bestimmen. Die Formel (10) gibt alsdann den Wert von Θ. Nunmehr berechnet man die Krümmung k der Schwerpunktsbahn nach Zahlentafel I und die Ueberhöhung Z der äußeren Schiene nach (4); ferner die Werte von α nach der Formel (2) und die Werte von ϑ nach Zahlentafel II. Zahlentafel III gibt alsbald die Werte x, y für die Koordinaten der Schwerpunktsbahn im Grundriß, während aus (6) die Ueberhöhung z des Schwerpunktes berechenbar ist. Schließlich liefern die Formeln (5) die gesuchten Koordinaten der Gleismitte. Man kann diese Formeln in folgender Form schreiben, die für die zahlenmäßige Behandlung manchmal vorzuziehen ist. Man hat

$$\frac{x_m}{S} = \frac{x}{S} + \mu C_x \qquad \frac{y_m}{S} = \frac{y}{S} - \mu C_y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21),$$

worin μ eine nur von den Abmessungen des Uebergangsbogen abhängige Konstante bedeutet; denn es ist unter Benutzung von (1)

$$\mu C_x = \frac{H}{S} \sin\alpha \sin\vartheta = \frac{HC}{wS} k \sin\vartheta = \frac{HCK}{wS} \varkappa \sin\vartheta,$$

also

$$\mu = \frac{HCK}{wS} = \frac{8}{15} \frac{H}{wn} = \lambda \frac{H}{w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22),$$

wenn man noch (11) und (16) berücksichtigt. C_x und C_y dagegen ändern sich längs der Kurve:

$$C_x = \varkappa \sin\vartheta = \varkappa \left(2\,\Theta\varphi - \frac{4}{3}\,\Theta^3\varphi^3 + \frac{4}{15}\,\Theta^5\varphi^5 - + \ldots\right)$$

$$C_y = \varkappa \cos\vartheta = \varkappa \left(1 - 2\,\Theta^2\varphi^2 + \frac{2}{3}\,\Theta^4\varphi^4 - \frac{4}{45}\,\Theta^6\varphi^6 + - \ldots\right).$$

Für diese Korrektionsglieder gilt folgende Zahlentafel:

Zahlentafel IV.

σ	C_x	C_y
0,1	. . . . .	0,00856
0,2	$0{,}00036\,\Theta$	0,05792
0,3	$0{,}00447\,\Theta$	$0{,}16308 - 0{,}00006\,\Theta^2$
0,4	$0{,}02368\,\Theta - 0{,}00002\,\Theta^3$	$0{,}31744 - 0{,}00089\,\Theta^2$
0,5	$0{,}07812\,\Theta - 0{,}00032\,\Theta^3$	$0{,}50000 - 0{,}00610\,\Theta^2 + 0{,}00001\,\Theta^4$
0,6	$0{,}18755\,\Theta - 0{,}00236\,\Theta^3 + 0{,}00001\,\Theta^5$	$0{,}68256 - 0{,}02576\,\Theta^2 + 0{,}00016\,\Theta^4$
0,7	$0{,}35770\,\Theta - 0{,}01089\,\Theta^3 + 0{,}00010\,\Theta^5$	$0{,}83692 - 0{,}07645\,\Theta^2 + 0{,}00117\,\Theta^4 - 0{,}00001\,\Theta^6$
0,8	$0{,}57110\,\Theta - 0{,}03498\,\Theta^3 + 0{,}00064\,\Theta^5$	$0{,}94208 - 0{,}17309\,\Theta^2 + 0{,}00530\,\Theta^4 - 0{,}00007\,\Theta^6$
0,9	$0{,}79361\,\Theta - 0{,}08475\,\Theta^3 + 0{,}00271\,\Theta^5$	$0{,}99144 - 0{,}31764\,\Theta^2 + 0{,}01696\,\Theta^4 - 0{,}00036\,\Theta^6$
1	$1{,}00000\,\Theta - 0{,}167\;\Theta^3 + 0{,}00833\,\Theta^5$	$1 - 0{,}5\,\Theta^2 + 0{,}0412\,\Theta^4 - 0{,}00139\,\Theta^6$

Für praktische Zwecke wäre es notwendig, die Zahlentafeln III und IV in mehrere Einzeltafeln für verschiedene Werte von Θ aufzuteilen; wir haben einstweilen davon noch Abstand genommen. Selbstverständlich wird man in der Praxis die Zahlentafeln und nicht die Formeln zu benutzen haben.

Es handelt sich nun noch um die Aufgabe, wie man den Uebergangsbogen in eine gegebene Linienführung einzufügen hat (Abb. 7).

Die Linienführung der Gleismitte bestehe aus zwei geraden Strecken, zwischen denen der Kreisbogen AB vom Radius R abgesteckt sei. Der Oeffnungswinkel dieses Kreisbogens sei 2γ, und dies ist auch der Winkel, den die beiden Gleis-

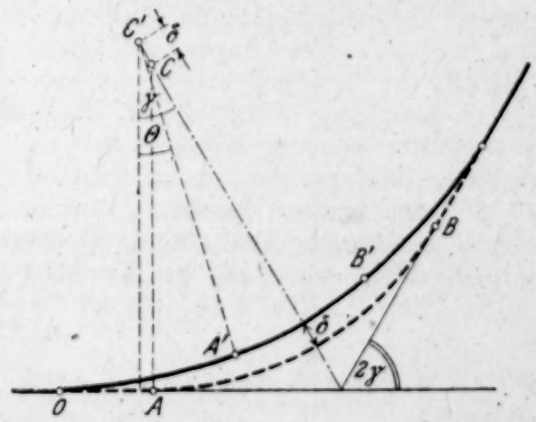


Abb 7

richtungen miteinander bilden. Dieser Kreisbogen ist nun zu ersetzen durch ein aus höchstens drei Teilen bestehendes Kurvenstück, nämlich dem Uebergangsbogen OA', einem möglicherweise einzuschaltenden Kreisstück $A'B'$ von gegebenem Radius R und einem zu OA' spiegelbildlichen, in B' ansetzenden Uebergangsbogen. Die gesamte Anordnung ist symmetrisch zur Halbierungslinie des Winkels 2γ. Es handelt sich darum, erstens die Lage des Anfangspunktes O des Uebergangsbogens, zweitens die des Mittelpunktes des Kreisbogens $A'B'$ anzugeben.

Es sei Θ der Tangentenwinkel des Uebergangsbogens in seinem Endpunkte A', dann ist dies nach den Eigenschaften einer Uebergangskurve auch der Winkel der Kreistangente in A' mit der Abszissenachse. Die Koordinaten von A' bezogen auf O seien X_m, Y_m, sie lassen sich aus den oben gegebenen Angaben nach den Formeln (6) zahlenmäßig berechnen. Ferner sei C der Mittelpunkt des Kreises AB und C' der Mittelpunkt des Bogens $A'B'$; der Abstand CC' werde mit δ bezeichnet. Projiziert man nun die Figur auf eine zur x-Achse senkrechte Richtung, so findet man sofort

$$\delta \cos\gamma + R = Y_m + R\cos\Theta,$$

und durch Projektion auf die x-Achse selbst

$$\overline{OA} - \delta \sin\gamma = X_m - R\sin\Theta.$$

Hieraus ergibt sich zunächst

$$\delta = \frac{Y_m - R(1-\cos\Theta)}{\cos\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23),$$

wodurch die Lage des Kreismittelpunktes C' auf der Winkelhalbierenden bestimmt ist, und weiter

$$\overline{OA} = X_m - R\sin\Theta + \delta\sin\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24),$$

wodurch der Anfangspunkt O des Uebergangsbogens festgelegt werden kann. Es ist klar, daß δ auch die Strecke bedeutet, um die der Kreisbogen aus der ursprünglichen Lage in das Innere des Gleiswinkels verschoben werden muß, damit ein Uebergangsbogen eingeschaltet werden kann. Bezeichnet man den Zentriwinkel des Kreisbogens $A'B'$ mit 2ε, so ist

$$\varepsilon = \gamma - \Theta.$$

Daher muß $\Theta \leq \gamma$ sein, wenn es überhaupt möglich sein soll, einen Uebergangsbogen der oben aufgeführten Eigenschaften einzuschalten. Nun ist nach (10)

$$\Theta = \frac{1}{2} KS \approx \frac{S}{2R}$$

durch die Länge des Uebergangsbogens, und diese wiederum durch den mittleren oder den größten Anstieg der überhöhten Schiene bestimmt.

Man hat daher

$$S \leq 2\gamma R,$$

d. h. jeder der beiden Uebergangsbögen darf höchstens gleich der Länge des Kreisbogens der ursprünglichen Linienführung sein.

Wenn im besonderen ε den Wert Null hat, also $\Theta = \gamma$ ist, so fallen die beiden Punkte A' und B' aufeinander, d. h. die ganze Gleiskurve besteht aus zwei aneinandergesetzten Uebergangsbögen. In diesem Falle hat δ den größten Wert erreicht.

6. Beispiele. Bei den folgenden drei Beispielen ist die Spurweite $w = 1{,}50$ m, die zulässige Höchstgeschwindigkeit $V = 60$ km/st, der Radius im Kreisbogen bezw. der kleinste Krümmungsradius $R = 350$ m, die Höhe des Schwerpunktes auf gerader Strecke $H = 1{,}80$ m. Der Bogen soll zwei zueinander senkrechte Strecken verbinden, also $\gamma = 45^0$.

Das erste Beispiel gibt die Bestimmung des Uebergangsbogens, wenn der größte Anstieg der äußeren Schiene $1 : n = 1 : 300$ gegeben ist; das zweite Beispiel unter sonst gleichen Bedingungen, wenn $1 : n = 1 : 600$ ist.

Beim dritten Beispiel wird unter denselben Bedingungen wie oben verlangt, die beiden zueinander senkrechten Strecken durch zwei aneinandergesetzte Uebergangsbögen zu verbinden, ohne daß ein Kreisbogen zwischengeschaltet wird.

Für alle drei Beispiele ist ferner nach (14) und (15)

$$\frac{1}{K} \approx R - H\frac{V^2}{127\,R} = 350 - \frac{1{,}5\cdot 3600}{127\cdot 350} = 349{,}855 \text{ m},$$

und nach (4)

$$C \approx \frac{w}{127} V^2 - \frac{1{,}5}{127}\cdot 3600 = 42{,}520.$$

Beispiel 1.

Größter Anstieg: $1:n = 1:300$, mittlerer Anstieg $\lambda = \frac{8}{15}\frac{1}{n} = 1:565$, die Länge des Uebergangsbogens $S = \frac{15}{8} CKn = \frac{15 \cdot 42{,}52 \cdot 300}{8 \cdot 349{,}855} = 68{,}364$ m nach (11). Ferner $\Theta = \frac{1}{2} SK = \frac{68{,}364}{2 \cdot 349{,}855} = 0{,}09771 = 5^0\,35'\,53''$ nach (10).

σ	Krümmung der Schwerpunktsbahn k	Ueberhöhung der äußeren Schiene Z	Ueberhöhung der Schienenmitte z_m	Neigungswinkel der Tangente an die Schwerpunktsbahn ϑ	Koordinaten des Schwerpunktes im Grundriß		$x_m - x$	$y - y_m$	$z - z_m$	Koordinaten der Schienenmitte im Grundriß		Ueberhöhung der Schwerpunktsbahn z
					x	y				x_m	y_m	
0	0	0	0	0^0	0	0	0	0	1,800	0	0	1,800
0,1	0,000024	1	0	8″	6,835	0	0	0,001	1,800	6,836	−0,001	1,800
0,2	0,000166	7	3	2′ 6″	13,672	0,002	0	0,008	1,800	13,672	−0,006	1,803
0,3	0,000466	20	10	9′ 10″	20,508	0,012	0	0,024	1,800	20,508	−0,012	1,810
0,4	0,000907	39	20	25′ 6″	27,726	0,044	0	0,046	1,799	27,726	−0,002	1,819
0,5	0,001429	61	30	52′ 28″	34,182	0,119	0,001	0,073	1,799	34,183	0,046	1,829
0,6	0,001951	83	41	$1^0\,32'\,18''$	41,016	0,267	0,003	0,099	1,797	41,019	0,168	1,838
0,7	0,002392	102	51	$2^0\,23'\,32''$	47,850	0,494	0,005	0,122	1,796	47,855	0,372	1,847
0,8	0,002693	114	57	$3^0\,23'\,38''$	54,676	0,838	0,008	0,137	1,795	54,684	0,701	1,852
0,9	0,002834	120	60	$4^0\,28'\,54''$	61,498	1,306	0,011	0,144	1,794	61,507	1,162	1,854
1	0,002859	122	61	$5^0\,35'\,53''$	68,307	1,907	0,014	0,145	1,794	68,321	1,762	1,855
	m^{-1}	mm	mm		m	m	m	m	m	m	m	m

Die Strecke, um die der Kreisbogen aus der ursprünglichen Lage in das Innere des Gleiswinkels verschoben werden muß, wenn beiderseits die errechneten Uebergangsbögen eingefügt werden, ist nach (23)

$$\delta = \frac{Y_m - R(1-\cos\Theta)}{\cos\gamma} = \frac{1{,}762 - 350\,(1 - 0{,}99522)}{0{,}70711} = 0{,}126 \text{ m}.$$

Entfernung des Ansatzpunktes des Uebergangsbogens vom ursprünglichen Ansatzpunkt des Kreisbogens nach (24)

$$\overline{OA} = X_m - R\sin\Theta + \delta\sin\gamma = 68{,}321 - 34{,}142 + 0{,}089 = 34{,}268 \text{ m}.$$

Beispiel 2.

Größter Anstieg: $1:n = 1:600$, mittlerer Anstieg $\lambda = \frac{8}{15}\frac{1}{n} = 1:1120$, Länge des Uebergangsbogens $S = \frac{15 \cdot 42{,}52 \cdot 600}{8 \cdot 349{,}855} = 136{,}728$ m und $\Theta = \frac{136{,}728}{2 \cdot 349{,}855} = 0{,}19542 = 11^0\,17'\,47''$. Da k, Z, z_m und z unabhängig von n sind, so ergeben sich dieselben Werte wie im Beispiel 1.

σ	Neigungswinkel der Tangente an die Schwerpunktsbahn ϑ	Koordinaten des Schwerpunktes im Grundriß		$x_m - x$	$y - y_m$	Koordinaten der Schienenmitte im Grundriß	
		x	y			x_m	y_m
0	0^0	0	0	0	0	0	0
0,1	16″	13,673	0	0	0,001	13,673	−0,001
0,2	4′ 12″	27,346	0,007	0	0,008	27,346	−0,001
0,3	18′ 20″	41,019	0,046	0	0,024	41,019	0,022
0,4	50′ 12″	54,690	0,176	0,001	0,046	54,691	0,130
0,5	$1^0\,44'\,56''$	68,360	0,477	0,002	0,073	68,362	0,404
0,6	$3^0\,4'\,36''$	82,022	1,044	0,006	0,099	82,028	0,945
0,7	$4^0\,47'\,4''$	95,562	1,975	0,010	0,122	95,572	1,853
0,8	$6^0\,47'\,16''$	109,265	3,350	0,016	0,136	109,281	3,214
0,9	$8^0\,57'\,44''$	122,669	5,219	0,022	0,143	122,691	5,076
1	$11^0\,11'\,47''$	136,394	7,612	0,028	0,143	136,422	7,469
		m	m	m	m	m	m

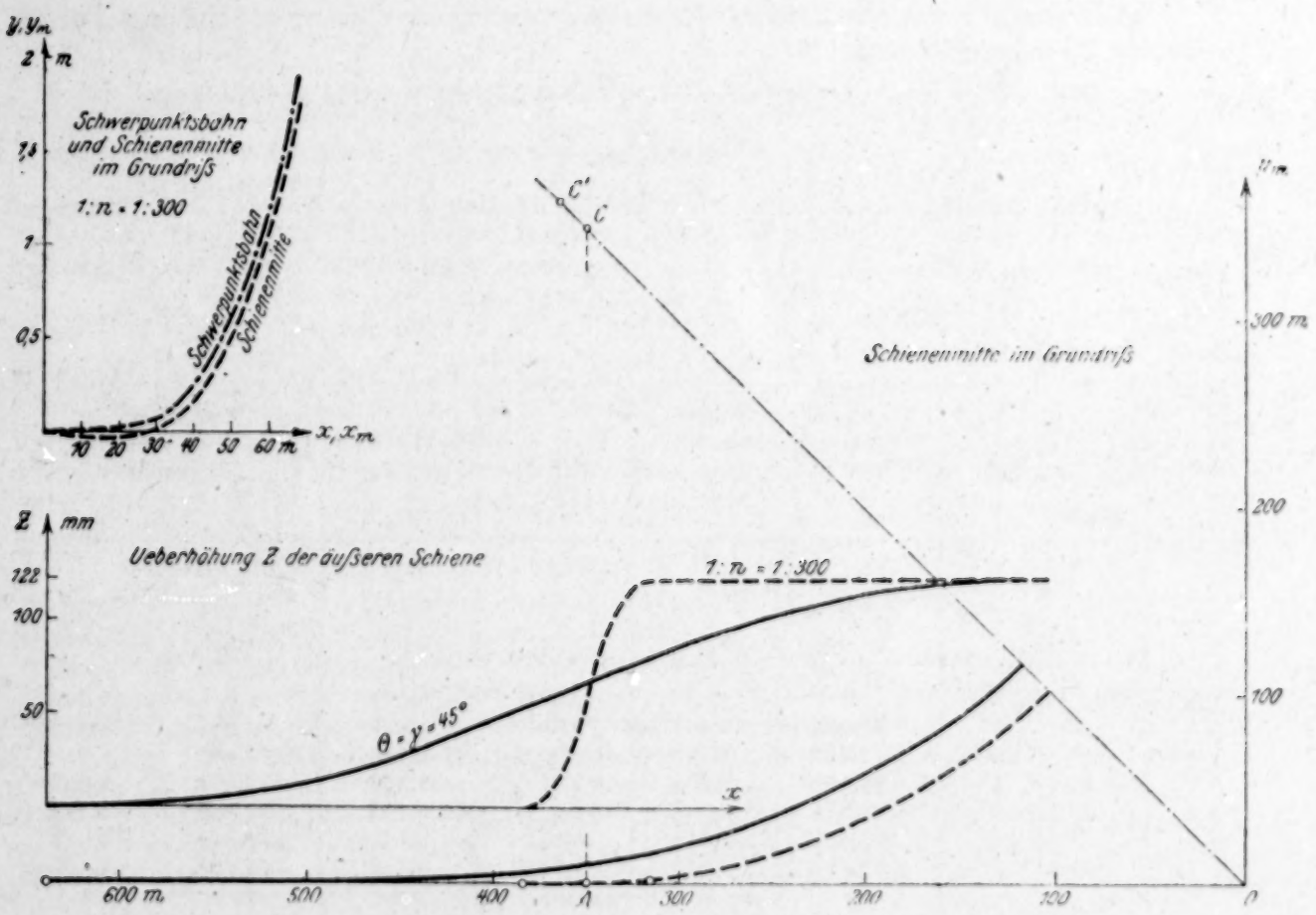
Die Verschiebung des Kreisbogens beträgt $\delta = \frac{7{,}469 - 350 \cdot 0{,}01904}{0{,}70711} = 1{,}139$ m, ferner ist $\overline{OA} = 136{,}422 - 67{,}962 + 0{,}805 = 69{,}265$ m.

Beispiel 3.

Es ist $\Theta = \gamma = 45^0$, $S = \frac{2\,\Theta}{K} = 1{,}57080 \cdot 349{,}855 = 549{,}552$ m, $n = \frac{8\,S}{15\,CK} = 2412$ und $\lambda = \frac{8}{15}\frac{1}{n} = 1:4522$. Die Werte k, Z, z_m und z sind dieselben wie im Beispiel 1.

σ	Neigungswinkel der Tangente an der Schwerpunktsbahn ϑ	Koordinaten der Schwerpunktsbahn im Grundriß		$x_m - x$	$y - y_m$	Koordinaten der Schienenmitte im Grundriß	
		x	y			x_m	y_m
0	0^0	0	0	0	0	0	0
0,1	$1'\,12''$	54,955	0	0	0,001	54,955	− 0,001
0,2	$16'\,46''$	109,910	0,110	0	0,008	109,910	+ 0,102
0,3	$1^0\,13'\,56''$	164,86	0,758	0,001	0,024	164,861	0,734
0,4	$3^0\,21'\,52''$	219,77	2,858	0,003	0,046	219,773	2,812
0,5	$7^0\,2'\,12''$	274,51	7,705	0,009	0,072	274,519	7,633
0,6	$12^0\,21'\,52''$	328,67	16,821	0,021	0,097	328,691	16,724
0,7	$19^0\,13'\,56''$	381,56	31,670	0,040	0,115	381,600	31,555
0,8	$27^0\,16'\,46''$	432,02	53,279	0,063	0,122	432,083	53,157
0,9	$36^0\,1'\,12''$	478,79	82,024	0,085	0,117	478,875	81,907
1	45^0	520,54	117,730	0,103	0,103	520,643	117,627
		m	m	m	m	m	m

Die Verschiebung des Kreisbogens beträgt $\delta = \frac{117{,}627 - 102{,}510}{0{,}70711} = 21{,}379$ m, ferner ist $\overline{OA} = 520{,}643 - 247{,}490 + 15{,}117 = 288{,}270$ m.



7. Auftreten einer Ausbuchtung nach außen. Aus den Formeln (5) geht die merkwürdige Folgerung hervor, daß y_m auch negative Werte annehmen kann, d. h., daß die Gleismitte eine Ausbuchtung nach dem Aeußeren des Uebergangsbogens aufweist, wie in Abb. (3) angedeutet ist. Die Beispiele lassen dies auch deutlich erkennen. Auf den ersten Blick mag diese auffallende Tatsache der Anschauung zu widersprechen scheinen. Man muß aber beachten, daß einerseits durch die sogleich an die gerade Strecke allmählich ansetzende Ueberhöhung der Schwerpunkt nach innen kippt, andrerseits die Bahn des Schwerpunkts im Grundriß die gerade Strecke von zweiter Ordnung berühren soll. Diese beiden Bedingungen sind eben nur verträglich, wenn gleich zu Beginn des Bogens die Gleisführung schwach nach außen gebogen wird.

Uebrigens ist diese Ausbuchtung in den praktisch vorkommenden Fällen nur sehr klein. Um über ihre Größe einen Aufschluß zu erlangen, nehme man ϑ so klein an, daß $\cos\vartheta = 1$, $\sin\vartheta = \vartheta$ gesetzt werden darf, und benutze die zweite Formel (14).

Dann liefert die zweite Formel (21) mit Rücksicht auf (4) und (8)

$$y_m = \frac{H K C}{w}\left[p\left(\sigma^5 - \sigma^6 + \frac{2}{7}\,\sigma^7\right) - (10\,\sigma^3 - 15\,\sigma^4 + 6\,\sigma^5)\right]$$

worin

$$p = \frac{w S^2}{2 C H}$$

bedeutet. Es werde nun der Wert von σ ermittelt, für den $-y_m$ am größten wird. Aus $\frac{d y_m}{d\sigma} = 0$ folgt

$$p\,(5\,\sigma^4 - 6\,\sigma^5 + 2\,\sigma^6) = 30\,\sigma^2 - 60\,\sigma^3 + 30\,\sigma^4,$$

oder da der Wert $\sigma = 0$ hier nicht in Frage kommt,

$$p = 30\,\frac{(1-\sigma)^2}{\sigma^2\,(5 - 6\,\sigma + 2\,\sigma^2)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25);$$

der Nenner verschwindet für keinen reellen Wert $\sigma \neq 0$. Die in dieser Gleichung ausgedrückte Beziehung zwischen σ und p ist in der Zahlentafel V für $0 < \sigma < 1$ zahlenmäßig dargestellt. Um nun den praktisch größtmöglichen Wert von $-y_m$ zu ermitteln, beachte man zunächst, daß wegen $S = \frac{CK}{\lambda}$ sich p in der Form

$$p = \frac{w C K^2}{2 H \lambda^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

schreiben läßt, daher wird der Faktor auf der rechten Seite von y_m:

$$\frac{H K C}{w} = \frac{H C}{w}\,\lambda\,\frac{\sqrt{2 p H}}{\sqrt{w C}},$$

also wegen (4)

$$\frac{H K C}{w} = \frac{H V \lambda}{w}\sqrt{\frac{2 p H}{127}};$$

mithin wird der größte Wert von $-y_m$ ausgedrückt durch

$$y_m^* = \sqrt{\frac{2}{127}}\,\frac{H^{3/2} V \lambda}{w}\,\psi(\sigma) \qquad \ldots\ldots \quad (27),$$

wo

$$\psi(\sigma) = \sqrt{p}\left[p\left(\sigma^5 - \sigma^6 + \frac{2}{7}\,\sigma^7\right) - (10\,\sigma^3 - 15\,\sigma^4 + 6\,\sigma^5)\right]$$

gesetzt worden ist, und man sich darin den Ausdruck (25) für p eingesetzt denken muß. Uebrigens folgt aus (9)

$$\vartheta = S K \varphi(\sigma) = \frac{2\lambda H}{w}\,p\varphi(\sigma) \qquad \ldots\ldots \quad (28).$$

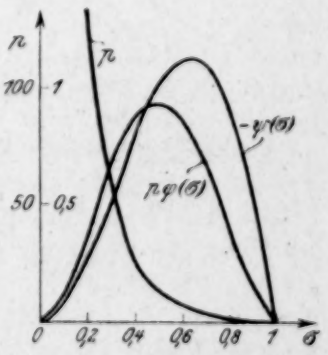


Abb. 8

Die vorstehenden Formeln erlauben, für jeden Uebergangsbogen, für den die Stücke K, λ, H, w, V gegeben sind, zunächst p nach (26) zu berechnen, alsdann nach der Zahlentafel V (vergl. Abb. 8) die zugehörigen Werte von σ, $\psi(\sigma)$, $p\varphi(\sigma)$ und damit y_m^* und ϑ zu bestimmen.

Der praktisch größtmögliche Wert von $-y_m$ ergibt sich jetzt durch folgende Ueberlegungen. Man hat in der Formel (27) für H, V, λ und $\psi(\sigma)$ möglichst große Werte, für w einen möglichst kleinen zu nehmen. Für Vollbahnen käme $w = 1{,}5$ m, $H = 2$ m, $V = 115$ km/st, $\lambda = 1 : 300$ in Frage; für Nebenbahnen $w = 0{,}75$, $H = 2$ m,

Zahlentafel V.

σ	p	$-\psi(\sigma)$	$pq(\sigma)$
0	∞	0	0
0,1	549,8	0,0853	0,1210
0,2	123,7	0,2848	0,3835
0,3	48,32	0,5290	0,6615
0,4	23,12	0,7900	0,8642
0,5	12,00	0,9897	0,9374
0,6	6,289	1,109	0,8640
0,7	3,096	1,070	0,6616
0,8	1,267	0,8815	0,3840
0,9	0,304	0,5138	0,1562
1	0	0	0

$V = 30$ km/st, $\lambda = 1:200$. Der größte Wert von $-\psi(\sigma)$ ist 1,11 und von $pq(\sigma)$ 0,94. Daraus ergibt sich

für Vollbahnen $-y_m^* \leq 0{,}1$ m; für Nebenbahnen $-y_m^* \leq 0{,}01$ m.

Die Werte werden praktisch kaum erreicht werden. In den meisten Fällen wird es daher genügen, von der Ausbuchtung ganz abzusehen und sie durch die gerade Streckenführung zu ersetzen, natürlich mit Berücksichtigung der Schienenüberhöhung.

Die größten hier sich ergebenden Werte von ϑ sind für die beiden Fälle $\leq 30'$ und $\leq 1^\circ 30'$, liegen also in dem Gebiet, für das die Annahme $\sin\vartheta = \vartheta$, $\cos\vartheta = 1$ erlaubt ist.

8. Anhang. Es soll hier die oben benutzte Beziehung abgeleitet werden, die besteht zwischen der (ersten) Krümmung einer Raumkurve, der Krümmung ihrer Projektion auf eine Ebene, der Krümmung ihres durch den projizierenden Zylinder bestimmten Längenprofils und dem Neigungswinkel zwischen diesem Längenprofil und der Basis des Zylinders.

Es sei P^* mit den Koordinaten (x, y, z) ein Punkt der betrachteten Raumkurve, P seine Projektion auf die xy-Ebene. Das Quadrat des Bogenelements für die Raumkurve ist

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

und für ihre Projektion auf die xy-Ebene

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30),$$

so daß

$$dl^2 = ds^2 + dz^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Die (erste) Krümmung k^* der Raumkurve und die Krümmung k der Projektion sind gegeben durch

$$k^{*2} = \left(\frac{d^2x}{dl^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dl^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dl^2}\right)^2, \qquad k^2 = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2.$$

Nun ist

$$\frac{dx}{dl} = \frac{dx}{dl} : \frac{dl}{ds}, \quad \frac{d^2x}{dl^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{dl}\right) : \frac{dl}{ds} = \left(\frac{dl}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2l}{ds^2}\right) : \left(\frac{dl}{ds}\right)^3.$$

Entsprechende Formeln gelten für die Differentialquotienten von y und z. Daher wird

$$\left(\frac{dl}{ds}\right)^6 k^{*2} = \left(\frac{dl}{ds}\right)^2 \left(k^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right) - 2\,\frac{dl}{ds}\frac{d^2l}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right) + \left(\frac{d^2l}{ds^2}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right).$$

Aber aus (29) folgt durch Differentiation

$$\frac{dl}{ds}\frac{d^2l}{ds} = \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}$$

und aus (30)

$$0 = \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}.$$

Daher wird, wenn man noch (30) berücksichtigt,

$$\left(\frac{dl}{ds}\right)^6 k^{*2} = \left(\frac{dl}{ds}\right)^2 \left(k^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2l}{ds^2}\right)^2\right) = \left(\frac{dl}{ds}\right)^2 k^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 \left(\left(\frac{dl}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right)$$

oder

$$\left(\frac{dl}{ds}\right)^6 k^{*2} = \left(\frac{dl}{ds}\right)^2 k^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2.$$

Denkt man sich den projizierenden Zylinder aufgewickelt, so daß seine Basis in eine Gerade übergeht, und ist ε der Neigungswinkel des so entstehenden Längenprofils gegen diese Gerade, $\overline{k}$ seine Krümmung, so ist

$$\cos\varepsilon = \frac{ds}{dl}, \qquad \overline{k} = \cos^3\varepsilon \frac{d^2z}{ds^2};$$

also folgt aus der vorhergehenden Formel

$$k^{*2} = \cos^4\varepsilon \cdot k^2 + \overline{k}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*).$$

Aus dieser auch sonst bemerkenswerten Gleichung ergibt sich, daß, wenn erstens der Anstieg ε des Längenprofils gegen die Grundebene genügend klein, und zweitens das Längenprofil genügend flach, d. h. seine Krümmung k genügend klein ist,

$$k^{*2} \approx k^2, \text{ d. h. } k^* \approx k$$

gesetzt werden kann. Wegen

$$\cos^4\varepsilon = \frac{1}{\left(\frac{dl}{ds}\right)^4} = \frac{1}{\left(1+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right)^2} = 1 - 2\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 + \ldots,$$

$$\overline{k}^2 = \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 \cos^6\varepsilon$$

ist das gewiß zulässig, falls $\left(\frac{dz}{ds}\right)^2$ und $\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2$ für die Rechnung nicht mehr in Frage kommen. Das trifft bei den praktisch vorkommenden Uebergangsbögen stets zu, und damit ist die in **2** gemachte Annahme begründet.

9. Literatur und kritische Bemerkungen. Von der vorliegenden sehr zahlreichen Literatur kommt für die im vorstehenden erörterten Fragen wohl nur die lesenswerte Arbeit[1]) von K. Watorek, Uebergangsbogen, Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens 1907, S. 186 und 205, in Betracht. Der Verfasser beschränkt sich zwar auch auf die erste Annäherung, bei der die Bogenlänge s durch die Abszisse x ersetzt wird, und verschließt sich daher von vornherein die Möglichkeit, den Uebergangsbogen beliebig weit zu konstruieren; aber hiervon abgesehen, wählt er für die Veränderung der Krümmung k der Projektion der Schwerpunktsbahn längs der Kurve ganz richtig ebenfalls eine Funktion fünften Grades, wie sie hier benutzt worden ist. Auffallenderweise setzt er jedoch die Ueberhöhung der äußeren Schiene proportional der Krümmung der Schienenmitte statt der Krümmung der Schwerpunktsbahn (vergl. die Formel (4) in **3**) und wird dadurch gezwungen, zwischen einer »wirklichen« und einer »theoretisch nötigen« Ueberhöhung zu unterscheiden. Den Unterschied sucht er möglichst klein zu halten, indem er einem gegebenen Radius des Kreisbogens eine bestimmte Steigung des Uebergangsbogens zuordnet. Die Notwendigkeit und der Zweck dieser Betrachtung ist uns nicht verständlich geworden; bei einer richtig angesetzten Beziehung zwischen Ueberhöhung und Krümmung hat man dazu keine Veranlassung.

In der vor kurzem erschienenen Schrift von R. Petersen, die Gestaltung der Bogen im Eisenbahngleise, Berlin und Wiesbaden, C. W. Kreidel, 1920, in der eine Reihe praktischer Erfahrungen verwertet worden sind, weist der Verfasser mit Recht darauf hin, daß die bisher gebauten Uebergangsbögen zu kurz seien, um einen genügend sanften Anstieg der äußeren Schiene zu gewährleisten. Er fordert auf Grund von Beobachtungen, daß die Länge des Uebergangsbogens in Metern mindestens so groß sein soll, als die Fahrgeschwindigkeit in km/st angibt. Diese Forderung zeigt aufs deutlichste, daß sich die bisherige, die Rechnung vereinfachende Annahme, man könnte die Bogenlänge durch die Abszisse ersetzen, nicht mehr aufrecht erhalten läßt. Petersen empfiehlt nun, »Richtungswechsel bis 48° aus kubischen Parabeln zu formen, dann erst Kreisbögen einzufügen«, und um den Anschluß der kubischen Parabel an den Kreisbogen zu gewinnen, bestimmt er ihre Konstante so, daß im Anschlußpunkte der Krümmungsradius der kubischen Parabel gleich dem Radius des Kreisbogens wird. Hiergegen kann man geltend machen, daß die kubische Parabel überhaupt nur soweit eine angenäherte Lösung des Problems darstellt, als ihr Bogen flach genug bleibt, daß die Bogenlänge durch die Abszisse ersetzt werden kann. Wie weit das erlaubt ist innerhalb der zulässigen Grenzen, hatsc hon Helmert, Die Uebergangskurven für Eisenbahngleise, Aachen 1872, S. 12, angegeben. Darüber hinaus ist die kubische Parabel auch als Näherungslösung nicht mehr zu benutzen.

Charlottenburg, Juni 1921. 78

[1]) Den Hinweis auf diese Literaturstelle verdanken wir Hrn. C. Dolezalek.

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Die numerische Bearbeitung von partiellen Differentialgleichungen in der Technik.

Von **H. HENCKY** in Dresden.

Mit dem Ausbau der Festigkeitslehre und überhaupt der technischen Physik hat sich der für die Technik in Betracht kommende mathematische Problemkreis wesentlich erweitert. Es sind vor allem die sogenannten Randwertprobleme, die besondere Bedeutung für die Technik erlangt haben. Naturgemäß hat man zunächst das wissenschaftliche Rüstzeug zur Bewältigung dieser Aufgaben der klassischen Theorie der Differentialgleichungen zu entnehmen versucht. Dabei zeigte sich indessen bald, daß die bisherigen Methoden nicht ausreichen, um die Lösung eines Randwertproblems unter allen Umständen zu erzwingen. Dies liegt an zwei Umständen. Die in der Technik vorkommenden Randbedingungen nehmen wenig Rücksicht auf unsere analytischen Ausdrucksmittel. Betrachten wir ein Beispiel aus der Theorie der Wärmeleitung: Gegeben sei an einer Oberfläche innerhalb einer geschlossenen Kurve etwa die Temperatur, außerhalb dieser Kurve aber der Temperaturgradient oder eine Beziehung, die den Gradienten enthält. Dann führt die Lösung auf eine Integralgleichung, die nur in seltenen speziellen Fällen eine Lösung in geschlossener Form oder durch explicite angebbare Reihenentwicklung gestattet. Wir sind also hinsichtlich der Randbedingungen schon beschränkt in unseren Möglichkeiten, sobald wir an den klassischen Hilfsmitteln, geschlossenen Lösungen, Reihenentwicklungen usf. festhalten.

Aber auch die Darstellung der Funktionen selbst stößt oft auf unüberwindliche Schwierigkeiten. Bekanntlich ist ein Haupthilfsmittel in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen die Darstellung durch Fouriersche Reihen. Aber viele Randwertprobleme führen auf Funktionen, die den Stetigkeitsbedingungen einer Fourier-Entwicklung nicht genügen. Daß es sich dabei durchaus nicht um physikalisch bedeutungslose Funktionen handelt, dafür liefert ein klassisches Beispiel die »schleichende« Bewegung einer zähen Flüssigkeit um einen Zylinder im unbegrenzten Strom. Nehmen wir das Zeichen Δ für die Differentialinvariante $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, so gehorcht die Stromfunktion ψ der biharmonischen Differentialgleichung $\Delta\Delta\psi = 0$. Die Randbedingungen am Zylinder schreiben sich in ebenen Polarkoordinaten $\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$ und $\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = 0$, entsprechend der Bedingung, daß am Umfang des Zylinders die Flüssigkeit keine Geschwindigkeit hat. Im Unendlichen wird $\psi = U r \sin\vartheta$. (U Geschwindigkeit des ungestörten Stromes.) Nach einer von Rayleigh zuerst angegebenen Analogie [1]) können wir die Stromfunktion als Ordinate einer dünnen Platte auffassen, die im unendlich Fernen entsprechend $\psi = U r \sin\vartheta$ gestaltet und mit einem starren, eben aufgesetzten Zylinder fest verbunden ist. Biegt man die Zylinderachse ein wenig quer zur Stromrichtung heraus, bis die Randbedingungen erfüllt sind, so hat man in der elastischen Fläche der verbogenen Platte ein genaues Modell der Stromfunktion. Da eine ebene Platte unter allen Umständen diese Verbiegung ausführen kann, muß es auch eine entsprechende Funktion $\psi = f(r, \vartheta)$ geben. Setzt man aber $\sum_{n=1}^{n=\infty} \Phi_n(r) \sin n\vartheta$, so zeigt sich, daß sich die Randbedingungen nicht befriedigen lassen. Bekanntlich hat Stokes aus diesem Grunde diese stationäre Bewegung für unmöglich gehalten. Aehnliche Beispiele ließen sich aus der Theorie der Wärmeleitung anführen, wo häufig in analoger Weise die Zerlegung in Besselsche Funktionen vorgenommen wird. Versagen so schon bei linearen Randwertproblemen die bekannten Methoden, so ist das in noch höherem Maße bei nichtlinearen Randwertaufgaben der Fall.

---

[1]) Rayleigh, Scientific papers Bd. IV. On the flow of viscous liquids, especially in two dimensions. S. 78–93.

1. Das Verfahren der Differenzengleichung. Eine für die Technik und überhaupt für den praktischen Rechner geeignete Methode muß in Hinsicht auf Denkökonomie den weitgehendsten Anforderungen gerecht werden. Ein Verfahren, das in diesem Sinne an Brauchbarkeit kaum etwas zu wünschen übrig läßt, ist die in den letzten Jahren mehr und mehr zur Geltung kommende Methode des Ueberganges von Differential- zu Differenzenzengleichungen. Daß man auf diesem Wege im allgemeinen Ergebnisse von hinreichender Genauigkeit erhält, liegt daran, daß schon bei verhältnismäßig großen Differenzen sich der Differentialquotient nur unwesentlich vom Differenzenquotienten unterscheidet. Man kann sagen, daß sich die durch die Differenzengleichungen und die ebenfalls in Differenzenform geschriebenen Randbedingungen definierte Funktion zur Lösung der Differentialgleichung so verhält, wie das Bild einer camera obscura zu dem Bild, das eine photographische Linse entwirft. Es verschwinden zwar die scharfen Konturen, aber die wesentlichen Umrisse bleiben erhalten. Allerdings darf man in der Nähe einer singulären Stelle bei Anwendung endlicher Differenzen nicht ein quantitativ bis auf wenige vH richtiges Resultat erwarten. In vielen Fällen kommt übrigens die Störung durch eine singuläre Stelle nicht zur Geltung. So erhält man z. B. bei einer unendlich langen durch eine Einzellast P in der Mitte beanspruchten Platte nach der genauen Lösung[1]) die Durchbiegung $\frac{P a^2}{N}$ 0,0169, mittels des Differenzenverfahrens $\left(\Delta x = \Delta y = \frac{a}{4}\right)$ aber $\frac{P a^2}{N}$ 0,0197, also einen Fehler von 15 vH, trotzdem die nach der genauen Theorie unendlich große Momentensumme an der belasteten Stelle beim Differenzenverfahren durch einen endlichen Wert ersetzt ist, so daß man eigentlich eine zu kleine Durchbiegung erwarten könnte.

Ein Hauptvorzug des Rechnens mit endlichen Differenzen vor dem analytischen Verfahren liegt darin, daß beim letzteren zwar die Funktion selbst möglichst genau dargestellt wird, aber nicht immer zugleich ihre Ableitung gewonnen wird. Beim Differenzenverfahren erstreckt sich dagegen die Näherung in der Regel auf die Funktion und auf ihre Ableitungen, ein Umstand, der gelegentlich von großer Bedeutung werden kann. Während eine Lösung in Form einer Reihenentwicklung[2]) durch Differentiation ihre Konvergenz manchmal verliert, so daß zum Beispiel bei Verwendung einer Spannungsfunktion die Spannungen sich sehr schlecht oder gar nicht berechnen lassen, liefert das Differenzenverfahren in vielen Fällen die Spannungen mit größerer Genauigkeit als die Funktion, deren Ableitungen die Spannungen ergeben.

Die bekannten zeichnerischen Verfahren zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen stützen sich zum Teil auf das Rechnen mit endlichen Differenzen. Hier ist eine Reihe wichtiger und praktisch brauchbarer Methoden[3]) gefunden worden, so daß es uns heute wohl in allen Fällen möglich ist, für eine gewöhnliche Differentialgleichung eine numerische Lösung zu erzwingen. Merkwürdigerweise hat man lange gezögert, dieses fruchtbare Verfahren in systematischer Weise auf die partiellen Differentialgleichungen auszudehnen. Den Anfang in der Elastizitätstheorie hat wohl Runge gemacht mit einer Behandlung des Torsionproblems. In der Hydrodynamik haben sich besonders englische Forscher[4]) zuerst dieses Verfahrens bedient. Die große Anzahl der Unbekannten bei mehrdimensionalen Problemen hat abschreckend gewirkt und die rasche Entwicklung und Ingebrauchnahme der Methode etwas verzögert. In der Tat ist zur praktischen Anwendung noch ein weiterer Schritt nötig, und dies ist die Uebertragung des im Bauwesen längst gebräuchlichen Verfahrens der Einflußlinien oder wenn man will, die Konstruktion Greenscher Funktionen in Differenzenform[5]).

2. Beispiel der elastischen Platte. Zunächst wollen wir auseinandersetzen, in welcher Weise die Uebersetzung der Randbedingungen in die Differenzensprache erfolgen muß. Als Beispiel betrachten wir einen beiderseits eingespannten, gleichmäßig belasteten Balken und behandeln dieses Problem mit dem einfachsten Integrationsmechanismus, dem Seilpolygon.

---

[1]) Vergl. Nádai, Der Bauingenieur 1921, S. 299, Formel 1.

[2]) Es ist dabei an Fouriersche oder nach der Ritzschen Methode gewonnene Reihen gedacht.

[3]) Vergl. hierzu die Artikel in der Encykl. der math. Wiss., R. Mehmke, Numerisches Rechnen, sowie Runge und Willers, Numerische und graphische Integration.

[4]) Richardson, Phil. Mag. 1908, 6 serie, vol XII.

[5]) Vergl. etwa P. Funk, Die linearen Differenzengleichungen. Berlin, Springer 1920, S. 35 ff.

Die erste Differenz für einen Punkt n definieren wir durch die Formel

$$(\Delta^1 z)_n = \frac{z_{n+1} - z_n + z_n - z_{n-1}}{2} = \frac{z_{n+1} - z_{n-1}}{2};$$

Abb. 1

die zweite Differenz wird

$$(\Delta^2 z)_n = z_{n-1} - 2 z_n + z_{n+1}.$$

Ist (Abb. 1) die Ordinate $z_0 = 0$, z_1 die Ordinate im Abstand λ, z_2 die Ordinate im Abstand 2λ, so können wir nach dem Taylorschen Satz entwickeln und bekommen

$$z_1 = \frac{\lambda}{1!}\left(\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)_0 + \frac{\lambda^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \nu^2}\right)_0 + \frac{\lambda^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial \nu^3}\right)_0$$

mit Vernachlässigung des höheren Gliedes. Bei Einspannung ist nur $\frac{\partial z}{\partial \nu} = 0$ zu setzen. Die Differentialquotienten $\frac{\partial^2 z}{\partial \nu^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial \nu^3}$ ersetzt man durch die entsprechenden Differenzenquotienten, wodurch man die einfache Formel $z = \frac{1}{2}(\Delta^2 z)_0 + \frac{1}{6}(\Delta^2 z)_0$ erhält. Bei Beschränkung auf das erste Glied wird

$$z = \frac{1}{2}(\Delta^2 z)_0.$$

Bei Berücksichtigung des zweiten Gliedes erhält man nach einfacher Umformung

$$z_1 = \frac{1}{3}(\Delta^2 z)_0 + \frac{1}{6}(\Delta^2 z)_1.$$

Die Differentialgleichungen des Problems

$$\frac{d^2 M}{d\nu^2} = -p, \qquad \frac{d^2 z}{d\nu^2} = -\frac{M}{EJ}$$

gehen über in die Differenzengleichungen

$$\Delta^2 M = -p\lambda^2, \qquad \Delta^2 z = -\frac{M\lambda^2}{EJ}.$$

Als statisch unbestimmte Größe betrachten wir jetzt zweckmäßig die zweite Differenz $(\Delta^2 z)_0$ und ermitteln mit $z_1 = \frac{1}{2}(\Delta^2 z)_0$ nach einfacher Rechnung als Randmoment $\frac{p l^2}{12{,}8}$, als Mittelmoment $\frac{p l^2}{21{,}3}$; mit $z_1 = \frac{1}{3}(\Delta^2 z)_0 + \frac{1}{6}(\Delta^2 z)_1$ erhalten wir die schon genaueren Werte $\frac{p l^2}{11{,}6}$ und $\frac{p l^2}{25{,}6}$. Die genauen Werte sind bekanntlich $\frac{p l^2}{12}$ und $\frac{p l^2}{24}$. Man sieht, welcher Verfeinerung die Differenzenrechnung selbst bei ganz großen Differenzen $\left(\lambda = \frac{l}{4}\right)$ fähig ist. Das Verfahren läßt sich natürlich auf mehrdimensionale Probleme ohne weiteres übertragen.

Es ist das Verdienst von Marcus[1]), zuerst darauf hingewiesen zu haben, daß die elastische Membran das Analogon der Seilkurve ist und daß das elastische Gewebe, welches beim Uebergang zu endlichen Differenzen entsteht, zu allen Konstruktionen verwendbar ist, welche mit dem Seilpolygon möglich sind, also auch zur Berechnung von ebenen Platten, die ja das Gegenstück zum Balken bilden. Marcus hat auch gezeigt, daß dieses Verfahren auch auf krummlinige, besser polygonale, Netze übertragen werden kann. Ebenso hat Marcus gezeigt, daß die Ordinaten des elastischen Gewebes bei gleicher Belastung verhältnismäßig unabhängig sind von der Maschenweite. Gerade dieser Umstand ist es, der das Verfahren zu einem der wirksamsten Hilfsmittel bei der Definition von Funktionen zu machen verspricht, die schwer zu lösenden Differentialgleichungen genügen.

Von der größten Bedeutung ist es natürlich für die Anwendung, daß man die Ordinaten des Gewebes nach einem einfachen Verfahren ermitteln kann. Eine gerade zur Berechnung von Einflußgittern ausgezeichnete Methode hat Liebmann[2]) angegeben.

---

[1]) Marcus, Armierter Beton 1919, S. 107 u. f. Vgl. a. den Bericht von L. Föppl, diese Zeitschr. 1, 1921, S. 466 bis 481.

[2]) Liebmann, Sitzungsberichte der bayer. Akad. der Wissenschaften Math. phys. Klasse 1918, S. 385—416.

Wir verwenden am besten quadratische Maschen, weil mit ihnen die Differenzengleichungen einen besonders einfachen Charakter annehmen. Ist $\Delta W = -\frac{q}{H}$ die Gleichung der Membran, so gilt für jeden Knotenpunkt des Gewebes die Differenzengleichung $\Delta_x^2 W + \Delta_y^2 W = -\frac{q\lambda^2}{H}$ oder (s. Abb. 2)

$$W_a - 2W_m + W_b + W_c - 2W_m + W_d = -\frac{q\lambda^2}{H},$$

d. h. für den belasteten Punkt $W_m = \frac{1}{4}\left\{\sum_a^d W + \frac{q\lambda^2}{H}\right\}$,

» » unbelasteten » $W_m = \frac{1}{4}\sum_a^d W$.

Daß dieses Gleichungssystem für das Verfahren der Iteration geradezu geschaffen ist, bedarf keiner Erläuterung. Es läßt sich selbst dann anwenden, wenn unendlich viele Ordinaten zu bestimmen sind, sobald nur die Ordinaten monoton abnehmen, wie dies bei Einflußgittern stets der Fall ist.

Nach dem Maxwellschen Satz ist die Durchbiegung an einem Punkt i infolge einer Last an einem gewissen anderen Punkt k ebenso groß wie die Durchbiegung am Punkt k, wenn die Last nach i gebracht wird. Haben wir also die Durchbiegungen der Gitterpunkte für eine Last an einem bestimmten Punkt, so brauchen wir für irgend eine beliebige Belastung nur die Lasten mit den zugehörigen Ordinaten des Einflußgitters zu multiplizieren, um die Durchbiegung für den betrachteten Punkt zu finden.

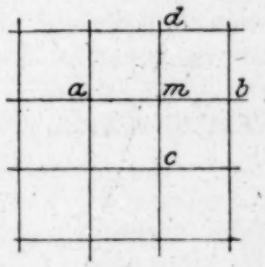


Abb. 2

Wir wollen nun sehen, wie sich nach diesem Verfahren die Berechnung einer z. B. allseitig eingespannten Platte gestaltet.

Die Differentialgleichungen in der Marcusschen Zerlegung lauten:

$$\Delta z = -\frac{M}{N}, \quad \Delta M = -p,$$

wobei $N = \frac{m^2 EJ}{m^2 - 1}$. M bedeutet die Summe der Momente nach zwei senkrechten Richtungen (bis auf einen konstanten Koeffizienten).

Man rechnet zunächst die Durchbiegungen der freigelagerten Platte (Abb. 3), wobei wir die halbe Seite in 3 Teile einteilen wollen, durch zweimalige Anwendung des elastischen Gewebes. Sodann setzt man $p = 0$ und wählt die Krümmungen an den Stellen a, b, c als statisch Unbestimmte, setzt der Reihe nach $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 1$ für die Punkte a, b, c und berechnet nach dem Liebmannschen Mittelwertverfahren das Einflußgitter. Die wirklichen Ordinaten ergeben sich durch Kombination aus den 4 Einflüssen p und a, b, c, die statisch Unbestimmten ergeben sich aus derselben Randbedingung, deren wir uns bereits beim eingespannten Balken bedient haben.

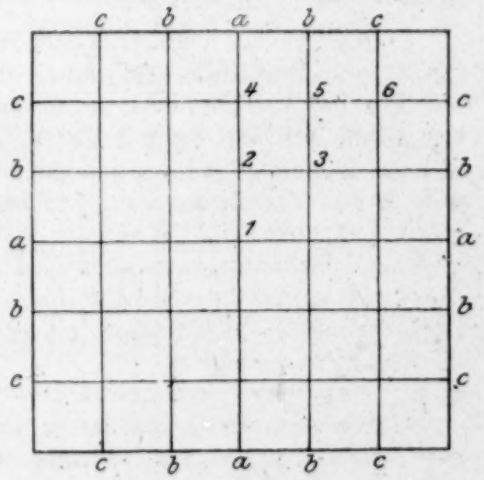


Abb. 3

Der große Wert des Einflußgitters zur Lösung von Differentialgleichungen tritt besonders hervor, wenn es sich um die Integration von nichtlinearen Differentialgleichungen handelt. Sowohl in der Elastizitätstheorie wie in der Hydrodynamik führen die höheren Annäherungen auf nichtlineare Differentialgleichungen, so daß die Entwicklung von numerischen Methoden dafür eine der wichtigsten Aufgaben der praktischen Analysis darstellt. Wir wollen uns hier auf zwei Beispiele beschränken, nämlich auf die Berechnung der freigelagerten rechteckigen Platten mit großer Ausbiegung und auf die ebene Strömung reibender Flüssigkeiten.

Bezeichnen wir mit U die Spannungsfunktion so sind die Spannungsresultanten in einer Platte durch die Formeln gegeben $T_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$; $T_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$; $T_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$.

Ist

$$p' = -\left(T_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\, T_{xy} \frac{\partial x \partial y}{\partial^2 z}\right),$$

so sind die simultanen Differentialgleichungen zu befriedigen.

$$N \Delta \Delta z = p - p'; \qquad J \Delta U = -Eh \left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} = \varkappa.$$

Wegen T_x bezw. $T_y = T_{xy} = 0$ an den Rändern muß sein

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \text{ für } x = \pm a, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \text{ für } y = \pm b.$$

U ist also als Ordinate einer eingespannten Platte aufzufassen, wenn man die rechte Seite der obigen Gleichung als Belastung auffaßt. Wir rechnen nun die Einflußgitter für die freigelagerte wie für die eingespannte Platte in der beschriebenen Weise. Sodann nehmen wir einen Satz Ordinaten (bei quadratischer Platte kommen nur 6 in Frage bei $\lambda = \frac{a}{3}$) an und bestimmen die Gewichte z durch Differenzenbildung. Dadurch sind uns wieder die U-Werte gegeben und auch p' können wir jetzt rechnen. Mittels des Einflußgitters für die freigelagerte Platte kommen wir nunmehr auf die anfänglich angenommenen Werte z zurück, welche jetzt verbessert werden. Die Konvergenz tritt natürlich erst ein, wenn man wenigstens die Amplitude ungefähr erraten hat. Die weitere Näherung geht aber dann schnell von statten.

3. Beispiel der Strömung um ein Hindernis. Ein zweites Beispiel einer integrierbaren nichtlinearen Differentialgleichung liefert die ebene Strömung einer reibenden Flüssigkeit um ein Hindernis. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß Reibung nur an dem Hindernis, aber nicht an den Seiten des Kanals stattfinde. Sind die Geschwindigkeiten

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

so ist die Kontinuitätsgleichung befriedigt und wir erhalten als Differentialgleichung für die Stromfunktion ψ

$$\Delta \Delta \psi = \frac{\varrho}{\mu} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \begin{vmatrix} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} & \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} \right\}$$

(μ Reibung, ϱ Dichte).

Die Wirbelstärke wird proportional dem Ausdruck $\Delta \psi$. Nach der von Rayleigh auseinandergesetzten bereits erwähnten Analogie kann man nun ψ als Ordinate einer gebogenen Platte auffassen. Die Wirbelstärke ist dann proportional der Momentensumme, und der rechts in der Differentialgleichung auftretende Ausdruck entspricht der Plattenbelastung. Der Determinantenausdruck stellt seiner physikalischen Bedeutung nach die Wirkung der Trägheitskräfte des Flüssigkeitsteilchens vor. Haben wir einen Kanal

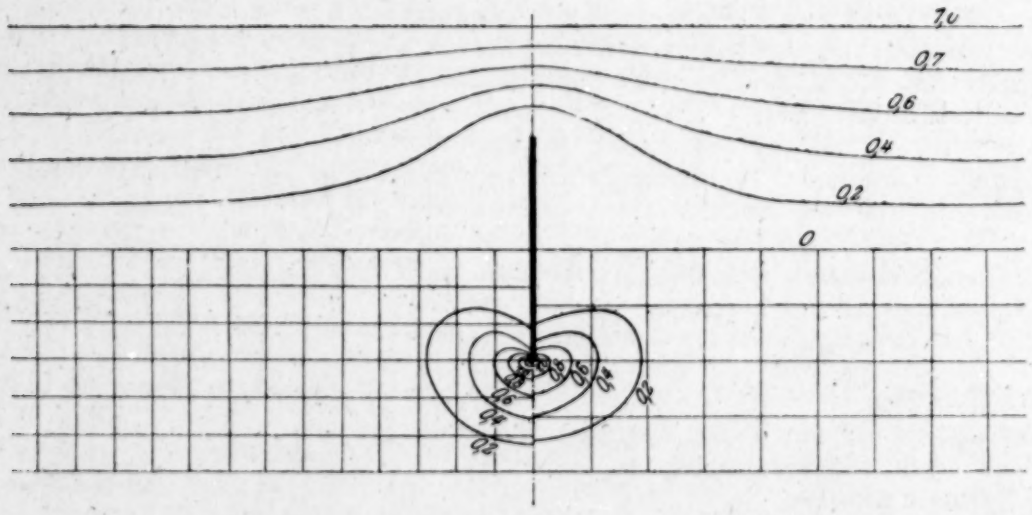


Abb. 4

von der Breite $2a$ und setzen wir unter Beschränkung auf stationäre Bewegungen $\psi = aU\zeta$, so können wir die Dimensionen mittels der Gleichungen $x = a\xi$, $y = a\eta$ in die Reynoldssche Zahl $R = \frac{U\varrho}{M} a$ konzentrieren und erhalten

$$\Delta\Delta\zeta = R \begin{vmatrix} \frac{\partial \Delta\zeta}{\partial\xi} & \frac{\partial \Delta\zeta}{\partial\eta} \\ \frac{\partial\zeta}{\partial\xi} & \frac{\partial\zeta}{\partial\eta} \end{vmatrix}$$

Um die Genauigkeit des Differenzenverfahrens zu prüfen, habe ich zunächst die Rechnung für den Fall $R = 0$ nach der Methode des Einflußgitters (vergl. die Tafel) durchgeführt und die Höhenschichtenkarte für ζ gezeichnet (Abb. 4). Es zeigte sich dabei, daß die Stromlinien für die Differenzenlängen $\lambda = \frac{a}{2}$ und $\lambda = \frac{a}{3}$ nicht zu unterscheiden waren. Die Verteilung der Wirbelstärken ändert sich dagegen etwas, was mit der singulären Stelle am Ende des linienförmigen Hindernisses zusammenhängt.

Entsprechend unserer Analogie verschwindet die Wirbelstärke an absolut glatten geraden Ufern (Momentensumme bei der Platte); es entspricht also der Fall $R = 0$ der

Tafel der Einflußgitter für eine unendlich lange, auf zwei gegenüber liegenden Seiten freigelagerte Platte ($\Phi = \Delta_\xi{}^2\zeta + \Delta_\eta{}^2\zeta$).

1. Lösung der Differenzengleichung $\Delta_\xi{}^2\Phi + \Delta_\eta{}^2\Phi = 0$ bei Unstetigkeit von $\Delta_\xi{}^2\zeta$ an einer bestimmten Stelle.

Elastische Fläche des Gewebes bei Unstetigkeit in Φ in der ξ-Richtung $\rightarrow \xi$.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
+ 66,3	+ 99,7	0	− 99,7	− 66,3	−35,0	−17,3	− 8,3	− 3,8	− 1,6	−0,6 . . .
+130,4	+332,5	$+\frac{1000}{-1000}$	− 332,5	−130,4	−56.6	−25,8	−12,0	− 5,5	− 2,4	−0,8 . . .
+ 66,3	+ 99,7	0	− 99,7	− 66,3	−35,0	−17,3	− 8,3	− 3,8	− 1,6	−0,8 . .
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
+ 29,4	+ 32,5	0	− 32,5	− 29,4	−18,7	−10,7	− 5,4	− 2,7	− 1,3	−0,6 . .
+ 66,4	+ 99,7	0	− 99,7	− 66,4	−35,2	−17,4	− 8,4	− 4,1	− 1,9	−0,8 . .
+101,2	+300,2	$+\frac{1000}{-1000}$	− 300,2	−101,2	−38,2	−15,6	− 6,8	− 3,1	− 1,4	−0,6 .
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Lösung der Differenzgleichung $\Delta_\xi{}^2\zeta + \Delta_\eta{}^2\zeta = \Phi$ für die obigen Unstetigkeiten.
Elastische Fläche der Platte bei Unstetigkeit in $\Delta_\xi{}^2\zeta$.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
− 91,3	− 88,6	0	+ 88,6	+ 91,3	+66,8	+42,4	+24,9	+13,7	+ 7,2	+3,6 .
−143,7	−163,3	0	+163,3	+143,7	+98,8	+61,2	+35,4	+19,6	+10,4	+5,2 .
− 91,3	− 88,6	0	+ 88,6	+ 91,3	+66,8	+42,4	+24,9	+13,7	+ 7,2	+3,6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
− 51,0	− 42,8	0	+ 42,8	+ 51,0	+40,9	+27,7	+16,7	+ 9,5	+ 5,1	+2,7 . .
− 91,2	− 88,5	0	+ 88,5	+ 91,2	+66,6	+42,4	+24,9	+13,9	+ 7,5	+3,9 . .
− 92,3	−120,2	0	+120,2	+ 92,3	+57,5	+33,5	+18,7	+10,2	+ 5,4	+2,8 . .
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

2. Lösung der Differenzengleichung $\Delta_\xi^2 \Phi + \Delta_\eta^2 \Phi = +1000$ für einen bestimmten Punkt, $= 0$ für alle übrigen Punkte.

Elastische Fläche des Gewebes bei Punktbelastung.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-45,8	- 88,7	-145,2	- 88,7	-45,8	-22,4	-10,73	-5,12	-2,43	-1,16	-0,556	-0,267 ...
-72,2	-163,6	-404,4	-163,6	-72,2	-33,1	-15,47	-7,28	-3,45	-1,64	-0,784	-0,375 ...
-45,8	- 88,7	-145,2	- 88,7	-45,8	-22,4	-10,73	-5,12	-2,43	-1,16	-0,556	-0,267 ...
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-25,5	- 42,8	- 57,7	- 42,8	-25,5	-13,62	- 6,90	-3,38	-1,628	-0,774	-0,368	-0,175 ...
-45,5	- 88,4	-145,1	- 88,4	-45,5	-22,2	-10,58	-5,01	-2,36	-1,108	-0,524	-0,249 ...
-46,2	-120,2	-346,6	-120,2	-46,2	-19,11	- 8,35	-3,75	-1,716	-0,796	-0,373	-0,177 ...
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Lösung der Differenzengleichung $\Delta_\xi^2 \zeta + \Delta_\eta^2 \zeta = \Phi$ für die obigen Belastungen,

Elastische Fläche der Platte bei Punktbelastung.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
104,3	155,4	192,9	155,4	104,3	63,75	36,95	20,70	11,30	6,064	3,214	1,689 ...
152,0	235,5	315,5	235,5	152,0	91,29	52,51	29,31	15,99	8,576	4,548	2,385 ...
104,3	155,4	192,9	155,4	104,3	63,75	36,95	20,70	11,30	6 064	3,214	1,689 ...
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
65,87	92,93	108,8	92,93	65,87	41,80	24,77	14,03	7,708	4,153	2,201	1,154 ...
103,3	154,3	191,9	154,3	103,3	63,03	36,40	20,29	11,05	5,914	3,124	1,635 ...
84,73	141,0	205,0	141,0	84,73	48,44	26,96	14,72	7.922	4,218	2,221	1,16 ...
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Platte, die über dem Hindernis fest eingespannt ist $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = 0\right)$, während die Auflager einen um eine konstante Größe (proportional der Durchflußmenge) verschiedenen Niveauunterschied aufweisen. Unsere Methode des Einflußgitters erlaubt uns aber auch, diese Differentialgleichung für ein nicht verschwindendes R numerisch zu integrieren, wobei allerdings die Einschränkung gemacht werden muß, daß bei der von uns gewählten Differenzenlänge mehr als ein qualitativ richtiges Stromlinienbild nicht erwartet werden darf.

Wir gehen aus von der Grundlösung $R = 0$, die wir mit ζ_0 bezeichnen wollen. Die wirkliche Lösung einschließlich der Wirkung der Trägheitskräfte setzen wir $\zeta_0 + \zeta'$, dann haben wir für ζ'

$$\Delta\Delta\zeta' = R \begin{vmatrix} \frac{\partial \Delta(\zeta_0 + \zeta')}{\partial \xi} & \frac{\partial \Delta(\zeta_0 + \zeta')}{\partial \eta} \\ \frac{\partial (\zeta_0 + \zeta')}{\partial \xi} & \frac{\partial (\zeta_0 + \zeta')}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

Jetzt betrachten wir ζ' als Ordinate einer Platte, die im unbelasteten Zustand eben und über dem Hindernis eingespannt ist. Wir fangen auf der rechten Seite mit $\zeta' = 0$ an und erhalten einen ersten Näherungswert ζ_1', dann setzen wir rechts statt ζ' den Wert ζ_1' und fahren so lange fort, bis die Konvergenz des Verfahrens zutage tritt [1]). Für kleine Werte von R wie 1, 2 ist die Konvergenz ausgezeichnet. Ich habe die Rech-

[1]) Whitehead, Quarterly Journal of Mathematics 23, 1889, p 78, 143.

nung für $R = 10$ bis zum zweiten Glied einschließlich durchgeführt und das Stromlinienbild der Abb. 5 erhalten.

Jedes Glied der Reihe stellt eine elastische Fläche dar und erfüllt alle Randbedingungen. Sehr zweckmäßig ist es, wenn man die rechts auftretende Plattenbelastung in einen symmetrischen und antisymmetrischen Teil zerlegt. Die Analogie mit den sinus- und cosinus-Wellen einer trigonometrischen Reihe tritt dann besonders schön hervor.

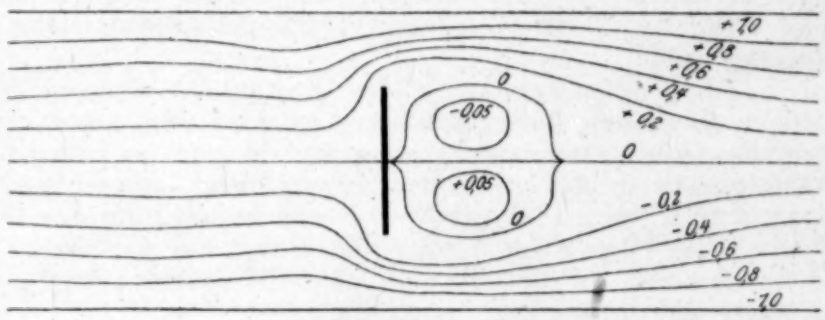


Abb. 5

Die Konvergenz dieser Reihenentwicklung hat natürlich mit der Differenzenmethode an sich nichts zu tun. Diese Art der Entwicklung wurde zuerst von Whitehead[1]) angewendet, um die Stokessche Strömung um die Kugel zu verbessern. Die Verwirklichung dieser Reihenentwicklung ohne das Differenzenverfahren auf analytischem Wege scheint allerdings kaum möglich zu sein.

Abb. 5 zeigt auf der stromwärts liegenden Seite in sich zurückkehrende Stromlinien. Es entstehen zwei Strudel, welche beständig die gleichen Flüssigkeitsteilchen enthalten. Bei entsprechenden Störungen lösen sich diese Strudel los und es treten periodische Lösungen an die Stelle der stationären. Die Kármánsche Wirbelstraße ist wahrscheinlich eine dieser periodischen Strömungen. Man muß dabei allerdings bedenken, daß bei einer reibenden Flüssigkeit singuläre Stabwirbel im Sinne der klassischen Hydrodynamik unmöglich sind. Dementsprechend erstreckt sich die wirkliche Wirbelstraße nicht bis ins unendliche, sondern hört in einem Abstand hinter dem Hindernis allmählich auf, der eine Funktion der Reynoldsschen Zahl ist.

Gehen wir über zu großen Werten von R, so bedeutet dies geringe Steifigkeit der Platte. Da nun in der Nähe des Hindernisses (am Ende der Grenzschicht) sehr große Kräfte auftreten, so macht es nichts aus, ob wir die Platte über dem Hindernis als eingespannt oder als freigelagert ansehen. Wir erhalten so das merkwürdige Ergebnis: Bei Flüssigkeiten mit kleiner Reibung darf man die Reibung wohl am Hindernis, nicht aber in der Flüssigkeit vernachlässigen. Weder innerhalb noch außerhalb der Grenzschicht hat die Strömung etwas mit der Potentialströmung zu tun. Dieses Ergebnis scheint auf den ersten Blick mit der Prandtlschen Grenzschichtentheorie in Widerspruch zu stehen, der aber leicht aufzulösen ist. Wie eine quadratische Gleichung im allgemeinen zwei Wurzeln hat, so hat eine quadratische Differentialgleichung zwei Lösungen, welche die gleichen Randbedingungen befriedigen. Der Zerfall der Gleichung in ihre Wurzeln wird besser kenntlich, wenn wir absolut glattes Hindernis, aber reibende Flüssigkeit voraussetzen. In diesem Fall ist die Potentialströmung eine Lösung der hydrodynamischen Gleichung für alle Werte von R. In Abb. 6 habe ich die beiden Wurzeln für $R = 0$ berechnet und dargestellt. Im einen Fall haben wir uns die Stromfunktion unter dem Bilde einer gespannten Membran, im anderen Fall unter dem Bilde einer gebogenen Platte vorzustellen. In speziellen Fällen, wie z. B. beim absolut glatten Zylinder, fallen die beiden Wurzeln zusammen.

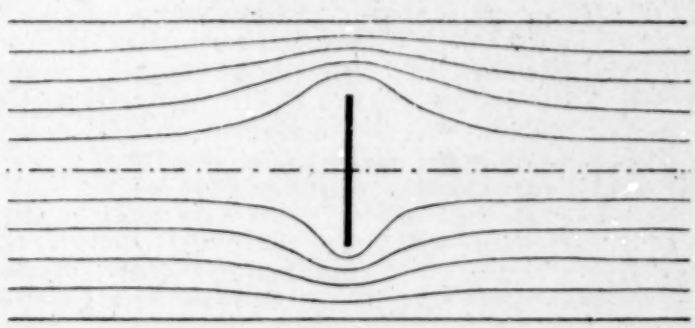


Abb. 6

Prandtls Grenzschichtentheorie erscheint von diesem Gesichtspunkte aus als ein Mittel, sich der Wurzel asymptotisch zu nähern, die bei absolut glattem Hindernis

[1]) Whitehead, Quarterly Journal of Mathematics 23, 1889, p. 78, 143.

in die Potentialströmung übergehen würde. Welche von den beiden Lösungen die größere Bedeutung hat, hängt von der Größe von R und von dem Vorhandensein scharfer Ecken ab. Im letzteren Fall versagt im allgemeinen die Grenzschichtentheorie, weil eben die innere Reibung in der Flüssigkeit selbst dann dem Strömungsbild das Gepräge gibt.

Die Zweideutigkeit der Lösungen spricht sich physikalisch aus in dem allbekannten labilen Charakter der Strömungen. Ist es doch selbst bei größter Sorgfalt kaum möglich, die beschriebenen stationären Strömungen im Laboratorium herzustellen. Die Differentialgleichung der reibenden Flüssigkeiten stimmt also mit der Erfahrung ganz gut überein und würde sich wohl auch zur Bestimmung des Widerstandes verwenden lassen. Freilich ist dazu noch eine Verfeinerung des Verfahrens nötig, die zurzeit noch nicht vorhanden ist, da die Summen- und Differenzenrechnung überhaupt ein etwas vernachlässigtes Gebiet der Mathematik darstellt.

Ein Hauptvorzug des Rechnens mit endlichen Differenzen liegt in dem stufenweisen Charakter, mit dem sich die Berechnungen vollziehen. Der mathematische Apparat ist besonders bei ersten Näherungen der denkbar einfachste, wodurch das Verfahren für den Techniker wie geschaffen ist. Die Behandlung der schwierigsten Randwertpropleme läßt sich mit einer Anschaulichkeit durchführen, die den abstrakteren funktionentheoretischen Methoden fehlt und die für den Unterricht in Mathematik für den mehr konkreten Gegenstandsgebieten zugewandten Techniker von der größten Bedeutung ist.

Ja auch erkenntnistheoretisch verdient dieses Rechnen mit endlichen Differenzen den Vorzug. Denn nach der neueren statistischen Auffassung ist der rechtmäßige Ausdruck des Naturgesetzes nicht die Differentialgleichung, sondern die Differenzengleichung. Wenn auch im allgemeinen diese Unterscheidung spitzfindig erscheinen könnte, in der Technik lassen sich zahlreiche Beispiele anführen, wo ein Uebergang zu unendlich kleinen Differenzen physikalisch sinnlos wird, weil das zugrunde liegende Gesetz nur für endliche Differenzen Bedeutung hat. Wenn es auch natürlich keine Methode geben kann, die in allen Fällen zum Ziele führt, so dürfen wir doch hoffen, daß wir uns in dem Rechnen mit endlichen Differenzen ein wertvolles Hilfsmittel entwickeln können. Selbst dort, wo eine befriedigende Genauigkeit nicht zu erreichen sein wird, wird man auf diese Weise den Verlauf einer Funktion wenigstens soweit überblicken können, als es bei praktischen Anwendungen in der Technik wünschenswert erscheinen mag.

Da die Technik numerische Methoden zur Lösung von Randwertproblemen dringend benötigt, wird die Behandlung von sonst unzugänglichen Problemen auf diesem Wege nicht auf sich warten lassen. Erst wenn eine hinreichend große Anzahl von Problemen gelöst ist, wird man daran denken können, ein abschließendes Urteil über den Wert und die Tragweite des Rechnens mit endlichen Differenzen zu bilden. 105

KURZE AUSZÜGE

Hydraulik.

Die Formel von Ganguillet-Kutter für den hydraulischen Gefällsverlust muß schon deswegen bei jedem mechanisch denkenden Menschen Anstoß erregen, weil sie sich über alle Gesetze der mechanischen Ähnlichkeit hinwegsetzt. Trotzdem und trotz ihrer verwickelten Form ist sie in der Praxis beliebt, weil sie auf ein großes Erfahrungsmaterial aufgebaut ist. Dieses Material besteht, außer aus Versuchen in kleinen Gerinnen, im wesentlichen aus den Mississippi-Messungen von Humphreys und Abbot (1867). E. Beyerhaus unterzieht nun (Zentralblatt der Bauverwaltung 41. 1921, S. 168—170) dieses Material einer kritischen Prüfung und findet, daß bei den Schlüssen, welche zur Formel von Ganguillet-Kutter geführt haben, die Genauigkeit der Messungen ganz bedeutend überschätzt worden ist. Der Haupteinwand ist dabei die Unsicherheit der Gefällsmessungen, die an viel zu kurzen Flußstrecken angestellt worden sind. Entnimmt man dem alten Versuchsmaterial Angaben, welche eine Auswertung für größere Flußstrecken gestatten, so ergeben sich ganz andere Werte. Das Gefälle hatte unter Umständen den vierfachen Wert desjenigen, der zur G.-K.-schen Formel führte. Auch bei großen Wassertiefen erweist sich die Geschwindigkeit, nicht anders als bei geringen Wassertiefen, annähernd der Quadratwurzel aus dem Gefälle proportional.

Man wird wohl die alten hydraulischen Formeln bald ganz zugunsten einfacher Potenzformeln

$v = \text{const} \cdot R^x J^y$ (v Geschwindigkeit, R Profilradius, J Spiegelgefälle)

aufgeben, wie sie in letzter Zeit von verschiedenen Seiten vorgeschlagen wurden. Auch E. Beyerhaus schließt aus einem großen Versuchsmaterial (Der Bauingenieur 2 (1921), S. 485—491 und 523—529) auf eine solche Formel. Er findet $x = 0{,}7$ und $y = 0{,}46$; Forchheimer fand $x = 0{,}7$ und $y = 0{,}5$, Hermanek $x = 0{,}6$, $y = 0{,}5$, Manning $x = 0{,}66$, $y = 0{,}5$, was alles mit theoretischen Überlegungen von Prandtl und v. Karman ($x = 0{,}64$, $y = 0{,}5$) in recht guter Übereinstimmung steht. Das von Beyerhaus verwendete Versuchsmaterial erstreckt sich auf 89 Messungen, hauptsächlich an deutschen und französischen Flüssen, sowie auf die alten Mississippi-Messungen; dabei kommen Geschwindigkeitswerte von 0,14 bis 2,3 m, Profilradien von 0,13 bis 22 m und Gefälle von 0,0156 bis 14 vH vor. Auffallenderweise findet er überall dieselbe Konstante; die mittlere Abweichung beträgt weniger als 4 vH, während die Konstante der Ganguillet-Kutterschen Formel über 6 vH Abweichung von ihrem Mittelwert zeigt und die alte Chézysche Formel ($x = y = 0{,}5$) gar fast 15 vH. Daß bei ganz verschiedenen Flußläufen die Konstanten so genau zusammenfallen, wird dahin gedeutet, daß die Korngröße des Geschiebes und die Rauhigkeit des Bettes beim natürlichen Wasserlauf gar nicht von entscheidendem Einfluß seien, sondern die Art und Folge des beständigen Querschnittswechsels und derartige Einwirkungen überwiegen. Aber auch bei Anwendung auf künstliche Gerinne bewährt sich die Beyerhaussche Formel; bei einer Versuchsreihe von 7 Messungen der Berliner Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau in 2 m breiten Gerinnen zeigt die Konstante der Beyerhausschen Formel nur 0,65 vH mittlere Abweichung vom Mittelwert, die Ganguillet-Kuttersche 4,7 vH. Um der neuen Formel das Eindringen in die Praxis zu erleichtern, führ Beyerhaus einen ausführlichen Vergleich mit der Ganguillet-Kutterschen Formel in Gebieten, wo diese sich bewährt hat, durch und fügt eine Rechentafel bei.

Merkwürdig spät erkannte man in der Hydraulik die Bedeutung des von Reynolds in den 80er Jahren entdeckten **Aehnlichkeitsgesetzes für Reibungswiderstände.** Erst 1913 hat Blasius seine Verwendbarkeit zur Auswertung hydraulischer Messungen an glatten Röhren und an Platten gezeigt. Das Versuchsmaterial an geschleppten Platten war dabei den Versuchen von Gebers in der Dresden-Uebigauer Versuchsanstalt entnommen, war aber für diesen Zweck noch nicht ganz befriedigend, da die Platten unter sich unähnlich waren und die Temperatur des Wassers unbekannt war. Nunmehr legt Gebers (Schiffbau 22 (1921), S. 687—690, 713—717, 738—741, 767—770, 791—795, 812—845, 899—902, 928—930) ein sehr umfangreiches und nach jeder Richtung kritisch durchgearbeitetes Versuchsmaterial vor, in welchem das Reynoldssche Ähnlichkeitsgesetz für den Flächenwiderstand im Wasser geradlinig fortbewegter polierter Platten bestätigt und eine einheitliche Formel für diesen Widerstand aufgestellt wird. Diese Formel ergibt den Widerstand proportional der 1,875 ten Potenz der Geschwindigkeit und steht somit annähernd, aber doch nicht vollkommen in Übereinstimmung mit den älteren Froudeschen Messungen, welche die 1,825 te Potenz ergeben, und denen von Gibbons und Wieselsberger, welche v. Kármán in dieser Zeitschrift (S. 211) in Übereinstimmung mit der von seiner Theorie geforderten 1,80 ten Potenz findet. Das Gebersche Versuchsmaterial erstreckt sich auf einen wesentlich weiteren Bereich als alle früheren Versuche; die Platten hatten eine Länge von 1,25 bis 10 m, die Geschwindigkeit des Schleppwagens konnte bis 8,5 m/s gesteigert werden; der Geschwindigkeitsbereich wurde allerdings aus technischen Gründen nicht voll ausgenutzt. Auch der Einfluß verschiedener Zähigkeit wurde untersucht, allerdings nur unter Ausnutzung der verschiedenen natürlichen Wassertemperatur im Frühjahr und im Sommer, also in einem Temperaturbereich von 8 bis 10° C. Die Platten waren aus kalifornischem Rotholz hergestellt und mit Schellackpolitur poliert, am Vorder- und Hinterende zugeschärft und mit Messingschneiden versehen; die meisten hatten einen Bleikiel. Der Formwiderstand wurde an Schneidenpaaren allein bestimmt und vom Gesamtwiderstand der Platten abgezogen, um den reinen Flächenwiderstand zu erhalten; die Korrektion betrug jedoch nur 1 bis 1,5 vH. Als wichtiger erwies sich der Längskantenwiderstand, der aus Versuchen mit verschiedener Eintauchtiefe unter Zuhilfenahme naheliegender Annahmen ermittelt und zu etwa 2,8 vH gefunden wurde. Die Ergebnisse werden mit den älteren Messungen von Froude und Mc. Entee ausführlich verglichen.

Die Grenzschichten zwischen Flüssigkeit und Wand, welche heute in der Hydrodynamik eine so fundamentale Rolle spielen, treten auch in anderen Gebieten der Physik in Erscheinung; insbesondere die Lösungsgeschwindigkeit fester Stoffe in Flüssigkeiten hängt von der Dicke dieser »adhärierenden Schichten« ab, welche durch die Rührbewegung in der übrigen Flüssigkeit nicht vollständig mitgenommen werden. J. Meyer (Zeitschr. f. phys. Chem. 96 (1920) S. 275—286) berichtet über Versuche, bei welchen aus dem Wärmeübergang zwischen zwei verschieden temperierten, durch einen Kupfermantel getrennten Wassergefäßen, die Größe dieser adhärierenden Schicht ermittelt werden sollte. Eine kugelförmige Kupferblase aus sehr dünnem Blech mit Wasser von 15° gefüllt, wurde in ein großes Wasserbad mit siedendem Wasser gesetzt und fortwährend geschwenkt; der zeitliche Verlauf der Temperaturerhöhung wurde gemessen, und unter Zugrundelegung des bekannten Wertes der Wärmeleitfähigkeit des Wassers die Dicke der adhärierenden Schicht berechnet: Wegen der langsamen Einstellung

des verwendeten Quecksilberthermometers mußte eine Korrektur an der Zeitmessung vorgenommen werden, welche die zu messende Zeit oft um ein Vielfaches übertraf. Schließlich wurden auch alte Strömungsversuche von Graetz ausgewertet, um aus ihnen auf die Dicke der adhärierenden Schicht zu schließen. Es ist zu hoffen, daß dieser Teil der physikalischen Chemie aus den neuesten Fortschritten der hydrodynamischen Grenzschichttheorie (s. zu den besprochenen Versuchen die Arbeit von H. Latzko in dieser Zeitschrift Bd. 1, 1921, S. 268—290) Gewinn ziehen wird.

Bei einem Venturimesser ist die Beziehung zwischen dem gemessenen Druckunterschied h und der Durchflußmenge Q nur dann die gewöhnliche: $Q = \text{const.} \sqrt{h}$, wenn die Reynoldssche Zahl der Strömung wesentlich über der kritischen liegt, also die Strömungswiderstände proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit sind. Bei kleineren Reynoldsschen Zahlen sind die Widerstände meist größer, aber auch manchmal kleiner, als der Extrapolation des quadratischen Gesetzes entspricht. Infolgedessen kommt es vor, daß Venturimesser bei kleinen Geschwindigkeiten größere Durchflußmengen aufweisen, als bei der »reibungslosen« Strömung bei großen Geschwindigkeiten. Diesen Gedankengang kann man bei gutem Willen aus den Ausführungen Wm. John Walkers (Phil. mag. 41 (1921) S. 286—288) herauslesen.

Der Zusammenhang zwischen Durchflußmenge und Druckhöhe ist ebenso wie beim Venturirohr **bei Ponceletöffnungen** nicht einfach durch einen konstanten Koeffizienten zu fassen, wenn es sich nicht um große Mengen und große Öffnungen handelt. Der Koeffizient hängt vielmehr von der Durchflußgeschwindigkeit, den Abmessungen, der Dichte und der Zähigkeit der Flüssigkeit ab, welche Größen man in bekannter Weise in den Ausdruck der Reynoldsschen Zahl und in eine weitere dimensionslose Größe, welche die Abmessungsverhältnisse ausdrückt, also etwa $\frac{\text{Druckhöhe}}{\text{Düsendurchmesser}}$ zusammenfassen kann. Die Art der Abhängigkeit ist noch wenig erforscht; die sehr exakten und ausgedehnten Versuche von A. Schneider (Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 213, 1919) geben darum ein sehr wertvolles Material. Mit einer sehr exakt durchgearbeiteten Versuchseinrichtung wurde der Durchfluß von Wasser und von Kochsalzsole verschiedener Konzentration bei Temperaturen von -5^0 bis $+40^0$ C gemessen bei einem Druckhöhenbereich von 63 bis 780 mm und mit Düsendurchmessern von 5,48 bis 50,0 mm. Das ganze Material ist in Diagrammen niedergelegt, wobei leider der oben erwähnte Gesichtspunkt, die veränderlichen Größen zu dimensionslosen Zahlen zusammenzufassen, außer Acht geblieben ist. Die Tragweite und Verwendbarkeit der Versuche würde sonst noch ganz anders hervortreten.

Die laminare und die turbulente Strömung in offenen Gerinnen untersucht A. Schocklitsch (Stzber. Wien Ak. 129, 1920, S. 895—917) experimentell mit Hilfe von Farbfäden bezw. Schlammzusatz und durch Messung der Durchflußmenge in Abhängigkeit von Gefälle und Tiefe. Bezüglich der Laminarströmung (Gleiten) und des Übergangs von der laminaren zur turbulenten Strömung (Fließen) werden die älteren Versuchsergebnisse von L. Hopf bestätigt. Weiter wird gezeigt, daß zwar die von Hopf beobachtete kritische Zahl mit einer ziemlich plötzlichen Änderung des Strömungsbildes verbunden ist, daß man aber bei anderer Auswertung der ausführlicheren Versuchsergebnisse des Verfassers auch eine kleinere und eine größere kritische Zahl finden kann. (Nach den neueren Untersuchungen Schillers[1]) dürfte die kleinere auf den Einfluß der Anlaufstrecke, die größere auf einen besonders sanften Einlauf zurückzuführen sein.) An der turbulenten Strömung zeigen die Farbversuche, wie die untersten Schichten der Strömung laminar bleiben, die oberen Schwankungen aufweisen; am interessantesten scheint der Nachweis, daß die an ein Hindernis herankommenden oberen Stromschichten unter dem Hindernis durchtauchen und das in den unteren Schichten zuströmende Wasser vom Hindernis seitlich wegdrängen.

Die scheinbare Massenvergrößerung eines in einer Flüssigkeit bewegten Körpers infolge der in der Flüssigkeit selbst erregten Beschleunigungen ist für die einfachsten Fälle von Stokes theoretisch berechnet worden. Das Ergebnis, wonach diese Massenvergrößerung bei einer Kugel die Hälfte der verdrängten Wassermasse betragen soll, wird von G. Cook (Phil. mag. (6) 39, 1920, S. 350—352) einer experimentellen Prüfung unterzogen. Eine Kugel (Minengehäuse) von 97 cm Durchmesser, 490 kg Wasserverdrängung und 0,45 kg Gewicht im Wasser fällt in einem Wassertank von 4,6 m Durchmesser und 9,1 m Tiefe; die Bewegung wird registriert und daraus Geschwindigkeit und Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit bestimmt. Die Beschleunigung erweist sich ungefähr dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional, so daß die Gültigkeit des quadratischen Widerstandsgesetzes angenommen werden kann. Aus dem Proportionalitätsfaktor folgt die scheinbare Massenvergrößerung zu 0,46 mal der verdrängten Wassermasse, also in guter Übereinstimmung mit der Theorie.

Das Zusammenwirken von Schraube und Schiffskörper, die gegenseitige Beeinflussung der an der Schraube und am Schiffskörper auftretenden Kräfte hat eine umfangreiche, hauptsächlich auf Modellmessungen fußende Literatur hervorgerufen. Dieselbe wird übersichtlich zusammengefaßt und durch Auswertung von Versuchen an U-Booten ergänzt in

[1]) Diese Zeitschrift, Bd. 1, 1921, S. 436—441.

der Dissertation von W. Immich (Schiffbau 22 (1920) S. 167—171, 245—248, 270—272, 296—298, 322—325). Gemessen wurden Schiffsgeschwindigkeit, Umlaufzahl und die der Schraube zugeführte Leistung. Aus den beiden ersten Größen und der bekannten Steigung der Schraube folgt der »scheinbare« Slip, aus der Leistung mit Hilfe von Beiwerten, welche von Gümbel nach Modellversuchen angegeben sind, der »tatsächliche« Slip. Aus den beiden Slip-Werten folgt die Nachstromziffer, d. i. das Verhältnis der durch das Schiff erzeugten Nachstromgeschwindigkeit, welche die Zuströmungsgeschwindigkeit des Wassers relativ zur Schraube vermindert, zur Schiffsgeschwindigkeit. Diese Nachstromziffer wird bei den 12 Versuchsreihen stets zwischen 0,28 und 0,40 gefunden. Durch Berücksichtigung des Nachstroms kann man die gegenseitige Beeinflussung von Schraube und Schiffskörper genügend erfassen; die Einwirkung der Schraube auf den Schiffswiderstand, ebenso wie der Einfluß des Schiffs auf den Schraubenwirkungsgrad erweisen sich im Versuchsmaterial als nicht von merklicher Größenordnung.

Die Gleitgeschwindigkeit eines im strömenden Wasser treibenden Kahnes und ihr Einfluß auf die Geschwindigkeit eines talwärts oder bergwärts geschleppten Schiffes relativ zum Wasser und zum Ufer berechnet J. Faust (Schiffbau 22 (1920) S. 58—61 und S. 87—90) im Anschluß an eine ältere Arbeit von Dietze und eine neuere von Asthöwer. Er weist einerseits die Kritik Asthöwers gegen Dietzes Grundanschauung, wonach die in der Stromrichtung wirkende Schwerekomponente durch die Widerstandskraft infolge Relativbewegung des Kahnes gegen das Wasser aufgehoben wird, zurück, zeigt andrerseits daß die Dietzesche Berechnung der Schleppgeschwindigkeiten fehlerhaft ist und durch einfache Gleichgewichtsbetrachtung richtiggestellt werden kann. Tabellen und Vergleiche mit der Erfahrung zeigen die Verwendbarkeit der Faustschen Methoden und seiner empirischen Formeln.

Ein graphisches Verfahren zur Behandlung von Wasserschloßproblemen, welches auch in Fällen anwendbar ist, wo die analytische Berechnung auf sehr große Schwierigkeiten stößt, gibt E. Braun (Schweizerische Bauzeitung 77 (1921) S. 117—119). Unter Zugrundelegung eines Beharrungszustandes, der entweder der Ausgangspunkt des Vorgangs ist oder über den sich die zu untersuchenden Schwingungsvorgänge lagern, werden die Veränderlichen zu dimensionslosen Größen umgeformt und die Konstanten der Anlage in wenige Parameter zusammengefaßt. Durch geometrische Deutung der Beziehungen zwischen den Veränderlichen wird eine graphische Konstruktion gewonnen, welcher man den Verlauf der Wasserhöhe im Wasserschloß und der Geschwindigkeit im Druckstollen in Abhängigkeit voneinander und von der Zeit unmittelbar entnehmen kann. Das Verfahren wird an vier Beispielen erläutert.

Rechnerische Vereinfachung bei technischen Rechnungen ist auch das Ziel einer Dissertation von H. Schultz (Schiffbau 22 [1920], S. 239—245, 265 - 270, 291—295) über **Stabilitätsformeln für Seeschiffe.** In den Formeln, welche den Winkelbereich des Maximalmoments, das größte Moment selbst und den Kenterwinkel angeben, sind lediglich die Anfangsstabilitätswerte (Abstand des Metazentrums vom Systemschwerpunkt und vom Verdrängungsschwerpunkt der Anfangslage) und die Deplacementsschwerpunktverschiebung des um 90° geneigten Schiffes als Daten benutzt. Die Formeln sind grundsätzlich frei von jeglichen den Typ des Schiffes kennzeichnenden Koeffizienten; die vorkommenden Beizahlen sind aus geometrischen und goniometrischen Beziehungen hergeleitete Konstanten. Bei Benutzung der Formeln wird kein Integrationsgerät gebraucht, wie bei den bisher üblichen Verfahren. 142

Aachen. L. Hopf.

KLEINE MITTEILUNGEN

Obere und untere Grenze eines Newtonschen Potentials auf Ebenen. In den nachfolgenden Zeilen stellen wir einen dem Doetschschen „Dreigeradensatz“ [1]) für Funktionen von komplexen Variablen entsprechenden Satz für Newtonsche Potentiale auf. Dieser Dreigeradensatz besagt: Ist die komplexe Funktion $f(z)$, $z = x + iy$, in dem Parallelstreifen zur y-Achse $x_1 \leqq x \leqq x_3$ eindeutig, beschränkt, mit etwaiger Ausnahme des Unendlichen regulär und nicht identisch 0 und bezeichnet $L(x)$ die hiernach endliche obere Grenze von $|f(z)|$ auf der Geraden $R(z) = x$ [1]) $(x_1 \leqq x \leqq x_3)$, so ist für $x_1 < x_2 < x_3$

$$\begin{vmatrix} \log L(x_1) & x_1 & 1 \\ \log L(x_2) & x_2 & 1 \\ \log L(x_3) & x_3 & 1 \end{vmatrix} \leqq 0,$$

d. h. $\log L(x)$ ist eine konvexe Funktion [2]) von x.

Durch zwei Ebenen parallel der yz-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems $x = \xi$

[1]) G. Doetsch, Ueber die obere Grenze des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Geraden, Math. Zeitschrift 8 (1920), S. 237—240.

[1]) $R(z)$ bedeutet »reeller Teil von z«.

[2]) Wegen der Bezeichnungen konvexe und konkave Funktion vergl. meinen Aufsatz »Maximum und Minimum eines Newtonschen Potentials auf Kugeln«, Zeitschrift f. angew. Math. u Mech. 1 (1921), S. 336 - 338.

und $x = \Xi$ werde eine Ebenenschicht begrenzt. Ihr Innengebiet können wir durch $\xi < x < \Xi$ kennzeichnen unter Ausschluß des unendlich fernen Punktes. In ihr sei $\Phi(x, y, z)$ ein reguläres Newtonsches Potential, d. h. eine in jedem inneren Punkt eindeutige und samt den partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung stetige Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung für den dreidimensionalen Raum

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0.$$

Zunächst beweisen wir einen Hilfssatz.

Ist Φ in einer Schicht $a < x < b$ und auf ihren Begrenzungebenen $x = a$, $x = b$ mit etwaiger Ausnahme von endlich vielen Punkten auf ihnen regulär[1]) und von niedrigerer als der zweiten Ordnung:

$$\Phi = O\left((y^2 + z^2)^{1-\delta}\right)^{2})$$

($\delta > 0$ eine reelle Konstante),

sowie auf den Grenzebenen beschränkt:

$$\Phi = O(1) \quad \text{oder} \quad \mu \leqq \Phi \leqq M$$

für $x = a$ und $x = b$,

wo μ bezw. M die endliche untere bezw. obere Grenze von Φ für $x = a$ und $x = b$ bedeuten, so ist auch im Inneren

$$\mu \leqq \Phi \leqq M.$$

Beweis: Eine spezielle Lösung der Laplaceschen Gleichung ist

$$x^2 - \frac{1}{2}(y^2 + z^2).$$

Auch

$$\Psi_1(x, y, z) = \Phi - \varepsilon\left(x^2 - \frac{1}{2}(y^2 + z^2)\right),$$

$$\Psi_2(x, y, z) = \Phi + \varepsilon\left(x^2 - \frac{1}{2}(y^2 + z^2)\right)$$

(ε eine positive Zahl)

stellen daher in und auf der Schicht $a \leqq x \leqq b$ fast überall reguläre Potentiale dar. Gemäß der Definition von μ und M ist deshalb

für $x = a$: $\mu - \varepsilon a^2 \leqq \Psi_1$,
$\Psi_2 \leqq M + \varepsilon a^2$,

für $x = b$: $\mu - \varepsilon b^2 \leqq \Psi_1$,
$\Psi_2 \leqq M + \varepsilon b^2$.

Bezeichnet man mit c^2 die größere der beiden Zahlen a^2 und b^2:

$$c^2 = \text{Max}(a^2, b^2),$$

so wird demnach für $x = a$ und $x = b$

$$\mu - \varepsilon c^2 \leqq \Psi_1,$$
$$\Psi_2 \leqq M + \varepsilon c^2.$$

Da nach Voraussetzung

$$\Phi = O\left((y^2 + z^2)^{1-\delta}\right)$$

[1]) Wir sagen kurz »fast überall regulär«.

[2]) So schreiben wir nach E. Landau die Forderung, daß der Quotient

$$\frac{\Phi}{(y^2 + z^2)^{1-\delta}}$$

von einem gewissen $y^2 + z^2$ an beschränkt sein soll; $y^2 + z^2$ ist natürlich das Quadrat des Abstandes von der x-Achse.

ist, strebt für $y^2 + z^2 \to \infty$ gleichmäßig in $a \leqq x \leqq b$ Ψ_1 nach $+\infty$, Ψ_2 nach $-\infty$. Mithin läßt sich eine Zylinderfläche $y^2 + z^2 = r^2$ derart angeben, daß für

$$a \leqq x \leqq b, \qquad y^2 + z^2 \geqq r^2$$

durchweg

$$\mu - \varepsilon c^2 \leqq \Psi_1,$$
$$\Psi_2 \leqq M + \varepsilon c^2$$

wird. Nach dem Satze vom Maximum und Minimum kann ein Potential in keinem inneren Punkt eines im Endlichen gelegenen Bereiches einen Größt- oder Kleinstwert annehmen. Somit bestehen dieselben Beziehungen auch für das durch die Zylinderfläche aus der Schicht herausgestanzte Gebiet, weil sie auf seinen sämtlichen Begrenzungflächen erfüllt sind. In und auf der ganzen Schicht gilt also

$$\mu - \varepsilon\left(c^2 - x^2 + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)\right)$$
$$\leqq \Phi \leqq M + \varepsilon\left(c^2 - x^2 + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)\right).$$

Für einen festgewählten Punkt (x, y, z) im Inneren ist $c^2 - x^2 + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)$ eine Konstante. Da ε beliebig klein gewählt werden darf, können obige Ungleichungen nur bestehen für

$$\mu \leqq \Phi \leqq M.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen. Wir schreiten jetzt zur Herleitung des Hauptsatzes.

$x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$, $x_1 < x_2 < x_3$, seien drei Ebenen parallel der yz-Ebene. In und auf der Schicht $x_1 \leqq x \leqq x_3$ sei Φ eindeutig, beschränkt und fast überall regulär. M_1, M_2, M_3 seien die nach Voraussetzung endlichen oberen, μ_1, μ_2, μ_3 die ebenfalls endlichen unteren Grenzen von Φ auf jeder der drei Ebenen. Bedeutet dann k eine reelle Konstante, so wenden wir auf das Potential

$$\Phi + kx$$

den Hilfssatz an:

(*) $M_2 + kx_2 \leqq \text{Max}(M_1 + kx_1,\ M_3 + kx_3)$,

(**) $\mu_2 + kx_2 \geqq \text{min}\ (\mu_1 + kx_1,\ \mu_3 + kx_3)$.

Durch zweckmäßige Wahl der Konstanten k, nämlich

für (*) $\quad k = \dfrac{M_1 - M_3}{x_3 - x_1}$,

für (**) $\quad k = \dfrac{\mu_1 - \mu_3}{x_3 - x_1}$

werden die beiden Zahlen hinter Max und min je einander gleich, und es entstehen die Ungleichungen

$$(1) \quad \begin{vmatrix} M_1 & x_1 & 1 \\ M_2 & x_2 & 1 \\ M_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \leqq 0, \qquad (2) \quad \begin{vmatrix} \mu_1 & x_1 & 1 \\ \mu_2 & x_2 & 1 \\ \mu_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \geqq 0.$$

Wir schreiben (1) und (2) in der Form

$$(1^*) \quad M_1(x_2 - x_3) + M_2(x_3 - x_1) + M_3(x_1 - x_2) \leqq 0,$$
$$(2^*) \quad -\mu_1(x_2 - x_3) - \mu_2(x_3 - x_1) - \mu_3(x_1 - x_2) \leqq 0$$

und verstehen unter

$$\mathfrak{M} = \text{Max}(M, -\mu)$$

die obere Grenze des absoluten Betrages von Φ. Aus dem gleichzeitigen Bestehen von (1*) und (2*) folgt, daß auch die linke Seite derjenigen Ungleichung, in der die einzige positive Klammer $x_3 - x_1$ mit $\mathfrak{M}_2$, der größeren der beiden Zahlen M_2 und $-\mu_2$, multipliziert auftritt, nicht positiv ist; ersetzt man dann in ihr die Faktoren der beiden anderen Klammern noch durch $\mathfrak{M}_1$ bezw. $\mathfrak{M}_3$, so bleibt ihr Sinn erhalten. Somit gilt auch die Ungleichung

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{M}_1 & x_1 & 1 \\ \mathfrak{M}_2 & x_2 & 1 \\ \mathfrak{M}_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \leqq 0.$$

Auch in dem Falle, daß in oder auf der Ebenenschicht $x_1 \leqq x \leqq x_3$ Quellen oder Senken des Potentials Φ, d. h. Punkte, in denen es positiv oder negativ unendlich wird, gelegen sind, bleibt entweder Ungleichung (2) für die untere Grenze (bei Quellen) oder Ungleichung (1) für die obere Grenze (bei Senken) doch noch in Kraft. Denn schließt man die im Endlichen gelegenen Unendlichkeitstellen etwa durch kleine Kugeln und eine Unendlichkeitstelle im Unendlichen etwa durch eine große Kugel um den Koordinatenursprung aus, so nimmt auf ihnen das Potential nur positive (bei Quellen) oder negative Werte (bei Senken) von sehr großem Absolutbetrag an. Daher kommen für den durch Ausschließung der Unendlichkeitstellen entstehenden Bereich bei passender Wahl der ausmerzenden Kugeln die Minima bezw. Maxima auf ihnen nicht in Betracht. Die früheren Schlüsse führen vielmehr bei Quellen noch zu (2) und bei Senken zu (1).

Unsere Ergebnisse fassen wir zusammen zum Dreiebenensatz: Ist ein Newtonsches Potential in und auf einer Ebenenschicht $x_1 \leqq x \leqq x_3$ eindeutig, beschränkt und mit etwaiger Ausnahme von endlich vielen Punkten der Grenzebenen und des Unendlichen regulär, so ist die obere Grenze $M(x)$ des Potentials und die obere Grenze $\mathfrak{M}(x)$ des absoluten Betrages des Potentials auf einer Ebene der Schicht eine konvexe, die untere Grenze $\mu(x)$ des Potentials eine konkave Funktion von x. Diese Eigenschaften bleiben der oberen Grenze des Potentials selbst bei Zulassung von Senken, der unteren bei Zulassung von Quellen erhalten.

Daß wir die Ebenenschicht parallel der yz-Ebene angenommen haben, ist keine Beschränkung der Allgemeinheit Denn bekanntlich ist ein Newtonsches Potential invariant gegenüber einer Verschiebung und Drehung des Koordinatensystems.

Ein einfaches Beispiel bietet das Potential $\frac{1}{r}$, unter r den Abstand von einem beliebigen, im Endlichen und nicht in der Ebenenschicht gelegenen Punkt des Raumes, am einfachsten dem Koordinatenursprung, verstanden. Dann ist $M(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$, $M(x) = -\frac{1}{x}$ für $x < 0$, $\mu(x) = 0$. Von Interesse sind lediglich die beiden aus (1) entspringenden Ungleichungen

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & x_1 & 1 \\ \frac{1}{x_2} & x_2 & 1 \\ \frac{1}{x_3} & x_3 & 1 \end{vmatrix} \leqq 0 \text{ für } 0 < x_1 < x_2 < x_3,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & x_1 & 1 \\ \frac{1}{x_2} & x_2 & 1 \\ \frac{1}{x_3} & x_3 & 1 \end{vmatrix} \geqq 0 \text{ für } x_1 < x_2 < x_3 < 0.$$

Sie zeigen, daß die gleichseitige Hyperbel $xy = 1$ für $x > 0$ konvex, für $x < 0$ konkav nach unten ist.

Es bereitet keine Schwierigkeit, auch den Dreikugelsatz für Newtonsche Potentiale[1]) auf den Fall des Auftretens von Quellen und Senken zu erweitern, und sowohl den Dreikugel- wie den Dreiebenensatz auf n-dimensionale Potentiale zu übertragen. 107

Dresden-Briesnitz,
August 1921. A. Walther.

Die Lage der Auftriebs-Resultierenden von Tragflügeln. In der eben erschienenen ersten Lieferung der „Ergebnisse aus der aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen“[2]) werden in größerem Umfang Mitteilungen über das resultierende Luftkraft-Moment gemacht, das auf Tragflügel verschiedenen Profils bei wechselndem Anstellwinkel wirkt. Eine hydrodynamische Theorie, die unter der Voraussetzung ebener Bewegung, also unendlich breiter Flügel, dieses Moment als Funktion des Anstellwinkels zu berechnen gestattet, habe ich 1917 erstmals veröffentlicht und 1920 ergänzt[3]). Die Göttinger Messungen können gut dazu dienen, die Theorie zu prüfen, und es sei gleich vorausgeschickt, daß die Gegenüberstellung von Versuch und Rechnung sehr günstig ausfällt. Besonders bemerkenswert erscheint es, daß ein Teil der feststellbaren Uebereinstimmung ganz unabhängig von der Abminderung ist, die die Luftkräfte beim Uebergang zu Flügeln endlicher Breite erfahren.

Die theoretischen Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen: Es bezeichne μ die Luftdichte $\left(\frac{\gamma}{g}\right)$, v die Anblasegeschwindigkeit im Versuchskanal (Fluggeschwindigkeit), α den „wirksamen“ Anstellwinkel, d. h. den Winkel zwischen Geschwindigkeitsvektor und

[1]) Er steht in der unter [3]) angeführten Abhandlung.

[2]) Vergl. dieses Heft, S. 76.

[3]) Zeitschrift f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt, 1917, S. 157—163; 1920, S. 68—73 u. 87—89.

einer im Profil festen Richtung, die so gewählt ist, daß der Auftrieb für $\alpha = 0$ verschwindet (Richtung der „ersten Achse" des Profils). Dann hat der Auftrieb für die Einheit der Flügelbreite den Wert

$$A = 4\pi\mu v^2 a \sin\alpha \quad \ldots\ldots (1),$$

und das Moment der Auftriebskraft bei einer bestimmten Wahl des Momentenpunktes die Größe

$$M = 2\pi\mu v^2 c^2 \sin 2(\alpha - \gamma) \ldots\ldots (2).$$

Hierin sind a, c, γ gewisse Festwerte des Profils, von denen noch die Rede sein wird. Verschiebt man den Momentenpunkt von der besonderen Stelle, die in (2) vorausgesetzt ist, um ein Stück l in der Richtung, die den Winkel φ mit der „ersten Achse" des Profils bildet (Abb. 1), so erhält man das Moment

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= M - Al\cos(\alpha - \varphi) = \\ &2\pi\mu v^2 [c^2 \sin 2(\alpha-\gamma) - 2al\sin\alpha\cos(\alpha-\varphi)] \end{aligned}\right\} (3).$$

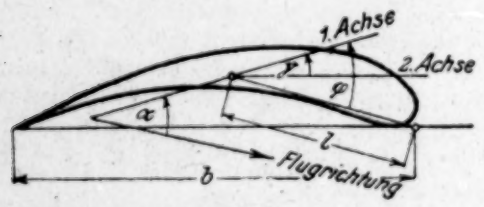


Abb. 1

Dividiert man A durch die Profilbreite b und den sogen. Staudruck, d. i. $\mu\frac{v^2}{2}$, so erhält man die dimensionslose „Auftriebszahl"

$$c_a = \frac{2A}{\mu v^2 b} = 8\pi\frac{a}{b}\sin\alpha \quad \ldots\ldots (4),$$

und wenn man M_1 durch das Quadrat von b und den Staudruck kürzt, außerdem das Vorzeichen umkehrt, so entsteht die von Prandtl benutzte „Momentenzahl"

$$\left.\begin{aligned} c_m &= -\frac{2M}{\mu v^2 b^2} = \\ &4\pi\left[\frac{2al}{b^2}\sin\alpha\cos(\alpha-\varphi) - \frac{c^2}{b^2}\sin 2(\alpha-\gamma)\right] \end{aligned}\right\} (5).$$

Man kann durch ganz einfache Umformung rechts in (5) den Ausdruck (4) einführen und erhält dann die für den Vergleich mit der Göttinger Versuchsdarstellung geeignete Formel:

$$\left.\begin{aligned} c_m = c_a\left[\frac{l}{b}\cos(\alpha-\varphi) - \frac{c^2}{ab}\cos\gamma\cos(\alpha-\gamma)\right] \\ + 8\pi\frac{c^2}{b^2}\sin\gamma\cos\alpha\cos(\alpha-\gamma) \end{aligned}\right\} (6).$$

In allen praktischen Fällen sind α, γ, φ so kleine Winkel, daß es zulässig ist, alle cosinus in (6) gleich 1 zu setzen. Damit geht (6) über in

$$c_m = c_a\left[\frac{l}{b} - \frac{c^2}{ab}\right] + 8\pi\frac{c^2}{b^2}\sin\gamma \quad \ldots (7),$$

d. h. die Momentenzahl c_m als Funktion der Auftriebszahl c_a dargestellt, liefert eine Gerade. Nimmt man an, daß zufolge der endlichen Breite des Flügels an jeder Stelle der Tiefenerstreckung nur das λ-fache der für „ebene Bewegung" berechneten Kräfte wirksam wird ($\lambda < 1$, ungefähr $\frac{2}{3}$ für gewöhnliche Fälle) und setzt $c_m' = \lambda c_m$, $c_a' = \lambda c_a$, so wird aus (7):

$$c_m' = c_a'\left[\frac{l}{b} - \frac{c^2}{ab}\right] + \lambda\, 8\pi\frac{c^2}{b^2}\sin\gamma \quad \ldots (8).$$

Die Neigung der Geraden c_m/c_a ist also vom Wert der Abminderungszahl λ unabhängig. Demnach wird man in der etwaigen Uebereinstimmung der berechneten und der versuchsmäßig bestimmten Neigung einen Prüfstein für die Theorie erkennen.

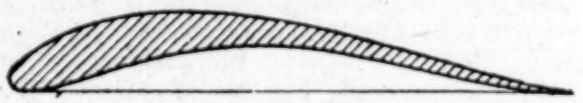


Abb. 2

In Abb. 2 ist in kleinem Maßstab ein Profil wiedergegeben, für das an der früher angeführten Stelle alle Bestimmungsstücke des Auftriebs und des Moments genau berechnet worden sind. Wählt man, wie dies bei den Göttinger Versuchen der Fall war, zum Momentenpunkt für M_1 das vordere Ende der Flügelsehne, so haben die für die Neigung der Geraden maßgebenden Größen die Werte

$$a = 0{,}44, \quad b = 1{,}62, \quad l = 0{,}79, \quad c^2 = 0{,}1789.$$

Daraus berechnet sich der Koeffizient von c_a in (7) bezw. von c_a' in (8) zu 0 237. Um den Grad der Annäherung von (7) an die genaue Gl. (6) beurteilen zu können. seien für die hier in Frage kommenden Werte $\gamma = 3{,}5^0$ und $\varphi = 12^0$ die exakten Werte des Koeffizienten von c_a in (6) angegeben. Sie betragen

für $\alpha =$	-5^0	0^0	5^0	10^0	15^0
	0,218	0,227	0,233	0,238	0,242.

Die Schwankungen sind also in der Tat gering.

Ein Blick auf die Diagramme des Göttinger Versuchsberichtes S. 83 bis 101 zeigt nun sofort: 1) Nahezu geradlinigen Verlauf aller c_a'/c_m'-Linien, abgesehen von einer systematischen Abweichung bei den kleinsten Anstellwinkeln; 2) Eine fast gleiche Neigung all dieser Geraden, ungefähr im Verhältnis 4 : 1, also entsprechend dem Koeffizienten 0,25.

Auch die Theorie lehrt, daß innerhalb des Bereiches der heute praktisch verwendeten Profile die für die Neigung der Momentenlinie maßgebenden Verhältnisse $c : a$, $b : a$, $l : a$ nur sehr wenig schwanken. Die Grenzwerte, die streng genommen für ein unendlich dünnes, gerades Profil gelten, bei den wirklichen Ausführungen aber kaum weit über- oder unterschritten werden, sind

$$a = c = \frac{l}{2} = \frac{b}{4},$$

woraus der Koeffizient in (7) und (8) zu 0,25 folgt, in Uebereinstimmung mit dem durchschnittlichen experimentellen Wert.

Nicht so klar liegen die Verhältnisse hinsichtlich der Lage der Momentenlinie

gegenüber dem Koordinatenanfang. Das konstante Glied in (7) enthält die Größe γ, den Winkel zwischen der „ersten“ und „zweiten Achse“ des Profils. Diese Größe hängt von dem ganzen Verlauf des Profils ab und läßt sich in jedem Einzelfall angeben, sobald man die konforme Abbildung des Profils auf den Einheitskreis gefunden hat. Als Anhaltspunkt habe ich an der wiederholt genannten Stelle bemerkt, daß γ etwa gleich einem Viertel des Wölbungswinkels der mittleren Profillinie gesetzt werden darf. Die Abbildungen des Versuchsberichtes zeigen in der Tat, daß die c_m'/c_a'-Linie sich nach rechts verschiebt, wenn die Wölbung zunimmt. Um die Größenordnung der Verschiebung gegenüber dem Koordinatenanfang zu prüfen, ist das

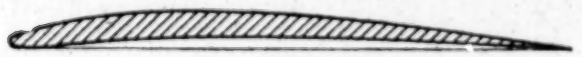


Abb. 3

Profil 397 des Versuchsberichtes (Abb. 3) ausgewählt worden, für das die Versuchspunkte sich der nach Gl. (8) mit $\lambda = \frac{2}{3}$ berechneten Geraden [oder eigentlich der genauen Linie nach (6)] gut anschmiegen (Abb. 4). Die Wölbung des Profils Abb. 3 ist aber ohne Zweifel geringer als die der theoretisch untersuchten Abb. 2, so daß man annehmen muß, das erstere habe ein wesentlich kleineres γ. Daraus würde folgen, daß der aus dem Ver-

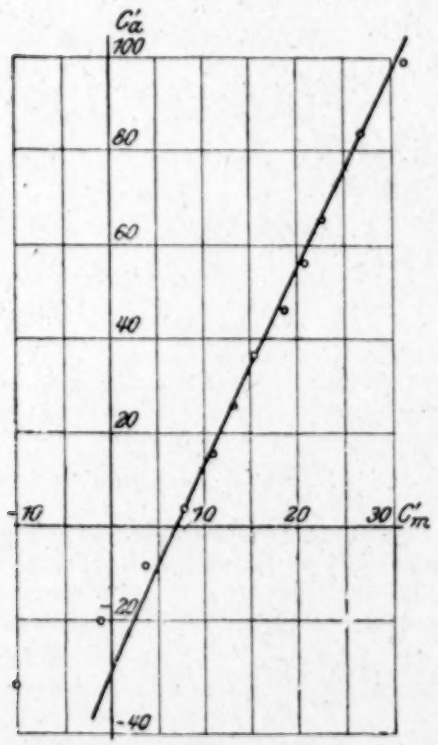


Abb 4

hältnis der Auftriebswerte $c_a' : c_a$ gewonnene Wert für λ zu klein ist. Die systematischen Versuche zur Erforschung des Einflusses, den das Seitenverhältnis des (rechteckigen) Flügels auf die Luftkräfte ausübt, haben (S. 50 des Versuchsberichtes) zu dem Ergebnis geführt, daß c_m' als Funktion von c_a' betrachtet, überhaupt vom Seitenverhältnis unabhängig ist. Da andererseits das Verhältnis $c_a' : c_a$ sehr stark vom Seitenverhältnis des Flügels abhängt, so muß man aus dem Ergebnis dieser Versuche schließen, daß in Gl. (8) ein für allemal $\lambda = 1$ zu setzen ist. Die Gegenüberstellung des Profils der Abb. 2 und verschiedener im Göttinger Versuchsbericht angeführter widerspricht zumindest dieser Folgerung nicht.

Zusammenfassend wird man sagen dürfen: Die hydrodynamische Theorie liefert in guter Uebereinstimmung mit der Beobachtung für den Zusammenhang zwischen Auftriebs- und Moment-Beiwert in erster Näherung eine Gerade von der Neigung 1:4, deren Abstand vom Koordinatenanfang mit der Wölbung wächst; das Maß der Abhängigkeit von der Wölbung und der etwaige Einfluß des Seitenverhältnisses des Flügels bedürfen noch der Aufklärung. 146

Mises.

Mechanismus zur Regelung der Antriebskraft einer Arbeitsmaschine mit veränderlichem Widerstand. Die bisher gebräuchlichen Arbeitsmaschinen mit stark veränderlichem Widerstand hatten alle den Nachteil, daß die Veränderlichkeit des Widerstandes sich in einer ähnlichen Veränderlichkeit der Antriebskraft ungünstig geltend machte. — Herrn Dr. A. Tetétleni, Budapest, ist ein D.R.P.[1]) erteilt für eine Konstruktion von Arbeitsmaschinen, bei denen dieser Übelstand ausgeschaltet ist. Der Kern des Erfindungsgedankens läßt sich in allgemeiner Fassung in folgender Aufgabestellung ausdrücken: Es sei das Werkzeug ein Bestandteil eines starren Körpers A, welcher an einer Bahn α zwangläufig geführt wird, und das Antriebsglied ein Bestandteil eines starren Körpers B, der an einer Bahn β ebenfalls zwangläufig geführt wird. Die beiden Körper A und B haben je eine Rollfläche, welche sich beständig berühren. Ist außer den beiden zwangläufigen Bahnen auch noch eine der beiden Flächen, z. B. A gegeben, so soll die Fläche B aus der Bedingung bestimmt werden, daß der Werkstückwiderstand als Funktion des Werkzeugweges $P(s_\alpha)$ und die Antriebskraft als Funktion des Antriebsgliedweges $R(s_\beta)$ vorgeschrieben ist. (Diese letztere Funktion wird bei maschinellem Antrieb im allgemeinen als eine Konstante, bei Antrieb durch einen lebenden Motor — menschliche Kraft — durch eine empirische, von einer konstanten nicht sehr erheblich abweichende Funktion gegeben sein.) Man sieht, daß die Fragestellung der Erfindung sich von den in der Maschinentechnik bekannten Problemen veränderlicher Übersetzungen darin grundsätzlich unterscheidet, daß hier die vorgeschriebenen Bedingungen nicht geometrisch-

[1]) D.R.P. Nr. 307540; ferner sind zwei Zusatzpatente angemeldet.

kinematischer, sondern statisch-dynamischer Natur sind, d. h. durch nach bestimmten Gesetzen veränderlichen Kräfte dargestellt werden.

In der vorliegenden kurzen Mitteilung wollen wir für ganz spezielle Führungen α, β die Körperform B bestimmen und zwar bei der in der Abb. 1 dargestellten Lochstanzmaschine, bei der die Führung α eine Gerade ist, die Führung β einer Drehung um den Punkt O entspricht und der Körper A durch eine einfache Rolle dargestellt ist; dann geht die Bestimmung der Fläche B einfach auf die Bestimmung des sogen. Arbeitsabschnittes der ebenen Scheibenbegrenzungskurve der unrunden Scheibe A hinaus. In Abb. 2 ist

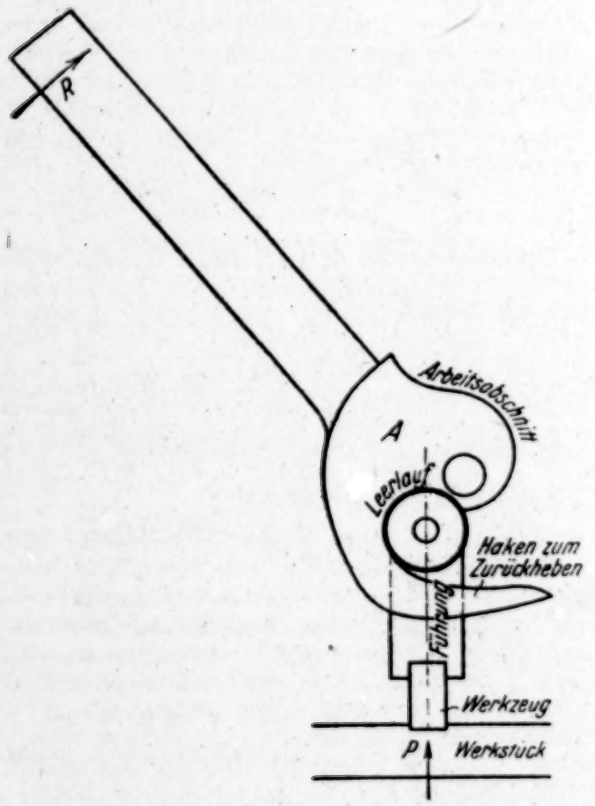


Abb. 1

die Scheibenbegrenzung einmal in ihrer Grenzlage, sodann in einer beliebigen Lage gezeichnet. Eine dritte der letztgenannten benachbarte Lage ist bloß durch das Bogenelement $C'D'$ angedeutet. Die Rolle ist in der nachfolgenden Betrachtung durch ihren Mittelpunkt ersetzt, d. h. $\rho = 0$ angenommen, und die gesuchte Scheibenbegrenzung erhalten wir nachträglich als Parallelkurve der sich durch die Annahme $\rho = 0$ ergebenden Kurve. Berechnen wir zunächst den Zusammenhang zwischen dem Winkelelement $d\varphi$ und dem dazugehörigen Wegelement dy. Aus dem Dreieck FOD folgt

$$\frac{d}{r} = \cos(\pi - \vartheta - \varphi) \cdot - \cos(\vartheta + \varphi) \quad . \quad (1)$$

Aus dem unendlich kleinen Dreieck $C'D'D$ folgt, unter Vernachlässigung des Winkels $d\varphi$, welcher die Seitenlängen nur in einem von der zweiten Ordnung kleinen Maße beeinträchtigt:

$$\frac{r\,d\varphi}{dy} = \frac{\sin(\vartheta+\varphi-\xi)}{\sin\xi} = \frac{\sin(\vartheta+\varphi)\cos\xi - \cos(\vartheta+\varphi)\sin\xi}{\sin\xi}$$
$$= \frac{\sin(\vartheta+\varphi)}{\operatorname{tg}\xi} - \cos(\vartheta+\varphi),$$

woraus unter Heranziehung von (1) folgt, daß

$$\frac{r\,d\varphi}{dy} = \frac{\sqrt{1-\frac{d^2}{r^2}}}{\operatorname{tg}\xi} + \frac{d}{r}$$

oder da aus dem Dreieck $CC'D$ $\operatorname{tg}\xi = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}$:

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{\frac{1}{r}\sqrt{r^2-d^2}}{\frac{dr}{d\varphi}} + \frac{d}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I}).$$

Ferner folgt aus dem Dreieck OFD, falls FD mit y bezeichnet wird:

$$y = \sqrt{r^2 - d^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II}).$$

Diese Zusammenhänge sind, ganz unabhängig von der Gestalt der Scheibe, immer erfüllt. Ist nun $P(y)$ und $R(\vartheta)$ vorgeschrieben, so steht uns für die Bestimmung der Schei-

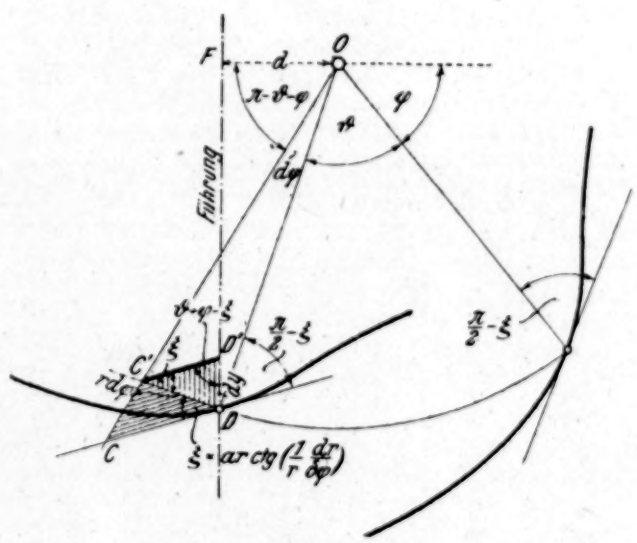


Abb. 2

bengestalt im Sinne des Satzes der virtuellen Verschiebungen folgende Gleichung zur Verfügung:

$$\frac{d\varphi}{dy} r_1 R(\vartheta) = P(y),$$

wo r_1 der konstante Hebelarm der Kraft $R(\vartheta)$ ist; oder mit der Annahme $R(\vartheta) = R = \text{const.}$

$$\frac{dr}{dy} r_1 R = P(y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{III}).$$

(welche Gleichungen natürlich bloß unter Vernachlässigung der Reibungswiderstände, Deformations- und Beschleunigungsarbeiten Geltung haben). Aus dem Vergleiche der Gleichungen (I), (II), (III) erhalten wir folgende Gleichung, welche die Veränderliche y nicht mehr enthält:

$$\frac{P\left(\sqrt{r^2-d^2}\right)}{r_1 R} = \frac{\sqrt{r^2-d^2}}{r\frac{dr}{d\varphi}} + \frac{d}{r}.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung kann durch Trennung der Veränderlichen und durch Quadratur unmittelbar geschehen:

$$\varphi = \int_{r_0}^{r} \frac{r P\left(\sqrt{r^2 - d}\right) dr}{r_1 R \sqrt{d^2 - dr}} - \int_{r_0}^{r} \frac{d\, dr}{\sqrt{r^2 - d^2}}.$$

Das ist die Polargleichung der gesuchten Scheibenbegrenzung. Ist $d = 0$, so geht sie über in

$$\varphi = \frac{1}{r_1 R} \int_{r_0}^{r} P(r)\, dr .$$

Ist $d = 0$, aber $R(\vartheta)$ nicht konstant, sondern eine beliebig gegebene Funtion, dann läßt sich auf ähnlichem Wege leicht nachweisen, daß sich die Polargleichung der gesuchten Kurve in folgender impliciter Form anschreiben läßt:

$$\int_0^{\varphi} R(\vartheta)\, d\vartheta = \frac{1}{r_1} \cdot \int_{r_0}^{r} P(r)\, dr .$$

Auf Grund dieser Zusammenhänge kann man leicht geometrische Konstruktionen zur Bestimmung der Scheibenbegrenzung ableiten. Als ein Beispiel ist die Scheibenbegrenzung gemäß der letzten Formel in der Abb. 3 konstruiert aus dem Diagramm der günstigsten Kraftentfaltung $R(\vartheta)$ und aus dem sogen. Widerstandsdiagramm $P(r) = P(y)$. Es sei bemerkt, daß in der Patentschrift vom Erfinder eine ganz andere, nicht auf analytischen Überlegungen, sondern auf der unmittelbaren Betrachtung des Arbeitsvorganges beruhende ganz allgemeine Methode angegeben ist, deren Wesen in einer Einteilung des Arbeitsvorganges in kleine Teile gleicher Leistung und in der daraus folgenden punktweisen Ermittlung der Scheibenbegrenzung liegt. In allen Fällen aber, wo die analytische Lösung in Form von Quadraturen ohne besondere Schwierigkeiten angegeben werden kann, dürfte eine auf die analytische Formel begründete Konstruktion schneller und bequemer zum Ziel führen.

Stettin. Neményi. 104

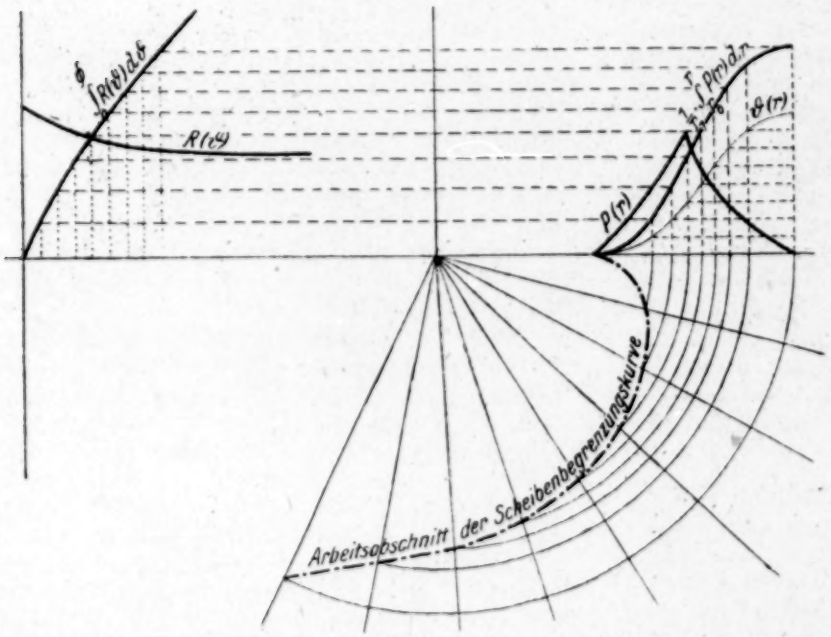


Abb. 3

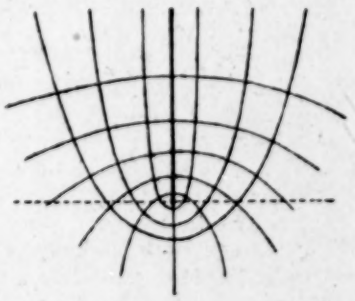
Über den freien Spiegel bei Grundwasserströmung. Die Strömung von Grundwasser geht bekanntlich in feinporigen Bodenarten wie eine Potentialbewegung vor sich. Die Rolle des Potentials wird hierbei von den von einer gemeinschaftlichen Gleiche aus zu messenden Höhenlagen der Spiegel übernommen, bis zu welchen sich das Wasser in Standrohren erheben würde, die man bis zu den betreffenden Punkten der Flüssigkeitsbahnen in den Boden senkt. Die Bahnen selbst verlaufen senkrecht zu den Flächen, die den geometrischen Ort der Bodenpunkte mit gleich hoch gelegenen Standrohrspiegeln bilden und die Flüssigkeit sickert von den Bodenpunkten höheren zu denen niedrigeren Standrohrspiegels. Ist das Grundwasser nicht von festen Wänden umgeben, sondern fließt es mit freiem Spiegel, so fällt dieser mit den Standrohrspiegeln (der Äquipotentialfläche) seiner eigenen Punkte zusammen. Der Grundwasserspiegel ist aber zugleich eine Strömungsfläche. Bezeichnet bei zylindrischer Strömung

Φ die Potentialfunktion,
Ψ die Strömungsfunktion,

so gilt also für den Spiegel bei Einführung der wagerechten Koordinaten x und der senkrechten z

$\Phi = z$ und $\Psi =$ konst. (1).

Ein zugehöriges Beispiel stellt (s. Abb.)



$$\Phi = \sqrt{h\,(r + x)}, \quad \Psi = \sqrt{h\,(r - x)} \quad . \quad (4)$$

-dar, worin $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ ist. Es zeigt sich

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{\sqrt{r + x}}{4\, r^3} (r - 2x).$$

sowie $\Phi\, \Psi = hz$

und die Bedingung (1) erfüllt. Jeder unter oder über der x-Achse gelegene Parabelast

kann als Spiegel mit einem tieferen Ast als dichte Tragschicht betrachtet werden.

Bei dem Ausfluß tritt die freie Grenzfläche an die Stelle des freien Spiegels und hier bildet die lotrechte Sickerung unter der etwas durchlässigen Sohle eines Gewässers den einfachsten Fall. Der Sickerkörper muß sich nach unten erbreitern, wenn der Abfluß seines Wassers in der Tiefe eine Hemmung erfährt.

Wien XIX/1. Ph. Forchheimer. 63.

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr.-Ing. Dr. L. **PRANDTL,** o. Professor an der Universität Göttingen unter Mitwirkung von Dr.-Ing. C. **WIESELSBERGER** und Dip.-Ing. Dr. phil. A. **BETZ,** Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. I. Lieferung. Mit einer Beschreibung der Anstalt und ihrer Einrichtungen und einer Einführung in die Lehre vom Luftwiderstand. Mit 91 Abbildungen und 2 Tafeln. München und Berlin 1921 bei R. Oldenbourg. 140 S.

Seit dem Beginn ihrer Tätigkeit im Jahre 1907 behauptet die Göttinger Modell-Versuchsanstalt unter Leitung Prandtls die führende Rolle innerhalb der deutschen Flugtechnik. Aus kleinen Anfängen hat sich die große, während des Krieges im Rahmen der Kaiser Wilhelm-Gesellschaft geschaffene neue Versuchseinrichtung entwickelt, die den namhaftesten Anstalten des Auslandes würdig zur Seite steht. Eine besondere wertvolle Eigentümlichkeit des Göttinger Instituts aber ist die hohe Wissenschaftlichkeit, die nicht zum Schaden, sondern sehr zum Vorteil der Praxis, alle Versuche und alle Versuchsvorkehrungen durchdringt. Jedermann wird es daher auf das Wärmste begrüßen, daß der Leiter der Anstalt jetzt, trotz der schwierigen Verhältnisse des Augenblicks, daran geht, die wichtigsten Ergebnisse aller Versuche, zusammen mit einer Darstellung der Einrichtungen der Anstalt in einer Reihe fortlaufender Lieferungen der weiteren Öffentlichkeit vorzulegen. Das zunächst erschienene Heft enthält manches aus früheren Veröffentlichungen Bekannte in zusammenfassender und ergänzter Form, daneben aber auch sehr viel Neues. Nach ausführlicher Beschreibung aller wesentlichen Teile der Versuchseinrichtung und der Versuchstechnik ist ein kurzer Abriß der Prandtlschen Tragflügeltheorie, soweit sie zu einer vergleichenden Beurteilung der Versuchsresultate erwünscht erscheint, den experimentellen Mitteilungen vorangestellt. Die umfangreichen Daten über die Untersuchung einer großen Zahl von Flügelprofilen, die in guten Zeichnungen und Zahlentafeln wiedergegeben sind, werden dem künftigen Flugzeugkonstrukteur außerordentlich gute Dienste leisten. Eine Reihe von Sonderuntersuchungen über die gegenseitige Beeinflussung von Tragfläche und Luftschraube, von Tragfläche und Rumpf, dann über den Reibungswiderstand bespannter Flächen, endlich über das Verhalten von Flugzeugschwimmern beschließen das reichhaltige Heft. Der Leser genießt die seltene Freude, von einem Werk, das dem Ideal der Gediegenheit und Zuverlässigkeit sehr nahe kommt, nähere Kenntnis zu gewinnen. — Dem Verlag muß für die unter den heutigen Verhältnissen besonders schwierige, sorgfältige und schöne Ausstattung alle Anerkennung ausgesprochen werden. Mises. 122

Prof. Dr. H. W. **FRAENKEL,** Privatdozent a. d. Universität Frankfurt a. M. Die Verfestigung der Metalle durch mechanische Beanspruchung. Die bestehenden Hypothesen und ihre Diskussion. Mit 9 Textfig. und 2 Tafeln. Jul. Springer, Berlin 1920. 46 S.

Das letzte Jahrzehnt ist reich an experimentellen Arbeiten, die sich mit der unter dem Namen „Verfestigung" bekannten Eigenschaft der Metalle, durch Kaltreckung und Legierung die Streckgrenze zu ändern, befassen. Aber auch Hypothesen zur Erklärung dieser Erscheinung, zumindest der Wirkung der Kaltreckung, liegen schon in nicht geringer Zahl vor. Fraenkel behandelt in dieser Schrift die bestehenden Hypothesen der Verfestigung und die daraus folgende Erklärung der damit eng verwandten Eigenschaften. Der Darstellung sind die einschlägigen Arbeiten bis etwa Anfang 1919 zu Grunde gelegt. Es muß aber erwähnt werden, daß eine sehr beachtenswerte Arbeit von P. Ludwik (Z. Ver. deutsch. Ing. 63, 1919, 142) nicht mehr in den Kreis der Betrachtung gezogen wurde.

Inhaltlich zerfällt das Buch in vier Teile. Es enthält im ersten Teil (S. 1—4) die sehr präzise Fassung des Problemes. Der zweite Teil (S. 4—25) behandelt die Translationshypothese von Tamman, die Verlagerungshypothese von Lehmann, Moellendorff und Czochralski und die gegenseitige Stellung dieser Hypothesen zueinander. Dieser Teil ist sehr ausführlich gehalten und nimmt fast die Hälfte des Buches in Anspruch. Der dritte Teil (S. 26—45) schließlich betrifft Untersuchungen, die Fraenkel mit Zink angestellt hat, dann die Schmelzhypothese, die Modifikationshypothesen von Beilby, Cohen und Quincke, die Heynsche Hypothese der verborgen-elastischen Spannungen und endlich die Verfestigung durch Warmrecken d. h. Kornverkleinerung (Moellendorff, Czochralski). Im Schlußabschnitt (S. 45—46) wird eine Zusammenfassung des behandelten Stoffes mit einem Ausblick auf künftige Wege gegeben.

Das Problem der Verfestigung ist ziemlich scharf herausgehoben; die benachbarten Gebiete der modernen Metallographie (Über den Umfang der modernen Metallographie vgl. etwa: G. Masing, Die Probleme der modernen Metallographie, Die Naturwissenschaften 9, 1921,

383) sind teils in Andeutungen gestreift, teils gar nicht erwähnt; doch scheint uns, daß zumindest die Angabe hierhergehöriger Literatur nicht überflüssig wäre.

Der Leser bekommt so auf knapp 46 Seiten einen gründlichen Einblick in die Hypothesen zur Erklärung der Verfestigung und in ihre Leistungsfähigkeit. Dem angehenden Ingenieur wird dieses Buch als Einführung sehr erwünscht sein; wir wollen der Hoffnung Ausdruck geben, daß sich diese Einführung zum Lehrbuch umgestalte und dem Verfasser bald Gelegenheit geboten sein möge, in einer neuen Auflage das Ganze des Gegenstandes, (worunter wir auch eine weitgehende Berücksichtigung der Nachbarprobleme verstehen wollen) zusammenzufassen, und damit ein Buch zu schaffen, das dem Metalltechniker die volle Grundlage gibt für gedeihliche Arbeit auf dem Gebiete der Metallverarbeitung und -veredelung.

Wien, den 12. Juni 1921.

E. Groß. 73

Dr. phil. ARTHUR **HAAS,** a. o. Professor a. d. Univers. Leipzig, Einführung in die theoretische Physik mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme. Erster Band, 2. Aufl., zweiter Band, 1. u. 2. Aufl. Berlin und Leipzig 1921, Vereinigung wissenschaftlicher Verleger Walter de Gruyter & Co. 384 u. 286 S.

Das vorliegende Buch verfolgt das Ziel, Studierende der mittleren Semester dahin zu bringen, daß sie Originalarbeiten, die sich mit den heute aktuellen Fragen der theoretischen Physik befassen, mit Verständnis lesen können. Durch diese Begrenzung seiner Aufgabe vermeidet es der Verfasser, einem Ideal der Vollständigkeit nachzujagen, das nur um den Preis der teilweisen Unverständlichkeit und auch dann nur unvollkommen erreichbar ist. Es ist ihm gelungen, ein lesbares Buch zu schreiben, was bei einer Einführung, die ein so allgemeines Ziel vor Augen hat, ziemlich selten ist. Trotz des verhältnismäßig nicht großen Umfanges und der Fülle des behandelten Stoffes hat der Verfasser es verstanden, fast das ganze Buch hindurch den Ton einer gewissen behaglichen Breite festzuhalten, auch leichte Zwischenrechnungen vollkommen durchzuführen, historische und methodologische Bemerkungen einzustreuen, kurz eine Darstellung zu geben, die wie die Erfahrung seit dem Erscheinen der ersten Auflage des ersten Bandes (1919) schon gezeigt hat, von den Studierenden sehr gerne gelesen wird. Nur im letzten Abschnitt über allgemeine Relativitätstheorie erlahmt ein wenig die Geduld des Autors und muß durch Geduld des Lesers ersetzt werden, da hier auch schwierigere Zwischenrechnungen als zu umständlich weggelassen sind.

Die Vereinigung von leichter Lesbarkeit, großem Stoff und kleinem Raum sucht der Verfasser dadurch zu erreichen, daß er besonders bei Behandlung der klassischen Theorien überall mit großer Ausführlichkeit die Aufstellung der Grundgleichungen behandelt, auf spezielle Probleme aber nicht eingeht. So werden z. B. die Eulerschen Gleichungen für die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt abgeleitet, ihre Anwendung aber an keinem Beispiel (z. B. aus der Kreiseltheorie) gezeigt. Vielleicht noch ausgeprägter ist diese Methode im Abschnitt über Hydrodynamik, wo ziemlich ausführlich über alle kinematischen Hilfsmittel zur Darstellung der Bewegung der Kontinua berichtet, der Leser also in die Lage versetzt wird, die in Abhandlungen vorkommenden analytischen Ausdrücke für Wirbel oder Quellen u. a. m. sofort als solche zu erkennen. Am Schlusse werden die Eulerschen Grundgleichungen der Flüssigkeitsbewegungen hingeschrieben, es wird aber gar nicht mitgeteilt, wie nun eigentlich die Probleme beschaffen sind, die mit Hilfe dieser Gleichungen gelöst werden können, ja nicht einmal das mathematische Randwertproblem formuliert, das sich an diese Gleichungen knüpft. Eine solche Reduktion der Mechanik auf ein bloßes Schema ist in Lehrbüchern der theoretischen Physik nicht selten zu finden; sie ist eine der Ursachen der großen Entfremdung, die zwischen dem physikalisch und dem technisch gebildeten Leserkreis besteht und deshalb vom Standpunkt der allgemeinen naturwissenschaftlichen Bildung sehr zu bedauern. Dieses Verhalten gegenüber der Mechanik ist also nichts gerade für das Haassche Buch Charakteristisches und innerhalb dieses Buches überdies nichts für die Behandlung der Mechanik Charakteristisches, sondern liegt wie gesagt im ganzen Plan des Verfassers. Auch in der Elektrizitätslehre wird die Aufstellung der Feldgleichungen sehr ausführlich und pädagogisch geschickt behandelt, aber z. B. beim elektrostatischen Problem wieder die Randwertaufgabe, die hier vorliegt, nicht einmal formuliert.

Alle diese Abschnitte sind so angelegt, daß sie nicht dazu anleiten, theoretisch-physikalisch selbständig zu arbeiten, sondern Arbeiten auf diesem Gebiet mit Genuß zu lesen, wie etwa ein Buch mit Beschreibungen von Speisen, aus denen man aber nicht lernt, sie zu kochen, sondern sie mit Verständnis zu essen.

Der erste Band enthält in zehn Kapiteln in der eben gekennzeichneten Art dargestellt: die Bewegung des freien materiellen Punktes, die Bewegung von Systemen freier Massenpunkte, die allgemeinen Prinzipien der Dynamik, die Relativbewegung, die Bewegung starrer Körper, die Bewegung der Flüssigkeiten, die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, die allgemeine Theorie der Schwingungen, die Theorie des Lichtes und die Elektronentheorie. Am Schluß enthält der Band eine 22 Seiten lange Zusammenfassung des Inhaltes, in der jeder Paragraph in wenige Sätze zusammengezogen ist. Diese gekürzte Bearbeitung des ganzen Stoffes ist recht geschickt gemacht und zur Wiederholung für Studierende sehr geeignet.

Der zweite Band umfaßt in sechs Kapiteln: die Theorie der Spektren, die Theorie der Grundstoffe, Statistik, Thermodynamik, Relativitätstheorie und Theorie der Gravita-

tion. Bei diesen meist noch in rascher Entwicklung begriffenen Theorien war es nicht möglich, die Behandlungsweise des ersten Bandes vollkommen beizubehalten; denn gerade die ausführliche und leicht faßliche Aufstellung der Grundgleichungen jeder Theorie stößt hier auf große Schwierigkeiten, die teils in der Unsicherheit des Fundaments selbst liegen, teils darin, daß eine einfache Darstellung sich noch nicht herausgebildet hat. Zu einer solchen gehört außer dem Fortschritt der Wissenschaft selbst auch eine gewisse Einstellung der allgemeinen geistigen Disposition der studierenden Generation, die heute für die eben im Werden begriffenen Gedanken naturgemäß noch nicht vorhanden sein kann, da ja ihr Grund durch den Schulunterricht gelegt wird, der noch auf ganz anderen Grundlagen aufgebaut ist. Der Verfasser sucht aber doch einen gewissen einheitlichen Grundgedanken festzuhalten, der ihm als das naturgemäße Ergebnis der historischen Entwicklung erscheint, die zu unserer modernen Physik geführt hat: Das ist der Gedanke des stufenweisen Aufbaues der Materie aus immer feineren und feineren Bausteinen. In seinem Streben nach einheitlicher Darstellung geht der Verfasser so weit, daß er die Thermodynamik aus der atomistisch-statistischen Auffassung ableitet und sie nicht, wie üblich, auf die phönomenologischen Grundsätze der Unmöglichkeit des Perpetuum mobile erster und zweiter Art gründet.

Der Verfasser behandelt die Bohrsche und Kosselsche Theorie der Materie unter Heranziehung der Untersuchungen über die Isotopen und die Atomzertrümmerung, wie sie in neuester Zeit von Rutherford und Aston angestellt wurden, in sehr ausführlicher und faßlicher Weise, so daß der Leser auf diesem Gebiet über den Stand der Forschung gut unterrichtet wird. Nur wird es vermieden, auf grundsätzliche Fragen der Quantentheorie irgendwie einzugehen, ja es wird sogar überhaupt nicht von einem allgemeinen Quantenansatz ausgegangen, sondern in jedem einzelnen Fall die Qauntenvorstellung in der entsprechenden Art hypothetisch eingeführt. Dadurch gelingt es dem Verfasser wie im ersten Band durch Verzicht auf die Anleitung zu selbständiger Arbeit den Leser in pädagogisch geschickter Weise zum Lesen von Arbeiten vorzubereiten. Man hat nur manchmal das Gefühl, von einem geschickten und beruhigenden Führer an Abgründen vorbeigeführt zu werden, wobei man die Sicherheit gegenüber Absturz durch Verbinden der Augen gewinnt und nicht durch genaue Erforschung der Grenze zwischen Weg und Abgrund. Dasselbe Verfahren befolgt der Verfasser auch in dem so problematischen Gebiet der Statistik, wo er, ohne auf schwierige und strittige Fragen einzugehen, den Leser doch mit den wichtigsten Ergebnissen und deren Anwendung vertraut macht, wieder durch eine Art referierenden Verfahrens: es werden stillschweigend die durchgeführten Probleme so ausgewählt, daß sie gerade noch ohne Fehler mit einfachen Hilfsmitteln behandelt werden können, und dann die Verallgemeinerungen dem Leser als Analogie erzählend mitgeteilt.

Sehr schwer ist es diese Methode auch bei einer einführenden Darstellung der Relativitätstheorie beizubehalten, denn hier kommt alles auf ein genaues Verständnis der Grundlagen an. Der Verfasser hat versucht, auch hier ein abgekürztes Verfahren einzuschlagen, das den Studierenden auf glattem Weg ins Innere der Theorie hineinbringt. Er hat mit Absicht ganz den Begriff der Uhren einzuführen unterlassen und eine ziemlich formalistische Methode angewendet. Mir scheint, daß der Anfänger auf diese Art kaum den Eindruck bekommen wird, daß es sich um sehr zwingende Gedankengänge handelt. Und gerade darauf kommt es hier mehr an als bei den Atomtheorien, wo die Fülle der Anknüpfungspunkte an die konkrete Erfahrung einigermaßen für die Mängel in den Grundlagen entschädigt. Ich glaube, daß man bei einer Einführung in die Relativitätstheorie sich streng daran halten muß darzustellen, welche grundsätzlich durch den Versuch prüfbare Tatsachen aus der Hypothese des Relativitätsprinzips mit Notwendigkeit fließen und daß man die Transformationsformeln nur als Zusammenfassung dieser Tatsachen darstellen muß. Ob mit dem alten Zeitbegriff dabei gebrochen wird oder nicht, ist eine so vieldeutige Aussage, daß es am besten ist, sie in physikalischen Darstellungen lieber nicht zu gebrauchen und ich würde vorschlagen, anstatt auf die Verwendung von Uhren einmal lieber auf die Verwendung des Zeitbegriffes zu verzichten. Nur dann wäre es möglich, eine Darstellung zu geben, die in dem Leser nicht den Eindruck erweckt, daß die Relativitätstheorie ein Tummelplatz von Begriffsspielereien ist, sondern ein ebenso ordentlich konstruierter Teil der Physik wie etwa die Thermodynamik. Gerade hier an der Grenze des Erfahrungsinhaltes, der noch mit den üblichen physikalischen Begriffen bearbeitbar ist, muß darauf gesehen werden, nur solche Aussagen aufzustellen, die einen wenigstens im Prinzip durch Erfahrung verifizierbaren oder widerlegbaren Inhalt haben. Aus der Darstellung des Verfassers lernt der Studierende allerdings die Ergebnisse der Relativitätstheorie verhältnismäßig leicht kennen, er wird aber am Schluß sich nicht darüber klar sein, was er nun eigentlich an festen Bestandteilen seinem physikalischen Weltbild hinzugefügt hat.

Wie im allgemeinen, so leidet auch im einzelnen die Darstellung der Relativitätstheorie an allzugroßer Abstraktheit und ich möchte dabei nur auf einen Punkt hinweisen, weil er auch in vielen anderen populären und halbpopulären Darstellungen der Relativitätstheorie nicht mit genügender Ueberzeugungskraft behandelt ist: nämlich auf den Beweis für die Trägheit der Energie. Wenn man aus den Bewegungsgleichungen des freien Massenpunktes in üblicher Weise die Arbeit der Kräfte in der Zeiteinheit berechnet, so fin-

det man, daß sie sich als zeitlicher Differentialquotient des Ausdruckes

$$L = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

darstellen läßt, wo m_0 die Ruhmasse, w die Geschwindigkeit des Massenpunktes und c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Daraus schließt man, daß dieser Ausdruck als kinetische Energie des Massenpunktes aufgefaßt werden kann. Natürlich bleibt eine additive Konstante unbestimmt, die man eventuell so bestimmen kann, daß für $w = 0$ der Ausdruck verschwindet. Die zufällige Form, in der wir gerade den Ausdruck angeschrieben haben, läßt sich aber nicht zu Beweisen verwenden. Der Verfasser wie auch manche andere Autoren schließen aber so: für $w = 0$ reduziert sich unser Ausdruck auf $L_0 = m_0 c^2$ Das ist also die Energie des Massenpunktes im Ruhezustand. Daher besteht zwischen innerer Energie L_0 (z. B. Wärmeenergie) und Ruhmasse m_0 die angeschriebene Beziehung. Dieser Schluß ist durchaus nicht überzeugend, denn nach der Ableitung wissen wir nur, daß die Zunahme von L gleich der geleisteten Arbeit ist, während über die Bedeutung des Ausdruckes selbst für spezielle Werte der Variablen nichts folgt und auch nichts folgen kann, da die ganze Ableitung sich nur auf kinetische Energie und Arbeit bezieht und der Übergang zur inneren Energie noch die Anwendung eines Prinzips neben den Gleichungen verlangt, nämlich eine direkte Anwendung des Relativitätsprinzips.

Der eigentliche Kern des Beweises besteht vielmehr darin, daß die Masse des bewegten Punktes, wie sie aus dem Impuls definiert wird

$$M = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

beträgt und daher ihre Zunahme dM mit der Zunahme der kinetischen Energie dL in der Beziehung $dL = c^2 dM$ steht. Wenn nun in einem abgeschlossenen System ein Vorgang sich abspielt, bei dem kinetische Energie in Wärme übergeführt wird, so nimmt die Summe der L für die Körper des Systems ab und es müßte daher auch die Summe der M abnehmen, wenn man annehmen wollte, daß die Ruhmassen sich nicht ändern. Nun läßt sich aber aus dem Relativitätsprinzip folgern, daß die Summe der M in einem abgeschlossenen System konstant bleiben muß und das ist bei Abnahme der kinetischen Energie nur so möglich, daß nach Maßgabe der entstehenden Wärmeenergie sich die Ruhmassen vergrößern.

Bei allen diesen Bemerkungen muß aber zusammenfassend nochmals betont werden, daß es dem Verfasser, wie vielleicht keinem vor ihm, gelungen ist, eine für Studierende geeignete und lesbare Einführung in die moderne theoretische Physik zustande zu bringen, die gewiß viele, die sich sonst in dieses Gebäude nicht hineinwagen würden, dazu ermutigen wird.

Als eine besondere Eigenheit des Buches sei noch zum Schluß neben der sehr geschickten Zusammenfassung des Inhaltes, die sich auch am Schluß des zweiten Bandes findet, die chronologische Übersicht der wichtigsten Leistungen auf dem Gebiet der Physik und das Autorenverzeichnis erwähnt, die hier lehrreicher angelegt sind, als es in ähnlichen Werken der Fall zu sein pflegt. 131

Prag. Philipp Frank.

NACHRICHTEN

David Hilbert. Am 23. Januar feierte in Göttingen David Hilbert seinen sechzigsten Geburtstag. Der Lebenslauf dieses unumstrittenen größten unter den lebenden Mathematikern ist rasch erzählt. Ist er doch so schlicht wie bei den meisten Gelehrten, deren Schifflein von den Wogen der Zeit fast unberührt dahingleitet. Es sind andere Stürme, die den echten Forscher durchrütteln und von hartem Ringen mit dem Problem legen Hilberts Erfolge in der Lösung der schwierigsten Fragen, legt seine Führerschaft in so vielen mathematischen Disziplinen beredtes Zeugnis ab. Er ist in Königsberg i. Pr. 1862 geboren. Nur seine außergewöhnliche, früh hervortretende mathematische Begabung ermöglichte ihm, die vorschriftsmäßige Reife zum Universitätsstudium zu erlangen. Achtsemestrige Studien in Königsberg, Heidelberg, Leipzig und Paris fanden 1881 ein erstes Erträgnis in einer der Invariantentheorie angehörigen Dissertation. Dieser Disziplin widmete er sich dann durch Privatdozentenzeit und Königsberger Professur fast bis zu seiner 1893 erfolgten Berufung nach Göttingen, in ihrem Dienst sich zu einem der ersten Mathematiker aller Zeiten durcharbeitend. Bald 30 Jahre ist er nun der Göttinger Wirkungsstätte treu geblieben, von der sein Ruhm sich über die ganze Welt verbreitete und wo er Schüler aus aller Herren Länder um sich sammelte. Allen verlockenden Rufen hat er widerstanden. Die Mitgliedschaft fast aller Akademien der Welt wurde ihm zuteil.

Denkt man an Hilberts Schaffen, so pflegt man vor allem seine Bedeutung für die reine Mathematik ins Auge zu fassen. Denn die theoretische Physik, in der er sich in den letzten Jahren, hauptsächlich unter Anwendung seiner axiomatischen Methode betätigte, wird ja kaum zu der angewandten Mathematik gerechnet, und in der Tat sind hier auch seine Forschungen mehr den Prinzipien als der Erfindung von Forschungsmethoden gewidmet. Aber viele der von Hilbert ersonnenen analytischen Methoden besitzen eminente Bedeutung für die angewandte Mathematik. In einigen Fällen ha-

ben sich auch schon angewandte Mathematiker gefunden, deren mathematische Fähigkeiten dazu ausreichten, die Hilbertschen Gedanken bis zur praktischen Verwertung durchzudenken und durchzuarbeiten. Hier mag es unsere Aufgabe sein, auf einige solche in den Hilbertschen Arbeiten steckende, teils schon gehobene, teils noch zu hebende Schätze hinzuweisen; man ehrt ja wohl einen rüstigen Jubilar nicht besser als indem man auf die Fruchtbarkeit seines Schaffens hinweist.

Die Methoden, an die ich da in allererster Linie denke, beziehen sich auf die Lösung der Randwertaufgaben gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen. Verdankt ihm schon die Integralgleichungsmethode weiteste Förderung, so hat er doch darüber hinaus nicht weniger als zwei selbständige Methoden von größter Tragweite ersonnen. Das ist die Methode der Variationsrechnung und die Methode der unendlich vielen Variablen. Daß ein Genie immer im Vorhandenen wurzelt, ist eine Binsenwahrheit. Das Verdienst liegt in dem, was das Genie aus dem Vorhandenen macht. Eine Methode der Variationsrechnung lag ja im Dirichletschen Prinzip vor. Man verwandte es im theoretischen Sinn. Die Förderung, die ihm Weierstaß' Kritik angedeihen ließ, bestand in seiner Vernichtung. Erst Hilberts kritischer Geist gab ihm wieder eine positive Wendung, indem er zeigte, daß eben Weierstraß' Kritik zu Unrecht erfolgt war, da sie die hier vorliegenden besonderen Bedingungen gar nicht in Betracht zog. In Hilberts Ansatz lag bei dem Stand der Dinge um den Jahrhundertwechsel insofern eine ungeheure Wendung, als er Probleme der Variationsrechnung ohne den Umweg über die Differentialgleichungen zu behandeln lehrte. Tatsächlich hat dann der Physiker Ritz als erster die Fruchtbarkeit dieses durch Hilberts Leistung gangbar gewordenen Weges für die praktische Lösung von Randwertaufgaben an mehreren voll durchgeführten Aufgaben aus der Theorie der Schwingung von Saiten und Membranen bestätigt. Weiter hat sich dann gezeigt, daß diese Methode es z. B. erlaubt, die Schwingungen der parabolischen Membran rechnerisch zu verfolgen, eine Aufgabe, der die früheren Mittel nicht gewachsen waren. Gleich weit reichende Erfolge hat die Methode der unendlich vielen Variabeln in der Hilbertschen Anwendung auf Randwertaufgaben noch nicht gezeitigt. Und doch liegt hier ein Verfahren vor, das bei weiterer Ausbildung eine starke Zugkraft verspricht. Man denke nur an die Bedeutung, die die Methode bei viel einfacheren Aufgaben in ihren vor-Hilbertschen Formen z. B. als Methode der unbestimmten Koeffizienten gewonnen hat. Hier handelt es sich hauptsächlich darum, das Entwicklungsverfahren, dessen Koeffizienten die Aufgabe zu bestimmen verlangt, den besonderen Verhältnissen der Aufgabe zweckmäßig anzupassen. Man denke weiter an die linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, auf die z. B. die praktische Auflösung der Integralgleichungen aber auch die der Differenzengleichungen, die in der Technik immer steigende Bedeutung gewinnen, zurückführt. Sie harren noch eines Mannes, der die Hilbertschen Methoden für die praktische Analysis nutzbar macht. In dieser Richtung vor allem eröffnet sich ein weites Feld von Aufgaben, die Hilberts Leistungen der praktischen Mathematik stellen. Liegt darin schon ein Verdienst, so wird es noch erhöht, wenn man bedenkt, daß Hilberts Schaffen eben den ersten und schwersten Schritt bewältigt hat: er hat die prinzipielle Möglichkeit der neuen Wege erkannt; Sache der technischen Durchbildung ist es dann, die Verfahren ökonomisch auszugestalten.

Bieberbach. 140.

Berliner Ausschuß für technische Mechanik. Seit Ende April 1921 wurden in der 23. bis 30. ordentlichen Sitzung des Ausschusses folgende Vorträge gehalten[1]):

Prof. Dr.-Ing. Weber: »Über die Analogie zwischen den 5 Problemen der Mechanik: Ebenes Pendel, zylindrische Luftschiffhülle und Hohlreifen unter Innendruck«. — Prof. von Kármán, Aachen: »Oberflächenreibung von Flüssigkeiten«. — Prof. Dr.-Ing. Weber: »Analogien in der Mechanik«. — Prof. Reißner: »Die Federung der Motorwagen«. — Dr.-Ing. Sonntag: »Theoretische Grundlagen des Walzvorganges«. — Prof. Dr. Bieberbach: »Nomographie«. — Prof. Weber: »Über die Reibungswiderstände der Schiffe und Platten«. — Dr. W. Hoff: »Ziele des Segelfluges und der Wettbewerb in der Rhön«.

Für die Monate Februar und März sind Vorträge von Herrn Prof. Hartmann »Über den heutigen Stand der Zwanglauflehre (Kinematik)«, 1. Teil: Die Bildungsgesetze der Mechanismen, 2. Teil: Die Bewegungsgesetze der Mechanismen, angekündigt.

[1]) Vergl. dazu diese Zeitschrift 1, 1921, S. 160.

(Redaktionsschluß 28. Februar 1922.)

Berichtigung

zu dem Aufsatze von L. Prandtl (diese Zeitschrift 1, S. 431—436).

S. 433. 2 Zeile nach Formel (2): An Stelle von x ist y zu setzen.
S. 433. Formel (4): Auf der rechten Seite der Gleichung ist der Faktor k zuzufügen.

L. Prandtl.

In der Ueberschrift der Buchbesprechung Bd. 1, S. 486, soll es heißen: »C. Bach, Elastizität und Festigkeit« statt »Elektrizität und Festigkeit«.

Verantwortlich für die Schriftleitung Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43.
Druck von Anton Bertinetti, Berlin N 54

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

Bd. 2 **Ende April 1922** **Heft 2**

Inhalt:

	Seite
Hauptaufsätze. E. Schwerin: Zur Stabilität der dünnwandigen Hohlkugel unter gleichmäßigem Außendruck	82
L. Föppl: Ueber eine Analogie zwischen rotierender Scheibe und belasteter Kreisplatte	92
L. Schiller: Die Entwicklung der laminaren Geschwindigkeitsverteilung und ihre Bedeutung für Zähigkeitsmessungen	96
H. Reissner: Stationärer Bewegungszustand einer schraubenförmigen Wirbelfläche	106
M. Abraham: Die Induktion von Wechselströmen in einer ebenen, leitenden Schicht	109
R. Neuendorff: Zeichnerische Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung in Polarkoordinaten	131
Zusammenfassende Berichte. Th. Pöschl: Bisherige Lösungen des Torsionsproblems für Drehkörper	137
Kurze Auszüge. Mathematische Statistik	147
Kleine Mitteilungen. Föppl: Das Schaukelpendel — Lohmann: Die Hermanuschen Schablonen zur harmonischen Analyse	150
Buchbesprechungen. Gröber: Die Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges — Bader: Grundlagen der Flugtechnik. Entwerfen und Berechnen von Flugzeugen — Geusen: Die Eisenkonstruktionen — Bieberbach: Lehrbuch der Funktionentheorie I. Elemente der Funktionentheorie	156
Nachrichten	160
Zuschriften an den Herausgeber	160

HAUPTAUFSÄTZE

Zur Stabilität der dünnwandigen Hohlkugel unter gleichmäßigem Außendruck.

Von **E. SCHWERIN** in Charlottenburg.

In einer 1915 veröffentlichten Arbeit[1]) hat Zoelly die Stabilität dünner zylindrischer und kugelförmiger Schalen untersucht und dabei u. a. auch das Problem der geschlossenen, unter gleichmäßigem Außendruck stehenden dünnen Hohlkugel behandelt, für die er ebenso wie für die flache Kugelschale unter der Voraussetzung, daß das Ausknicken symmetrisch in bezug auf die Vertikalachse erfolgt, als kleinstmöglichen Wert des kritischen Druckes findet:

$$p_{\min} = E\frac{\delta^2}{a^2}\frac{2}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}},$$

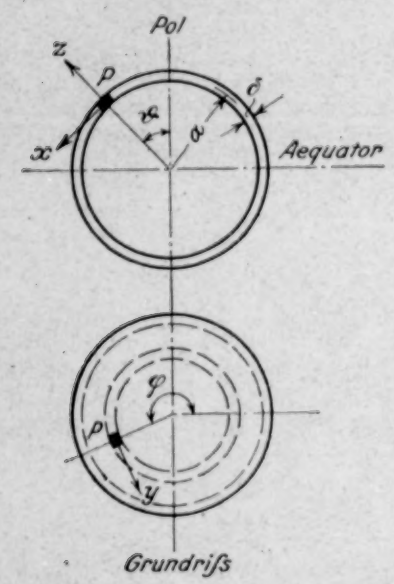
wenn E die Elastizitätszahl, σ die Querkontraktionszahl, δ die Wandstärke, a der Halbmesser der Mittelkugel.

Bei dieser Untersuchung wurden jedoch nur solche Ausknickungsformen der Meridianlinie betrachtet, die auch zum Aequator symmetrisch verlaufen, während über die in bezug auf den Aequator unsymmetrischen Meridianformen nur gesagt wurde, daß sie infolge der großen Zahl der beim Ausknicken auftretenden Wellen ohne Einfluß auf den Wert des kritischen Druckes seien, so daß für den letzteren also in jedem Falle der oben angeführte Grenzwert angenommen werden könne.

In der vorliegenden Arbeit sollen nun die in bezug auf den Aequator unsymmetrischen Ausknickungsformen nicht von vornherein ausgeschlossen bleiben; vielmehr soll gezeigt werden, wie ohne jede vorherige willkürliche Annahme über die Form der ausgeknickten Meridianlinie allein aus den mechanischen Bedingungen des Problems und dem Verhalten der Lösungen an der Stelle $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ sich das Knickkriterium in ganz zwangloser Weise ableiten läßt. Hierbei wird sich zeigen, daß beide Ausknickungsformen gewissermaßen gleichberechtigt sind und kritische Drucke ergeben können.

[1]) Zoelly, Ueber ein Knickungsproblem an der Kugelschale, Diss., Zürich, Technische Hochschule, 1915.

1. Aufstellung der Hauptgleichung des Problems. Eine allseitig geschlossene dünne Hohlkugel von der Wandstärke δ, dem Halbmesser der Mittelkugel a aus homogenem Material (Elastizitätszahl E und Querkontraktionszahl σ) sei durch gleichmäßigen, radial gerichteten Außendruck belastet, und es möge sich darum handeln, denjenigen kritischen Wert des Außendruckes zu bestimmen, bei dem zuerst ein Einbeulen der Schale auftritt.



Zu diesem Zweck werde in einem Punkt P, dessen Lage auf der Kugel durch den Längenwinkel φ und das Komplement der Breite ϑ bestimmt sei, ein von zwei unendlich benachbarten Längs- und Breitenkreisen begrenztes Kugelelement herausgeschnitten und es werde P zum Anfangspunkt eines Koordinatensystems gewählt, dessen x-, y-, z Achsen mit den Tangenten an den Längen-, den Breitenkreis und mit dem nach außen weisenden Kugelradius zusammenfallen mögen.

Auf die nach wachsendem ϑ und φ hin gelegenen Seitenflächen des Elementes wirken dann bei rotationssymmetrischer Belastung Kräfte und Momente, deren auf die Längeneinheit und die ganze Wandstärke δ bezogene Resultanten folgendermaßen bezeichnet seien:

Längs des Breitenkreis-Schnittes: gleichmäßig über die Wandstärke verteilte Normalspannungen, als Zugspannungen positiv, Resultierende T_1; linear mit dem Abstand von der Mittelkugel anwachsende Biegungsspannungen, statisch gleichwertig einem Kräftepaar vom Moment G_1, positiv, wenn auf Zubiegung der Schale hinwirkend; Schubspannungen in Richtung der z-Achse, Resultierende N_1;

längs des Meridian-Schnittes: analoge Spannungsresultanten T_2 und Spannungsmomente G_2, gleichfalls als zubiegende Momente positiv.

Die auf die Oberflächeneinheit bezogenen Komponenten der äußeren Belastung seien X, Y, Z, in Richtung der entsprechenden Achsen wirkend.

Die Formänderung der Schale sei durch folgende Größen gekennzeichnet:

u, w in die Richtungen der X- bezw. Z-Achse fallende Komponenten der Gesamtverschiebung des Punktes P.

ε_1, ε_2 in der Mittelfläche gemessene Dehnungen in Richtung der Meridian- bezw. Breitenkreistangente.

$\varkappa_1$, $\varkappa_2$ Krümmungsänderungen im Meridian- bezw. Breitenkreisschnitt, als Aufbiegungen positiv.

Um nun die Grundgleichungen des vorliegenden Problems anzusetzen, gehen wir von den von Love[1]) angegebenen allgemeinen Beziehungen für dünne Schalen aus, die wir auf den hier vorliegenden Fall der Kugelschale anwenden. Hierbei werde vorausgesetzt, daß das Ausknicken rotationssymmetrisch erfolgt, und daß der Anfangspunkt des Koordinatensystems in den Mittelpunkt der zuerst auftretenden Einbeulung gelegt wird. Da man sich auf kleine Abweichungen erster Ordnung von der ursprünglichen Kugelform beschränken darf, genügt es, in den Loveschen Ausdrücken zu setzen:

$$A = +a, \quad B = +a\sin\vartheta, \quad \alpha = \vartheta, \quad R_1 = R_2 = -a$$

Beachtet man, daß, wie bei allen Stabilitätsproblemen, auch hier die Gleichgewichts- und Formänderungsbedingungen in der für die deformierte Schale gültigen Form angesetzt werden müssen, so ergeben sich auf diesem Wege folgende Gleichgewichtsbedingungen, wobei zur Abkürzung Differentiationen nach ϑ durch $'$ gekennzeichnet seien:

$$\left.\begin{aligned} (T_1\sin\vartheta)' - T_2 r_2' + N_1 q_1' + aX'\sin\vartheta &= 0 \\ (N_1\sin\vartheta)' - q_1' T_1\sin\vartheta + T_2 p_2' + aZ'\sin\vartheta &= 0 \\ (G_1\sin\vartheta)' - G_2 r_2' - N_1 a\sin\vartheta &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1),$$

wo

$$r_2' = \cos\vartheta + \frac{w'-u}{a}\sin\vartheta, \qquad q_1' = 1 - \left(\frac{w'-u}{a}\right)', \qquad p_2' = -\sin\vartheta + \frac{w'-u}{a}\cos\vartheta \quad (1'),$$

[1]) Love, Treatise on the Theory of Elasticity (1906), deutsch von A. Timpe, Leipzig 1907, Teubner, S. 612/13 und 594/97.

während die Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderungen lauten:

$$a\varepsilon_1 = w + u', \qquad a\varepsilon_2 = w + u\cot\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

$$a^2\varkappa_1 = w'' - u', \qquad a^2\varkappa_2 = (w' - u)\cot\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

$$T_1 = \frac{12\,D}{\delta^3}(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2), \qquad T_2 = \frac{12\,D}{\delta^3}(\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

$$G_1 = -D(\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2), \qquad G_2 = -D(\varkappa_2 + \sigma\varkappa_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Mit Rücksicht auf (2) lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen (1) auch in der Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} T_1' + T_1\operatorname{ctg}\vartheta - T_2(\operatorname{ctg}\vartheta + a\varkappa_2\operatorname{tg}\vartheta) + N_1(1 - a\varkappa_1) + aX' &= 0 \\ N_1' + N_1\operatorname{ctg}\vartheta - T_1(1 - a\varkappa_1) - T_2(1 - a\varkappa_2) + aZ' &= 0 \\ G_1' + G_1\operatorname{ctg}\vartheta - G_2(\operatorname{ctg}\vartheta + a\varkappa_2\operatorname{tg}\vartheta) - N_1 a &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (1\mathbf{a}).$$

Solange nun der Außendruck p einen gewissen Wert nicht überschreitet, die Schale also noch die ursprüngliche Kugelform besitzt, wird ein Spannungszustand vorhanden sein, der durch folgende Werte der Spannungen und Formänderungen, die durch den Index 0 gekennzeichnet seien, bestimmt ist:

$$\left.\begin{aligned} T_{1\circ} = T_{2\circ} = -\frac{ap}{2}, \qquad N_{1\circ} = 0, \qquad G_{1\circ} = G_{2\circ} = 0, \qquad \varkappa_{1\circ} = \varkappa_{2\circ} = 0 \\ \varepsilon_{1\circ} = \varepsilon_{2\circ} = -\frac{ap}{2}\frac{1-\sigma}{E\delta}, \qquad u = 0, \quad w = -\frac{a^2p}{2}\frac{1-\sigma}{E\delta} \end{aligned}\right\} \quad (6).$$

Erreicht jedoch der Druck den kritischen Wert, so wird neben diesem Grundzustand noch ein anderer, demselben gewissermaßen benachbarter, mit nur sehr wenig von ersterem verschiedenen Spannungen und Formänderungen möglich sein, der gleichfalls die Randbedingungen befriedigt. Bezeichnet man also die Spannungen und Verschiebungen dieses letzteren Zustandes mit gewöhnlichen Buchstaben, die zum Ausgangszustand (6) hinzuzufügenden, sehr kleinen Zusatzspannungen und Verschiebungen durch überstrichene Buchstaben, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} N_1 = N_{1\circ} + \bar{N}_1 \qquad u = u_\circ + \bar{u} \qquad Z = Z_\circ + \bar{Z} \\ G_1 = G_{1\circ} + \bar{G}_1 \qquad w = w_\circ + \bar{w} \qquad X = X_\circ + \bar{X} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

usw.,

wo also $\bar{N}_1$ $\bar{G}_1$ usw. sehr kleine Größen darstellen und $Z_0 = -p$, $X_0 = 0$ zu setzen ist.

Führt man (7) in die Gl. (1) bis (5) ein, so erhält man unter Vernachlässigung der Produkte der sehr kleinen Größen:

$$\bar{T}_1' + (\bar{T}_1 - \bar{T}_2)\operatorname{ctg}\vartheta + \bar{N}_1 + a\bar{X} = -\frac{pa^2}{2}\varkappa_2\operatorname{tg}\vartheta$$

$$\bar{N}_1 + \bar{N}_1\operatorname{ctg}\vartheta - (\bar{T}_1 + \bar{T}_2) + a\bar{Z} = +\frac{pa^2}{2}(\varkappa_1 + \varkappa_2),$$

während Gl. (2) bis (5) unverändert, nur mit überstrichenen Größen zu denken sind.

2. Integration der Hauptgleichung. Das vorstehende Gleichungssystem läßt sich nun nach Zoelly[1]) in folgender Weise auf eine einzige Gleichung reduzieren und integrieren[2]).

Die aus den Gl. (2) und (3) folgende Beziehung

$$\frac{w' - u}{a} = a\varkappa_2\operatorname{tg}\vartheta = \varepsilon_2' - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cot\vartheta$$

ergibt, wenn in derselben $\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ durch $T_1\,T_2$ nach Gl. (4) ersetzt werden:

$$T_1' + T_2' - T_1'(1 + \sigma) - (T_1 - T_2)(1 + \sigma)\cot\vartheta = E\delta a\varkappa_2\operatorname{tg}\vartheta.$$

Addiert man hierzu die mit $(1 + \sigma)$ multiplizierte erste Gl. (8), sowie die zweite, differenzierte Gl. (8), so erhält man bei Benutzung des von Meißner[3]) eingeführten homogenen Differentialoperators:

$$L(U) = U'' + U'\cot\vartheta - U\operatorname{ctg}^2\vartheta$$

folgende Gleichung:

$$L(N_1) + N_1\sigma + a\{Z' + X(1 + \sigma)\} = E\delta a\varkappa_2\operatorname{tg}\vartheta + \frac{pa^2}{2}[\varkappa_1' + \varkappa_2' - (1 + \sigma)\varkappa_2\operatorname{tg}\vartheta].$$

---

[1]) A. a. O. Die hier gegebene Ableitung deckt sich im wesentlichen mit der Zoellyschen.

[2]) Die Striche über den Buchstaben werden im folgenden fortgelassen.

[3]) Meißner, Das Elastizitätsproblem dünner Schalen usw., Phys. Ztschr. (14) 1913, S. 343 ff.

Setzt man hierin:

$$\frac{E\delta a}{\lambda^2}\varkappa_2 \operatorname{tg}\vartheta = K \qquad \lambda^4 = -\frac{12a^2}{\delta^2}(1-\sigma^2) \qquad N_1 = N$$

und beachtet, daß nach (3):

$$\varkappa_1 = (\varkappa_2 \operatorname{tg}\vartheta)' = \frac{\lambda^2}{E\delta a}K' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

so folgt schließlich als erste Hauptgleichung des Problems:

$$L(N) + N\sigma + a[Z' + X(1+\sigma)] = \lambda^2 K + \frac{\lambda^2 p a}{E\delta}[L(K) - K(2+\sigma)] \quad . \quad . \quad (10).$$

Andererseits lassen sich $G_1 G_2$ bei Beachtung von (9) allein durch $\varkappa_2$ bezw. K ausdrücken. Setzt man diese für $G_1 G_2$ erhaltenen Werte in die linke Seite der dritten Gl. (8) ein, so erhält man als zweite Hauptgleichung:

$$\lambda^2 N = K'' + K' \operatorname{ctg}\vartheta - K(\sigma + \operatorname{ctg}^2\vartheta) = L(K) - K\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Wird noch:

$$\frac{pa}{2\delta} = P$$

gesetzt, so lassen sich durch Elimination von N die beiden Hauptgleichungen (10) und (11) zu einer einzigen Gleichung für K zusammenziehen, die bei Vernachlässigung unwesentlicher Glieder folgendermaßen lautet:

$$L(L(K)) - \lambda^4 P L(K) - K\lambda^4 + F\lambda^2 = 0,$$

worin

$$F = a[Z' + X(1+\sigma)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Diese Gleichung zerfällt in die beiden Gleichungen II. Ordnung:

$$L(K) = c_1 K, \qquad L(K) = c_2 K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12a),$$

wo c_1, c_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$c^2 - \lambda^4 P c - \lambda^4 = 0,$$

also

$$c_{1,2} = \frac{\lambda^4 P}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda^4 P}{2}\right)^2 + \lambda^4}$$

bezeichnen.

Setzt man nun zunächst voraus, daß

$$c_1 \leqq c_2,$$

so lautet nach **Meißner**[1]) das vollständige Integral der Gl. (12a), wenn:

$$W_{1\,2} = \sqrt{5 - 4c_{1,2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

und $x = \sin^2\vartheta$ gesetzt wird:

$$K = C_1 J_1 + C_2 J_2 + C_3 J_3 + C_4 J_4 + (K) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

wo

$$J_1 = \sin\vartheta\, F\left(\frac{3+W_1}{4}, \frac{3-W_1}{4}, 2, x\right), \qquad J_2 = J_1 \ln x + \frac{1}{\sin\vartheta}\mathfrak{P}_1(x)$$

$$J_3 = \sin\vartheta\, F\left(\frac{3+W_2}{4}, \frac{3-W_2}{4}, 2, x\right), \qquad J_4 = J_3 \ln x + \frac{1}{\sin\vartheta}\mathfrak{P}_2(x)$$

und (K) eine Partikulärlösung bedeutet.

Das Integral (15) vereinfacht sich beträchtlich, wenn es sich, wie in der vorliegenden Untersuchung, um im Scheitel geschlossene Schalen handelt. Für diese müssen nämlich in den Polen $\vartheta = 0$ bezw. π die Endlichkeitsbedingungen erfüllt sein; es fallen daher dann die für $\vartheta = 0$ bezw. π unendlich werdenden Integrale J_2 und J_4 fort, so daß in diesem Falle die allgemeine Lösung lautet:

$$K = C_1 J_1 + C_3 J_3 + (K) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15a).$$

Ist hingegen

$$c_1 = c_2 = \frac{\lambda^4 P}{2} = c = -\sqrt{-\lambda^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16),$$

so nimmt Gl. (12) die Form an:

$$L(L(K)) - 2c\,L(K) + c^2 K = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17),$$

---

[1]) Siehe Fußn. 1, S. 83.

so entspringen nur zwei Integrale $J_1 J_2$ der Gleichung:

$$L(J_{1,2}) = c J_{1,2}, \text{ wo } c = \frac{\lambda^4 P}{2},$$

während die beiden anderen sich nach Zoelly aus der Gleichung ableiten:

$$L(J_{3,4}) = c J_{3,4} + C' J_1 + C'' J_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17b).$$

Im Falle $c_1 = c_2 = c$ zerfällt also Gl. (17) in die beiden Gl. (17a) und (17b), so daß — wiederum für die im Scheitel geschlossene Schale — in diesem Falle die vollständige Lösung lautet:

$$K = C_1 J_1 + C_3 J_3,$$

wo

$$J_1 = \sin\vartheta\, F\left(\frac{3+W}{4}, \frac{3-W}{4}, 2, \sin^2\vartheta\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

und J_3 eine Partikulärlösung der Gleichung bezeichnet:

$$L J_3 = c J_3 + J_1.$$

Dieses Partikulärintegral ließe sich am einfachsten nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten bestimmen Setzt man nämlich für J_3 eine ganz analoge Reihe wie für J_1 an, nämlich:

$$J_3 = \sin\vartheta\,(a_0 + a_2 \sin^2\vartheta + a_4 \sin^4\vartheta + \ldots), \qquad J_1 = \sin\vartheta\,(b_0 + b_2 \sin^2\vartheta + b_4 \sin^4\vartheta + \ldots) \quad (19),$$

wo die Koeffizienten der hypergeometrischen Funktion $b_0 = 1$, $b_2 = \frac{3^2 - W^2}{16 \cdot 1 \cdot 2}$ usw.

$$b_{2n} = \frac{(3^2 - W^2)(7^2 - W^2) \ldots [(4n-1)^2 - W^2]}{16^n n!\,(n+1)!} \quad \ldots\ldots \quad (19a)$$

und führt man diesen Ansatz in (18a) ein, so folgt unter Beachtung von:

$$L(\sin^n\vartheta) = (n^2 - 1)\sin^{n-2}\vartheta - (n^2 + n - 1)\sin^n\vartheta$$

aus der Vergleichung gleicher Potenzen von $X = \sin^2\vartheta$ die Rekursionsformel:

$$a_{2n} = a_{2(n-1)} \frac{2n(2n-1) - 1 + c}{4n(n+1)} + \frac{b_{2(n-1)}}{4n(n+1)} \quad \ldots\ldots \quad (20).$$

Die Konvergenz der hierdurch bestimmten Reihe für J_3 läßt sich folgendermaßen nachweisen.

Setzt man:

$$a_{2n} \sin^{2n}\vartheta = u_{2n}, \qquad b_{2n} \sin^{2n}\vartheta = v_{2n},$$

so läßt sich (20) in der Form schreiben:

$$u_{2n} = u_{2(n-1)} \sin^2\vartheta \frac{1 - \frac{1}{2n} - \frac{1-c}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} + b_{2(n-1)} \frac{\sin^{2n}\vartheta}{4n(n+1)}$$

oder, da nach (19a):

$$b_{2(n-1)} = b_{2n} \frac{16n(n+1)[(4n-5)^2 - W^2]}{(4n-1)^2 - W^2}$$

auch:

$$u_{2n} = u_{2(n-1)} \sin^2\vartheta \frac{1 - \frac{1}{2n} - \frac{1-c}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} + 4 v_{2n} \frac{\left(1 - \frac{5}{4n}\right)^2 - \frac{W^2}{16n^2}}{\left(1 - \frac{1}{4n}\right)^2 - \frac{W^2}{16n^2}}.$$

Für sehr große Werte von n geht dies über in:

$$u_{2n} = u_{2(n-1)} \sin^2\vartheta + 4 v_{2n}.$$

Da nun infolge der Konvergenz der hypergeometrischen Reihe J_1 für $\sin\vartheta \leqq 1$:

$$\lim_{n \to \infty} v_{2n} = 0$$

erhält man beim Grenzübergang $n \to \infty$:

$$u_{2n} = u_{2(n-1)} \sin^2\vartheta,$$

d. h. bei über jede Grenze wachsender Gliederzahl konvergiert die Reihe J_3 schließlich wie eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $\sin^2\vartheta$.

Nachdem so die vollständige Lösung für K gewonnen ist, lassen sich auch ohne weiteres die Werte der übrigen Spannungen und Formänderungen angeben. Man findet, wenn $c_1 \leqq c_2$:

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{1}{\lambda^2}[L(K)-K\sigma] = \frac{1}{\lambda^2}[(c_1-\sigma)C_1J_1+(c_2-\sigma)C_2J_2]+(N) \\ T_1 &= (N-K\lambda^2P)\cot\vartheta+(T_1) \qquad G_1 = \frac{a}{2\lambda^2}(K'+\sigma K\cot\vartheta) \\ T_2 &= N'-K'\lambda^2P \qquad +(T_2) \qquad G_2 = \frac{a}{2\lambda^2}(K\cot\vartheta+\sigma K') \\ u &= \frac{a}{E\delta}(1+\sigma)(\lambda^2PK-N)+(u) \qquad w = \frac{a}{E\delta}(T_2-T_1\sigma)-u\cot\vartheta \end{aligned}\right\} \quad (21a)$$

Im Falle $c_1 = c_2 = c$ würde in (21a) nur:

$$K = (K)+C_1J_1+C_3J_3$$

$$N = (N)+\frac{1}{\lambda^2}[L(K)-K\sigma] = (N)+\frac{1}{\lambda^2}[C_1(c-\sigma)J_1+C_3\{(c-\sigma)J_3+J_1\}]$$

zu setzen sein, wo J_3 durch (18a) definiert wäre.

Wird z. B. in der in Gl. (12) auftretenden Störungsfunktion F für die im Moment des Ausknickens eintretende zusätzliche Oberflächenbelastung:

$$Z = \mu\cos\vartheta \qquad X = \frac{\mu}{2}\sin\vartheta \qquad (\mu = \text{konst.})$$

eingeführt, so erhält man für die oben durch () gekennzeichneten Partikulärlösungen die Werte:

$$(x) = c'\sin\vartheta, \qquad (N) = -\frac{c'}{\lambda^2}\sin\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21b),$$

wo $c' = \dfrac{a\frac{\mu}{2}(1-\sigma)\lambda^2}{1-\lambda^4(1-P)}$

$$(T_1) = (T_2) = a\frac{\mu}{2}\frac{\sigma(1+\lambda^4P)-\lambda^4}{1-\lambda^4(1-P)}\cos\vartheta, \qquad (G_1) = (G_2) = \frac{a}{2\lambda^2}c'(1+\sigma)\cos\vartheta$$

$$(u) = ac\sin\vartheta+\frac{a}{E\delta}(1+\sigma)c'\left(\lambda^2P-\frac{1}{\lambda^2}\right)\sin\vartheta, \qquad (w) = -(u)\cot\vartheta+\frac{a}{E\delta}[(T_2)-(T_1)\sigma]$$

3. Aufstellung der Stabilitätsbedingung. Es entsteht nun die Frage, aus welchen Bedingungen die in den obigen Lösungen auftretenden Konstanten C_1C_2 zu bestimmen sind. Die nächstliegende Annahme wäre die, daß für die geschlossene Schale die Randbedingungen der unten offenen Schale in die Endlichkeitsbedingungen in den Polen $\vartheta = 0$ bezw. $= \pi$ übergehen. Es zeigt sich jedoch, daß die obigen Lösungen diese Bedingungen für jeden endlichen Wert von C_1 und C_2 von selbst erfüllen.

Man erkennt nämlich aus (15) und dem darin auftretenden Wert der hypergeometrischen Funktion F, daß in den Polen:

$$N_1 = 0 \qquad K = 0,$$

ferner

$$N' = N_1\cot\vartheta \qquad K' = K\cot\vartheta,$$

so daß nach (21a) und (21b) die Scheitelbedingung:

$$T_{1(\vartheta=0)} = T_{2(\vartheta=0)}; \qquad T_{1(\vartheta=\pi)} = T_{2(\vartheta=\pi)}$$

erfüllt ist, sowie $N_1 = 0$ gleich der für rotationssymmetrische Belastung verschwindenden Breiten-Querkraft N_2 ist. Die endlichen Grenzwerte, denen sich $T_1 = T_2$ und $G_1 = G_2$ in den Polen nähern, werden nach (21a) und (21b) im Falle $c_1 \leqq c_2$:

$$\text{für } \vartheta = 0: \quad T_1 = T_2 = +av-c'(1+\sigma)+\frac{c_1-\sigma}{\lambda^2}C_1+\frac{c_2-\sigma}{\lambda^2}C_2-\lambda^2P(c'+C_1+C_2)$$

$$= \pi: \qquad = -av+c'(1+\sigma)-\frac{c_1-\sigma}{\lambda^2}C_1-\frac{c_2-\sigma}{\lambda^2}C_2+\lambda^2P(c'+C_1+C_2)$$

$$\text{für } \vartheta = 0: \quad G_1 = G_2 = +\frac{a}{\lambda^2}(1+\sigma)(c'+C_1+C_2)$$

$$= \pi: \qquad = -\frac{a}{\lambda^2}(1+\sigma)(c'+C_1+C_2).$$

Im Falle $c_1 = c_2 = c$ nähert sich $N_1\cot\vartheta$ und N_1' in den Polen den Werten:

$$\text{für } \vartheta = 0: \quad N_1\cot\vartheta = N_1' = -c'(1+\sigma)+\frac{c-\sigma}{\lambda^2}C_1+\frac{C_3}{\lambda^2}$$

$$= \pi: \qquad = +c'(1+\sigma)-\frac{c-\sigma}{\lambda^2}C_1-\frac{C_3}{\lambda^2},$$

während

$$\text{für } \vartheta = 0\text{:}\quad K\cot\vartheta = K' = c' + C_1$$
$$= \pi\text{:}\qquad\qquad = -c' - C_1$$

wird.

Es sind also auch in diesem Falle die Endlichkeitsbedingungen für alle endlichen Werte von $C_1 C_2$ erfüllt, und es könnte hiernach scheinen, als ob den aus $K = c' \sin\vartheta$ entspringenden Partikulärlösungen ein zu

$$K = C_1 J_1 + C_3 J_3$$

gehörender Spannungszustand mit völlig willkürlichen Werten von C_1, C_2 überlagert werden könnte.

Diese scheinbare Unbestimmtheit umgeht Zoelly[1]) in der Weise, daß er nur solche Ausknickungsformen des Meridians betrachtet, die ober- und unterhalb des Aequators symmetrisch in bezug auf diesen verlaufen und demgemäß das Knickkriterium aus der Forderung ableitet, daß für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ die Meridiantangente auch nach der Deformation vertikal stehen sowie keine horizontale Querkraft an dieser Stelle auftreten soll, also für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$:

$$K = 0 \qquad \text{und} \qquad N = 0$$

sein soll.

Im folgenden wird nun gezeigt werden, wie ohne diese die unsymmetrischen Ausknickungsformen von vornherein ausschließende, willkürliche Voraussetzung das allgemeine Knickkriterium gewonnen werden kann, und zwar auf Grund folgender Erwägungen:

Aus der Form der Integrale J_1 und J_3 geht hervor, daß dieselben in bezug auf $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ symmetrische Funktionen darstellen, d. h. daß die Funktionswerte derselben für einen spitzen Winkel $\vartheta = \vartheta_1$ und sein Supplement $\vartheta = \pi - \vartheta_1$ absolut und dem Vorzeichen nach gleich, die Ableitungen J_1' und J_3' hingegen zwar absolut gleich sind, jedoch verschiedenes Vorzeichen besitzen.

Untersucht man nun den Grenzwert, den J_1' für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ annimmt, so erhält man zunächst für jeden Wert von ϑ:

$$J_1 = \sin\vartheta\, F\left(\frac{3+W_1}{4},\ \frac{3-W_1}{4},\ 2,\ \sin^2\vartheta\right)$$

$$J_1' = \cos\vartheta\, F\left(\frac{3+W_1}{4},\ \frac{3-W_1}{4},\ 2,\ \sin^2\vartheta\right) + \sin\vartheta\ \frac{dF\left(\frac{3+W_1}{4},\ \frac{3-W_1}{4},\ 2,\ \sin^2\vartheta\right)}{d\vartheta}.$$

Da:

$$\frac{dF(a,b,c,x)}{dx} = \frac{ab}{c} F(a+1,\ b+1,\ c+1,\ x),$$

wird:

$$\frac{dF\left(\frac{3+W_1}{4},\ \frac{3-W_1}{4},\ 2,\ \sin^2\vartheta\right)}{d\vartheta} = \frac{dF\left(\frac{3+W_1}{4},\ \frac{3-W_1}{4},\ 2,\ \sin^2\vartheta\right)}{d(\sin^2\vartheta)}\ \frac{d(\sin^2\vartheta)}{d\vartheta}$$
$$= \frac{3^2 - W_1^2}{32} F\left(\frac{7+W_1}{4},\ \frac{7-W_1}{4},\ 3,\ \sin^2\vartheta\right) 2\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

was vermöge der Identität:

$$F(a,b,c,x) = (1-x)^{c-a-b}\ F(c-a,\ c-b,\ c,\ x)$$

übergeht in:

$$\frac{dF\left(\frac{3+W_1}{4},\ \frac{3-W_1}{4},\ 2,\ \sin^2\vartheta\right)}{d\vartheta} = \frac{3^2 - W_1^2}{16}\sin\vartheta\cos\vartheta \pm \cos^{-1}\vartheta\left(\frac{5+W_1}{4},\ \frac{5-W_1}{4},\ 3,\ \sin^2\vartheta\right)$$
$$= \pm\frac{3^2 - W_1^2}{16}\sin\vartheta\, F\left(\frac{5+W_1}{4},\ \frac{5-W_1}{4},\ 3,\ \sin^2\vartheta\right).$$

---

[1]) Siehe Fußn. 1, S. 81.

Nun nimmt in den obigen hypergeometrischen Funktionen für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ das vierte Element $x = \sin^2\vartheta$ den Wert 1 an, so daß nach Weierstraß[1]) dieselben nur dann für diesen Wert konvergieren, wenn die Bedingung:

$$R(c-a-b) > 0 \qquad (R = \text{reeller Teil von } c-a-b)$$

erfüllt ist.

Da hier in der Tat

$$2 - \frac{3+W_1}{4} - \frac{3-W_1}{4} = 3 - \frac{5+W_1}{4} - \frac{5-W_1}{4} = +0{,}5,$$

so verschwindet in dem obigen Ausdruck für J_1' an der Stelle $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ das erste Glied und es wird dieser Grenzwert:

$$J_1'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \pm\frac{3^2 - W_1^2}{16} F\left(\frac{5+W_1}{4}, \frac{5-W_1}{4}, 3, 1\right),$$

was sich auch bei Benutzung der Gamma-Funktionen in der Form schreiben läßt:

$$J_1'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \pm\frac{3^2 - W_1^2}{16} \frac{\Gamma(3)\,\Gamma(0{,}5)}{\Gamma\left(\frac{7+W_1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{7-W_1}{4}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22),$$

worin

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\; n^x}{x(x+1)\ldots\ldots(x+n-1)}$$

die Gamma-Funktion.

Es nähert sich also J_1' für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ einem bestimmten endlichen Grenzwert, der beiderseits von $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ zwar dem absoluten Betrage nach gleich, dem Vorzeichen nach jedoch verschieden ist, und daher beim Uebergang von spitzen zu stumpfen Winkeln ϑ sich sprungweise ändert. Es würde daher bei beliebigen Werten von C_1 und C_2 die Funktion K in $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ eine Unstetigkeitsstelle aufweisen und es würde somit nach (21a) und (21b) auch T_2, G_1, G_2, w unstetig werden Dies würde jedoch gegen die mechanische Forderung verstoßen, daß infolge des stetigen Verlaufes der äußeren Belastung auch sämtliche Spannungen und Formänderungen stetige Funktionen des Argumentes ϑ sein müssen.

Es sind also demnach die Randbedingungen der offenen Schale bei der allseitig geschlossenen Hohlkugel durch die Stetigkeitsbedingungen an der Stelle $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ zu ersetzen, und man erkennt aus vorstehendem, daß denselben nur dann Genüge geleistet wird, wenn für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ sowohl K wie seine sämtlichen Ableitungen nach ϑ stetig verlaufen.

Um diese Forderung zu formulieren, ist zunächst zu beachten, daß der Konvergenzbereich der um die Pole $\vartheta = 0$ bezw. $= \pi$ herum entwickelten hypergeometrischen Funktionen sich von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ einerseits, von $\vartheta = \pi$ bis $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ andererseits erstreckt und daß daher auch die in dem oberen Zweig $\left(\vartheta = 0 \text{ bis } \frac{\pi}{2}\right)$ der allgemeinen Lösung auftretenden Konstanten C, C_3 im allgemeinen von denen des unteren Zweiges $\left(\vartheta = \pi \text{ bis } \vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$ verschieden sein werden, das allgemeine Integral also die Form besitzt:

$$\text{von } \vartheta = 0 \text{ bis } \vartheta = \frac{\pi}{2}: \; K = C_1 J_1 + C_3 J_3 + (K)$$

$$\text{» } \vartheta = \pi \text{ » } \vartheta = \frac{\pi}{2}: \; = C_1' J_1 + C_3' J_3 + (K)$$

---

[1]) Weierstraß, Ueber die Theorie der analytischen Fakultäten, Journal f. d. r. u. a. Math. 51, 1 bis 60 (1856).

Ferner erkennt man bei mehrmaliger Differentiation der mit $\sin\vartheta$ multiplizierten hypergeometrischen Funktionen (des Integrals J_1), daß J_1'' sich wie J_1, dagegen J_1''' wie J_1' verhält, d. h. daß also der Grenzwert von J_1'' wie von J_1 unmittelbar ober- und unterhalb des Aequators nicht nur absolut, sondern auch dem Vorzeichen nach, der von J_1''' und J_1' hingegen nur seinem absoluten Werte, dem Vorzeichen nach jedoch entgegengesetzt ist. Ebenso verhalten sich die im Falle $c_1 = c_2 = c$ erhaltenen Lösungen J_3 und J_3'' einerseits, J_3' und J_3''' andererseits, da sie nach (19) ganz dieselbe Form wie J_1 besitzen.

Schließlich ergibt sich aus dem Umstande, daß K sich aus der Differentialgleichung IV. Ordnung (12) bestimmt, daß es nur nötig ist, zu fordern, daß K sowie $K'\,K''\,K'''$ stetig für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ineinander übergehen, da dann auch $K^{(IV)}$ sowie — wie man bei Differentiation von (12) erkennt — sowie alle höheren Differentialquotienten stetig verlaufen müssen.

Aus vorstehendem ergibt sich, daß die allgemeinen Stetigkeitsbedingungen an der Stelle $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ erfordern, daß:

$$\left.\begin{aligned}
C_1 J_1\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + C_3 J_3\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= C_1' J_1\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + C_3' J_3\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\\
C_1 J_1'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + C_3 J_3'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= -\,C_1' J_1'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - C_3' J_3'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\\
C_1 J_1''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + C_3 J_3''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= C_1' J_1''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + C_3' J_3''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\\
C_1 J_1'''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + C_3 J_3'''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= -\,C_1' J_1'''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - C_3' J_3'''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (23),$$

so daß die bei Bestimmung von $C_1\,C_3\,C_1'\,C_3'$ auftretende Nennerdeterminante lautet:

$$\Delta = \begin{vmatrix}
J_1\left(\tfrac{\pi}{2}\right) & J_3\left(\tfrac{\pi}{2}\right) & -J_1\left(\tfrac{\pi}{2}\right) & -J_3\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\\
J_1'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) & J_3'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) & +J_1'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) & +J_3'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\\
J_1''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) & J_3''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) & -J_1''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) & -J_3''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\\
J_1'''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) & J_3'''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) & +J_1'''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) & +J_3'''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)
\end{vmatrix} \quad \ldots \quad (23\,a).$$

Die Auflösung ergibt für diese den Wert:

$$\Delta = 4\left(J_1\left(\tfrac{\pi}{2}\right) J_3''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - J_1''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) J_3\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right)\left(J_3'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) J_1'''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - J_1'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) J_3'''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) \quad (24).$$

Sollen also die Gl. (23) für $C_1\,C_3\,C_1'\,C_3'$ eine von Null verschiedene Lösung liefern, der Meridian also eine andere als die ursprüngliche Kreisform annehmen, so muß diese Nennerdeterminante verschwinden, d. h. es muß sein

$$\Delta = 4\left(J_1\left(\tfrac{\pi}{2}\right) J_3''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - J_1''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) J_3\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right)\left(J_3'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) J_1'''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - J_1'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) J_3'''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = 0 \quad (25).$$

4. Diskussion der Stabilitätsbedingung. Betrachten wir nun zunächst den Fall, daß $c_1 \leqq c_2$, so ist für diesen nach (12a):

und somit:
$$L(J_1) = J_1'' + J_1'\cot\vartheta - J_1\cot^2\vartheta = c_1 J_1,$$
$$J_1''' + J_1'\cot\vartheta - J_1'\frac{1+\cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta} + 2J_1\frac{\cot\vartheta}{\sin^2\vartheta} = c_1 J_1',$$

so daß für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, da $J_1 J_1' J_1'' J_1'''$ endliche Grenzwerte in $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ besitzen:

$$\left.\begin{aligned}
J_1''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= c_1 J_1\left(\tfrac{\pi}{2}\right) & J_3''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= c_2 J_3\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\\
J_1'''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= (c_1+1) J_1'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) & J_3'''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= (c_2+1) J_3'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (26).$$

Wird dies in (25) eingeführt, so geht die Knickbedingung (25) in die folgende über:

$$\Delta = -4(c_1 - c_2)^2 J_1 J_3 J_1' J_3' = 0 \quad \ldots \quad (25\,a),$$

d. h. es muß, da: $c_1 \leqq c_2$ vorausgesetzt war, eine der Größen:

$$J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad J_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad J_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad J_3'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,. \quad (27\,\mathbf{a})$$

sein.

Im Falle: $c_1 = c_2 = c$ hingegen hat man wie oben:

$$J_1''\left(\frac{\pi}{2}\right) = c\,J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad J_1'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = J_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)(c+1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26\,\mathbf{b}),$$

dagegen folgt jetzt aus:

$$L(J_3) = c\,J_3 + J_1 \text{ (vergl. (17 b))}$$

$$J_3''\left(\frac{\pi}{2}\right) = c\,J_3\left(\frac{\pi}{2}\right) + J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad J_3'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = (c+1)\,J_3'\left(\frac{\pi}{2}\right) + J_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

und es geht hiermit (25) über in:

$$\Delta = -4\,J_1^{\,2}\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad J_1^{\,2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25\,\mathbf{b}),$$

d. h. es muß auch in diesem Falle ganz unabhängig von dem Wert der Lösung J_3 eine der beiden Größen:

$$J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad J_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27\,\mathbf{b})$$

sein.

Nun ist aber nach (22):

$$J_{1,3}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3^2 - W_{1,2}^{\,2}}{16}\,\frac{\Gamma(3)\,\Gamma(0{,}5)}{\Gamma\left(\frac{7+W_{1,2}}{4}\right)\,\Gamma\left(\frac{7-W_{1,2}}{4}\right)},$$

$$J_{1,3}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\Gamma(2)\,\Gamma(0{,}5)}{\Gamma\left(\frac{5+W_{1,2}}{4}\right)\,\Gamma\left(\frac{5-W_{1,2}}{4}\right)},$$

und dies kann nur verschwinden, wenn entweder:

$$W_{1,2} = \pm 3$$

oder:

$$1)\ \Gamma\left(\frac{7 \pm W_{1,2}}{4}\right) = \infty \qquad 2)\ \Gamma\left(\frac{5 \pm W_1}{4}\right) = \infty$$

wird.

Da nun aber die Gammafunktion nur für 0 und die negativen ganzen Zahlen Pole besitzt, muß entweder:

$$W_{1,2} = \pm 3 \text{ oder: } \frac{7 \pm W_{1,2}}{4} = 0,\ -1,\ -2, \text{ usw.}$$

$$\text{» : } \frac{5 \pm W_{1,2}}{4} = 0,\ -1,\ -2, \text{ »}$$

sein, d. h. es muß:

$$W_{1,2} = \pm (3 + 2n) \qquad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots \ldots \ldots \quad (29),$$

also: $W_{1,2} = \pm 3$ oder eine darüber liegende ganze, positive oder negative, ungerade Zahl sein.

Wir sehen also, daß nicht nur die ganzzahligen Wurzelwerte der Reihe:

$$5 + 4n \qquad n = 0,\ 1,\ 2 \ldots,$$

der Zoellyschen Untersuchung kritische Werte des Außendruckes liefern, sondern daß auch die zwischen denselben liegenden ganzzahligen Werte: $3 + 4n$, die den unsymmetrischen Meridianformen entsprechen, solche ergeben. Dadurch, daß die letzteren nicht von vornherein ausgeschlossen werden, wird also die Anzahl der die kritischen Drucke ergebenden Wurzelwerte verdoppelt und die letzteren treten den ersteren gewissermaßen als vollkommen gleichberechtigt an die Seite.

Nach vorstehendem hat man also, um den kritischen Druck einer allseitig geschlossenen dünnen Hohlkugel zu bestimmen, in folgender Weise vorzugehen.

Man berechne zunächst den Wert:

$$c_1 = c_2 = c = -\sqrt{-\lambda^4} = -\sqrt{\frac{12\,a^2}{\delta^2}(1-\sigma^2)} = -\frac{2a}{\delta}\sqrt{3(1-\sigma^2)}$$

und

$$W = \sqrt{5 - 4c} = \sqrt{5 + \frac{8a}{\delta}\sqrt{3\,(1-\sigma^2)}}.$$

Ist dann W zufällig eine ungerade, ganze, positive oder negative Zahl, gleich oder über 3, also:

$$W = \pm (3 + 2n) \qquad n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots\ldots,$$

so wird der kleinste kritische Druck:

$$p_{\min} = \frac{2E\delta}{a} P_{\min} = \frac{2E\delta}{a} \frac{2c}{\lambda^4} = \frac{4E\delta}{a\sqrt{-\lambda^4}} = \frac{E\delta^2}{a^2} \frac{2}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}} \quad \ldots \quad (30),$$

welcher Wert, wie Zoelly nachweist, in jedem Falle den überhaupt kleinstmöglichen Wert aller kritischen Drücke darstellt.

Ist hingegen W nicht eine der obigen Zahlen, so bestimme man die beiden, zu den benachbarten ganzen Zahlen: $W_1 = \pm (3 + 2n_1)$ bezw. $W_2 = \pm (3 + 2n_2)$ gehörigen Werte:

$$c_1 = \frac{5 - W_1^2}{4} = \frac{5 - (3 + 2n_1)^2}{4} \text{ bezw. } c_2 = \frac{5 - W_2^2}{4} = \frac{5 - (3 + 2n_2)^2}{4}$$

und vergleiche die beiden zugehörigen Drücke:

$$p_1 = \frac{2E\delta}{a} \frac{c_1^2 - \lambda^4}{\lambda^4 c_1} = \frac{2E\delta}{a} \left(\frac{c_1}{\lambda^4} - \frac{1}{c_1} \right)$$

bezw.

$$p_2 = \frac{2E\delta}{a} \left(\frac{c_2}{\lambda^4} - \frac{1}{c_2} \right).$$

Der kleinere von ihnen ist der gesuchte kritische Druck.

Man kann sich nun noch die Frage vorlegen, ob es Fälle gibt, in denen nicht die symmetrischen, sondern die unsymmetrischen Meridianformen den Kleinstwert des kritischen Druckes ergeben.

Daß dies in der Tat der Fall sein kann, erkennt man sofort, wenn man eine Hohlkugel betrachtet, deren $\frac{a}{\delta}$ und σ solche Werte besitzen, daß:

$$W = \pm \sqrt{5 + \frac{8a}{\delta} \sqrt{3(1-\sigma^2)}},$$

eine der Zahlenreihe

$$\pm (3 + 4n) \qquad n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots$$

angehörige ganze Zahl ist.

Der dann nach (30) zu bestimmende kleinste kritische Druck stellt den überhaupt kleinstmöglichen Wert desselben dar; jeder andere, also auch der aus der Forderung: $K_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0$, $N_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0$ hervorgehende Wert, kann daher in diesem Falle nur größer sein, wenn auch der Unterschied, da alle diese Werte in der Nähe des Minimums (30) liegen, nur gering sein wird.

Zusammenfassung. Die Grundgleichungen der dünnen, durch allseitigen radialen Außendruck belasteten Hohlkugel werden unter der Voraussetzung rotationssymmetrischen Ausknickens aufgestellt und in der von Zoelly angegebenen Weise integriert. Die den kritischen Druck ergebende Bedingung wird jedoch dann nicht wie in der Zoellyschen Arbeit auf Grund der Forderung abgeleitet, daß die Form des ausgeknickten Meridians in bezug auf den Aequator symmetrisch sei, sondern es wird gezeigt, daß die Randbedingungen der offenen Schale bei der allseitig geschlossenen Hohlkugel durch die Stetigkeitsbedingungen an der Stelle $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ zu ersetzen sind, und daß die Forderung, daß an dieser Stelle alle Spannungen und Formänderungen stetig verlaufen müssen, genügt, um ohne jede vorherige, willkürliche Annahme über die Form des ausgeknickten Meridians ein ganz allgemeines Knickkriterium abzuleiten.

Hierbei ergibt sich, daß die Anzahl der die kritischen Drucke ergebenden Wurzelwerte sich verdoppelt, und es wird der Nachweis erbracht, daß es sehr wohl Fälle gibt, in denen die auf diesem Wege hinzukommenden Wurzelwerte, wenn auch nur um ein weniges, doch immerhin kleinere Werte des kritischen Druckes liefern können, als diejenigen, die nach Zoelly in Betracht kommen würden.

Über eine Analogie zwischen rotierender Scheibe und belasteter Kreisplatte.

Von **L. FÖPPL** in Dresden.

In den folgenden Zeilen wird der Spannungs- und Formänderungszustand einer gleichmäßig rotierenden Scheibe (unter **1**) nach der üblichen Darstellung behandelt und im Anschluß daran (unter **2**) dasselbe für die symmetrisch belastete Kreisplatte ausgeführt, in beiden Fällen bei veränderlicher Dicke. Die vollkommene Analogie beider Aufgaben hinsichtlich der Spannung wie der Zerrung tritt dabei deutlich hervor, so daß Lösungen der einen unmittelbar auch Lösungen für die andere ergeben; hiervon wird an einem Beispiel Gebrauch gemacht, indem die bekannte Lösung für rotierende Scheiben mit veränderlicher Dicke auf die bisher unbekannte Lösung für symmetrisch belastete Kreisplatten von veränderlicher Stärke übertragen wird. Der Hauptvorteil dieser neuen Analogie dürfte neben der Oekonomie der Denkarbeit, die sie gestattet, in einer Oekonomie der Versuche zu erblicken sein, da sich auch die Versuchsergebnisse von dem einen auf den anderen Fall übertragen lassen. Als Grundannahmen für die Berechnung der Platte dienen die üblichen, gewöhnlich nach Kirchhoff bezeichneten, wonach nur die Biegung der Platte berücksichtigt wird.

1. Rotierende Scheibe mit veränderlicher Dicke. Wir denken uns eine kreissymmetrische Scheibe mit veränderlicher Dicke h, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Es bildet sich dabei ein achsensymmetrischer Spannungs- und Formänderungszustand aus. In erster Annäherung nimmt man gleichmäßige Verteilung der Spannungen über die Dicke der Platte an jeder Stelle an[1]), so daß

$$h\sigma_r = T_r \quad \text{und} \quad h\sigma_t = T_t$$

die Spannungsresultanten für radiale und tangentiale Schnitte senkrecht zur Mittelfläche, bezogen auf die Längeneinheit in der Mittelfläche, bedeuten. Die Gleichgewichtsbedingung für ein in dieser Weise aus der Platte ausgeschnittenes Element lautet dann bekanntlich:

$$\frac{dT_r}{dr} = \frac{T_t - T_r}{r} - \mu\omega^2 r h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Diese rein statische Bedingung liefert uns nur die eine Gleichung für die beiden Unbekannten T_r und T_t.

Um den Formänderungszustand zu beschreiben, bezeichnen wir mit ϱ den Zuwachs, den der Radius r der Scheibenmittelfläche infolge der Formänderung erfährt, so daß die auf die Längeneinheit bezogenen Dehnungen der Mittelfläche in Richtung des Radius und senkrecht dazu durch

$$\varepsilon_r = \frac{d\varrho}{dr}, \qquad \varepsilon_t = \frac{\varrho}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ausgedrückt werden. Nach dem Hookeschen Gesetz bestehen zwischen den Formänderungs- und Spannungsgrößen die Beziehungen:

$$\frac{d\varrho}{dr} = \frac{1}{Eh}\left(T_r - \frac{1}{m}T_t\right), \qquad \frac{\varrho}{r} = \frac{1}{Eh}\left(T_t - \frac{1}{m}T_r\right)$$

oder nach den Spannungsresultanten aufgelöst:

$$T_r = \frac{m^2}{m^2-1}Eh\left(\frac{d\varrho}{dr} + \frac{1}{m}\frac{\varrho}{r}\right), \qquad T_t = \frac{m^2}{m^2-1}Eh\left(\frac{\varrho}{r} + \frac{1}{m}\frac{d\varrho}{dr}\right) \quad . \quad . \quad (3).$$

Nach Einsetzen dieser Werte für T_r und T_t in die obige Gl. (1) erhält man unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit von h:

$$\frac{d^2\varrho}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varrho}{dr} - \frac{\varrho}{r^2} + \frac{1}{h}\frac{dh}{dr}\left(\frac{d\varrho}{dr} + \frac{1}{m}\frac{\varrho}{r}\right) = -\mu\omega^2\frac{m^2-1}{m^2E}r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Damit ist die Aufgabe auf diese Differentialgleichung für ϱ zurückgeführt, deren Lösung sich leicht angeben läßt, wenn h in seiner Abhängigkeit von r durch ein Potenzgesetz $h = cr^n$ gegeben ist.

---

[1]) Th. v. Kármán, Enzykl. d. math. Wissensch., Bd IV, Art. 27, S. 359

Häufig geht man auch so vor[1]), daß man aus den Gl. (3) ϱ eliminiert. Dann ergibt sich:

$$\frac{1}{h}\left(T_r-\frac{1}{m}T_t\right)=\frac{d}{dr}\left[\frac{r}{h}\left(T_t-\frac{1}{m}T_r\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Diese Gleichung bestimmt zusammen mit Gl. (1) T_r und T_t. Durch Einführung einer Art Spannungsfunktion F, die mit den Spannungsresultanten durch

$$T_r=\frac{F}{r}, \qquad T_t=\frac{dF}{dr}+\mu\omega^2 h r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

verbunden ist, wird Gl. (1) identisch befriedigt, während Gl. (5) als Bestimmungsgleichung für F übergeht in

$$r\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{dF}{dr}-\frac{F}{r}-\frac{1}{h}\frac{dh}{dr}\left(r\frac{dF}{dr}-\frac{1}{m}F\right)+\left(3+\frac{1}{m}\right)\mu\omega^2 h r^2=0 \quad . \quad . \quad (7).$$

Drückt man die Veränderlichkeit von h durch ein Potenzgesetz in r mit beliebig gegebenem Exponenten n aus:

$$h=cr^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

so wird aus Gl. (7)

$$r\frac{d^2F}{dr^2}+(1-n)\frac{dF}{dr}-\left(1-\frac{n}{m}\right)\frac{F}{r}+\left(3+\frac{1}{m}\right)\mu\omega^2 c r^{n+2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

mit der allgemeinen Lösung:

$$F=ar^{n+3}+Ar^{\alpha}+Br^{\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

wobei a sich bestimmt aus:

$$a=-\frac{\left(3+\frac{1}{m}\right)\mu\omega^2 c}{\frac{n}{m}+3n+8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

und α und β die Wurzeln der Gleichung

$$x^2-nx+\frac{n}{m}-1=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

sind, während A und B die beiden Integrationskonstanten bedeuten, die den jeweiligen Randbedingungen anzupassen sind.

Durch Aneinanderreihen von mehreren Aesten, von denen jeder gut durch einen Ansatz nach Art von Gl. (8) dargestellt wird, läßt sich jede vorgegebene Veränderlichkeit der Dicke mit hinreichender Genauigkeit wiedergeben.

Soweit ist die Theorie der rotierenden Scheiben mit veränderlicher Dicke bekannt und an zahlreichen Beispielen sind numerische Rechnungen durchgeführt worden. Wir werden nun zeigen, daß wir Schritt für Schritt die gleichen Ueberlegungen bei der Beanspruchung symmetrisch belasteter Kreisplatten anwenden können und auch zu denselben Lösungen geführt werden.

2. Symmetrisch belastete Kreisplatte mit veränderlicher Dicke. Wir denken uns die Platte mit veränderlicher Dicke ähnlich wie die Scheibe so ausgebildet, daß die Plattenmittelfläche vor der Formänderung eine Ebene ist und zwar eine Symmetrieebene für die Gestalt der Platte. Wie unter 1, wollen wir uns aus der Kreisplatte ein Element durch benachbarte Radial- und Kreisschnitte senkrecht zur Mittelfläche herausgeschnitten denken. Nach der Kirchhoffschen Plattentheorie sind die Spannungen in diesen Schnitten nach dem Geradliniengesetz verteilt. Wir sprechen hier gar nicht von den Spannungen, sondern gleich von den resultierenden Biegungsmomenten, bezogen auf die Längeneinheit in der Plattenmittelfläche. Die Biegungsmomente, zu denen die Spannungen in den Schnittflächen des Plattenelementes Veranlassung geben, nennen wir M_r bezw. M_t. Sie entsprechen den Spannungsresultanten T_r und T_t bei der Scheibe. Außer den Biegungsspannungen treten aber bei der Platte noch Schubspannungen auf. Aus Symmetriegründen sind in den Radialschnitten die Schubspannungen null; auch in den Tangentialschnitten verschwinden aus dem gleichen Grund die Schubspannungen parallel zur Mittelfläche; dagegen sind in diesen Schnitten die Schubspannungen in Richtung senkrecht zur Mittelfläche von null verschieden und geben Veranlassung zu einer resultierenden Scherkraft V, die wir uns auch wieder auf die Längeneinheit in der Platten-

[1]) A. und L. Föppl, Drang und Zwang, München 1920, Bd. I, § 54.

mittelfläche bezogen denken wollen. Das Gleichgewicht des Plattenelementes gegen Verdrehen um eine in Richtung der Tangente an den Kreisschnitt r verlaufende Gerade lautet dann:

$$\frac{dM_r}{dr} = \frac{M_t - M_r}{r} - V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1'),$$

eine Gleichung, die ähnlich gebaut ist wie Gl. (1). Die resultierende Scherkraft V folgt aus der Gleichgewichtsbedingung des Plattenelementes in vertikaler Richtung. Wird die Lastintensität mit p bezeichnet, so ergibt dies

$$\frac{d(Vr)}{dr} = pr.$$

Die Größe V läßt sich demnach aus der gegebenen Belastung p leicht berechnen, so daß wir sie als Bekannte in Gl. (1') ansehen wollen. Die rein statischen Bedingungen der Aufgabe sind damit erschöpft. Sie liefern eine Gleichung für die beiden Unbekannten M_r und M_t.

Um die Gestaltsänderung der Platte zu kennzeichnen, genügt es, die Krümmung der ursprünglich ebenen Plattenmittelfläche an jeder Stelle anzugeben. Da die Mittelfläche Achsensymmetrie besitzt, sind die Hauptkrümmungen an jeder Stelle durch die Krümmung $\varkappa_r$ des Meridianschnittes und die Krümmung $\varkappa_t$ senkrecht dazu bestimmt. Sie lassen sich beide mit Hilfe des Neigungswinkels φ, den die Tangente an die Meridiankurve der Mittelfläche mit der Horizontalen bildet, ausdrücken. Es ist nämlich

$$\varkappa_r = \frac{d\varphi}{dr}, \qquad \varkappa_t = \frac{\varphi}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2').$$

Die Formänderungsgrößen der Platte $\varkappa_r$, $\varkappa_t$ und φ einerseits und der Scheibe ε_r, ε_t und ϱ andererseits entsprechen sich gegenseitig.

Das Hookesche Gesetz lautet hier

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{EJ}\left(M_r - \frac{1}{m} M_t\right), \qquad \frac{\varphi}{r} = \frac{1}{EJ}\left(M_t - \frac{1}{m} M_r\right),$$

wobei das Trägheitsmoment J sich ebenso wie die Biegungsmomente auf die Längeneinheit in der Mittelfläche bezieht, so daß

$$J = \frac{H^3}{12}$$

ist, wenn die Plattendicke im Gegensatz zur Scheibendicke h mit H bezeichnet wird.

Die Hookeschen Gleichungen nach den Momenten aufgelöst lauten:

$$M_r = \frac{m^2}{m^2-1} EJ\left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{m}\frac{\varphi}{r}\right), \qquad M_t = \frac{m^2}{m^2-1} EJ\left(\frac{\varphi}{r} + \frac{1}{m}\frac{d\varphi}{dr}\right) \quad \ldots \quad (3').$$

Darin wird gewöhnlich

$$\frac{m^2}{m^2-1} EJ = N$$

die »Plattensteifigkeit« genannt, die hier mit J bezw. H von r abhängig ist. Das Trägheitsmoment J spielt hier dieselbe Rolle wie die Dicke h bei der Scheibe.

Wir können M_r und M_t nach den Gl. (3') in Gl. (1') einsetzen und erhalten eine Gleichung für φ, die natürlich dieselbe Form haben muß wie Gl. (4), wenn man die sich entsprechenden Größen einsetzt. Sie lautet:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} + \frac{1}{J}\frac{dJ}{dr}\left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{m}\frac{\varphi}{r}\right) = -\frac{V}{J}\frac{m^2-1}{m^2 E} \quad \ldots\ldots \quad (4').$$

Dabei ist zu beachten, daß die sich entsprechenden Größen ϱ und φ von verschiedener Dimension sind. Um auch darin Uebereinstimmung zu erzielen, multipliziere man etwa Gl. (4') mit dem Radius a der Platte bezw. Scheibe.

Machen wir von dem anderen Weg zur Lösung Gebrauch, den wir in **1** gezeigt haben, so ergibt die Elimination von φ aus den Gl. (3')

$$\frac{1}{J}\left(M_r - \frac{1}{m} M_t\right) = \frac{d}{dr}\left[\frac{r}{J}\left(M_t - \frac{1}{m} M_r\right)\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5').$$

Zusammen mit Gl. (1') bestimmt diese Gleichung die Momente M_r und M_t.

Wir führen wieder eine Art Spannungsfunktion F ein durch

$$M_r = \frac{aF}{r}, \qquad M_t = a\frac{dF}{dr} + Vr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6'),$$

wodurch Gl. (1′) identisch befriedigt wird und Gl. (5′) die folgende Bedingungsgleichung für F liefert:

$$r\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{dF}{dr}-\frac{F}{r}-\frac{1}{J}\frac{dJ}{dr}\left(r\frac{dF}{dr}-\frac{1}{m}F\right)+\frac{r^2}{a}\frac{dV}{dr}+\frac{r}{a}V\left(2+\frac{1}{m}-\frac{r}{J}\frac{dJ}{dr}\right)=0\,. \quad (7').$$

Wir müssen nun nochmals auf die schon oben abgeleitete Gleichung, aus der sich die Scherkraft V bestimmt, zurückgreifen:

$$\frac{d(Vr)}{dr}=pr.$$

Welche von den üblichen Belastungen p auch gegeben sein mag und wie sich auch dementsprechend aus der letzten Beziehung V berechnet, so läßt sich stets Gl. (7′) auf die gleiche Weise lösen, wie wir es unten für den besonderen Fall der strengen Analogie mit der rotierenden Scheibe angeben werden, so daß sich demnach der allgemeinste Fall einer symmetrisch belasteten Kreisplatte, die am Rand frei gelagert oder auch eingespannt ist, ohne Schwierigkeit erledigen läßt.

Um die vollkommene Analogie zwischen rotierender Scheibe und Kreisplatte zu Ende zu führen, sind noch die folgenden »Aehnlichkeitsbedingungen« zu erfüllen, wie ein Vergleich der Gl. (4) und (4′) zeigt:

$$J=a^2h\,, \qquad a\frac{V}{J}=\mu\omega^2r.$$

Der Faktor a^2 in der ersten Gleichung dient dazu, die Dimensionen auf beiden Seiten der Gleichung richtig zu stellen. Die zweite Aehnlichkeitsbedingung läßt sich durch Einführung der Belastung p auch folgendermaßen schreiben

$$p=\frac{\mu\omega^2}{ar}\frac{d(Jr^2)}{dr} \quad \text{oder} \quad p=\mu\omega^2\frac{a}{r}\frac{d(hr^2)}{dr}\,.$$

Damit geht Gl. (7′) über in

$$r\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{dF}{dr}-\frac{F}{r}-\frac{1}{J}\frac{dJ}{dr}\left(r\frac{dF}{dr}-\frac{1}{m}F\right)+\left(3+\frac{1}{m}\right)\mu\omega^2\frac{r^2}{a^2}J=0 \quad . \quad . \quad (7'').$$

Wegen $\frac{J}{a^2}=h$ ist diese Gleichung identisch mit Gl. (7). Wie im Anschluß an Gl. (7), läßt sich hier selbstverständlich ebenso die Lösung von Gl. (7″) ohne Schwierigkeit angeben.

Die Analogie zwischen rotierender Scheibe und belasteter Kreisplatte ist demnach in allen Einzelheiten durchführbar und eine Lösung der einen Aufgabe liefert unmittelbar auch eine Lösung der anderen. Die sich entsprechenden Größen seien hier nochmals zusammengestellt, wobei durch Multiplikation bezw. Division mit dem konstanten Radius a für Gleichheit der Dimensionen entsprechender Größen gesorgt ist.

Scheibe		Platte
Abmessungen	Radius a	Radius a
	h	$\frac{J}{a^2}$
Spannung . .	aT_r	M_r
	aT_t	M_t
Zerrung . . .	$\frac{\varrho}{a}$	φ
	ε_r	$a\varkappa_r$
	ε_t	$a\varkappa_t$
ferner: Zentrifugalkraft $\mu\omega^2hra$		Scherkraft V

Aus dem letzten Vergleichspunkt folgt die Bedingung für die Belastungsintensität p der Platte:

$$p=\mu\omega^2\frac{a}{r}\frac{d(hr^2)}{dr}\,.$$

Damit ist der Vergleich vollkommen durchgeführt.

Für konstante Dicke $h = \frac{J}{a^2} = \text{konst.}$ folgt für die Belastung:

$$p = 2\mu\omega^2 a h = \text{konst.}$$

3. Beispiel. Bei rotierenden Scheiben gleicher Festigkeit ($\sigma_r = \sigma_t = \sigma = \text{konst.}$) wird für die Dicke h folgende Abhängigkeit von r gefunden [1]):

$$h = h_0 e^{-\frac{\mu\omega^2}{2\sigma} r^2}.$$

Wenn sich diese Gestalt der Scheibe auch nicht genau nachahmen läßt, da erst für $r = \infty$ die Dicke zu null würde, so liefert sie doch einen brauchbaren Anhaltspunkt für die Abnahme der Dicke mit r, und in der Tat stimmt die Form der bei der Lavalturbine verwendeten Laufräder gut damit überein.

Wir wollen die Dicke der Kreisplatte und ihre Belastungsintensität p angeben, die der obigen Scheibe entspricht. Die Dicke H bestimmt sich aus

$$J = \frac{H^3}{12} = a^2 h = a^2 h_0 e^{-\frac{\mu\omega^2}{2\sigma} r^2}$$

oder, indem wir mit $H_0 = \sqrt[3]{12 a^2 h_0}$ die Dicke in der Mitte für $r = 0$ bezeichnen:

$$H = H_0 e^{-\frac{\mu\omega^2}{6\sigma} r^2}.$$

Die Belastung folgt aus

$$p = \mu\omega^2 \frac{a}{r} \frac{d(hr^2)}{dr} = \mu\omega^2 h a \left(2 + \frac{r}{h}\frac{dh}{dr}\right), \quad \text{zu} \quad p = 2\mu\omega^2 h a - \frac{\mu^2\omega^4}{\sigma} a r^2 h.$$

Die Belastungsintensität p hat demnach in der Mitte den Wert

$$p_0 = 2\mu\omega^2 h a.$$

Am Rand $r = a$ liegt die Platte frei auf, da hier $M_r = 0$ ist, entsprechend $\sigma_r = 0$ bei der Scheibe.

Im Anschluß an diese Aufgabe liegt es nahe, nach der Platte gleicher Festigkeit, etwa bei konstanter Belastung p, zu fragen. Diese Frage läßt sich nicht einfach beantworten, dagegen läßt sich die Bedingung

$$\frac{M_r}{J} = \frac{M_t}{J} = C = \text{konst.}$$

bei gleichmäßig verteilter Belastung einfach durchführen und liefert als Gesetz für die Abnahme der Dicke H der Platte: $C(H^3 - H_0^3) = 3pr^2$.

Die obige Bedingung bedeutet einen überall gleichmäßigen Anstieg der Spannungen von der Mittelfläche aus, so daß bei dem angegebenen Dickengesetz die Kantenspannungen an der Stelle der größten Dicke H_0 am größten ist. Durch einen noch etwas stärkeren Abfall der Dicke H mit wachsendem r kann man einer überall gleichen Kantenspannung nahe kommen. Auf weitere Einzelheiten in dieser Frage einzugehen läßt sich mit dem Zweck dieses Aufsatzes nicht vereinigen. 91

Die Entwicklung der laminaren Geschwindigkeitsverteilung und ihre Bedeutung für Zähigkeitsmessungen.[2])

(Mit einem Anhang über den Druckverlust turbulenter Strömung beim Eintritt in ein Rohr.)

Von **L. SCHILLER** in Leipzig.

Gelegentlich einer experimentellen Untersuchung über den kritischen Wert der Reynoldsschen Zahl (reduzierten Geschwindigkeit) [3]) wurde der Widerstand der Laminarströmung bei höheren Reynoldsschen Zahlen beträchtlich größer gefunden, als dem Poiseuilleschen Gesetze entspricht; die Differenz wuchs mit zunehmender Geschwindigkeit. Als Grund dieser Erscheinung ergab sich, daß innerhalb der Meßstrecke nicht durchwegs die von Poiseuille vorausgesetzte parabolische Geschwindigkeitsver-

[1]) Th. v. Kármán, Enzykl. d. math. Wissensch., Bd. IV, Art. 27, Nr. 11b, S. 361.

[2]) Aus der Leipziger Habilitationsschrift des Verfassers.

[3]) L. Schiller, Experimentelle Untersuchungen zum Turbulenzproblem. Diese Zeitschr. 1, S. 436, 1921. Hinweise auf diese Arbeit werden im folgenden durch Sch. angegeben.

teilung herrschte, sondern erst ein Uebergang von der gleichförmigen Verteilung im Einlaufquerschnitt stattfand. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie die Widerstandserhöhung mit der Beschleunigung der »Kernströmung« zusammenhängt, die von annähernd konstanter Geschwindigkeitsverteilung ($\bar{u}$) allmählich zu der parabolischen Geschwindigkeitsverteilung des Poiseuilleschen Gesetzes führt ($u_{max} = 2\bar{u}$). Eine Näherungstheorie liefert für drei Rohre verschiedener lichter Weite gute Uebereinstimmung zwischen gerechnetem und gemessenem Widerstand.

Die Erhöbung des Widerstandes gegenüber dem Poiseuilleschen Wert ergibt sich als eine Funktion der dimensionslosen Größe $\frac{x}{aR}$ (x = Rohrlänge, a = Halbmesser, R = Reynoldssche Zahl[1]) und stimmt für größere Werte von $\frac{x}{aR}$ annähernd mit der Hagenbachschen Korrektion des Poiseuilleschen Gesetzes überein. Bei kleineren Werten $\frac{x}{aR}$ weicht sie jedoch erheblich hiervon ab, was bei der Bestimmung »absoluter« Zähigkeiten mit technischen Apparaten kurzer Rohrlänge (Engler) von Bedeutung ist. Auf Grund der vorliegenden Theorie, die eine Korrektur des Poiseuilleschen Gesetzes für beliebige Rohrlängen liefert, ist die Möglichkeit vorhanden, auch mit kurzen Rohrlängen absolute Zähigkeitsmessungen auszuführen.

Messungen des Eintrittsverlustes bei turbulenter Strömung ergaben gute Uebereinstimmung mit einer von Prandtl aus einer Impulsbetrachtung abgeleiteten Gleichung.

I. Die Entwicklung der laminaren Geschwindigkeitsverteilung.

1. Messungen des Widerstandes laminarer Strömung bei hohen Reynoldsschen Zahlen. Die experimentelle Grundlage der vorliegenden Untersuchung bildeten Widerstandsmessungen von Wasserströmung in gezogenen Messingrohren von 2,399, 1,5924 und 0,7996 cm l. W. Betr. Meßmethode usw. sei auf die S. 96, Fußnote 3, zitierte Arbeit des Verfassers verwiesen. Die Länge der Meßstrecke betrug 92,62 cm, der Abstand der ersten Meßstelle vom Einlauf, die »Anauflänge«, 104,15 cm (vergl. Sch. Abb. 3). Zur Aufrechterhaltung des laminaren Strömungscharakters auch bei höheren Reynoldsschen Zahlen war neben genügender Ruhe des Wassers im Vorratstrog geeignete Abrundung der Einlauföffnung erforderlich (Sch. Abb. 2a, b, c). Das Ergebnis der Widerstandsmessungen zeigt Abb. 1 in den logarithmisch aufgetragenen dimensionslosen Koordinaten Widerstandskoeffizient λ und Reynoldssche Zahl R. Kurve III wurde erhalten für das weite, II für das mittlere und I für das enge Rohr[2]).

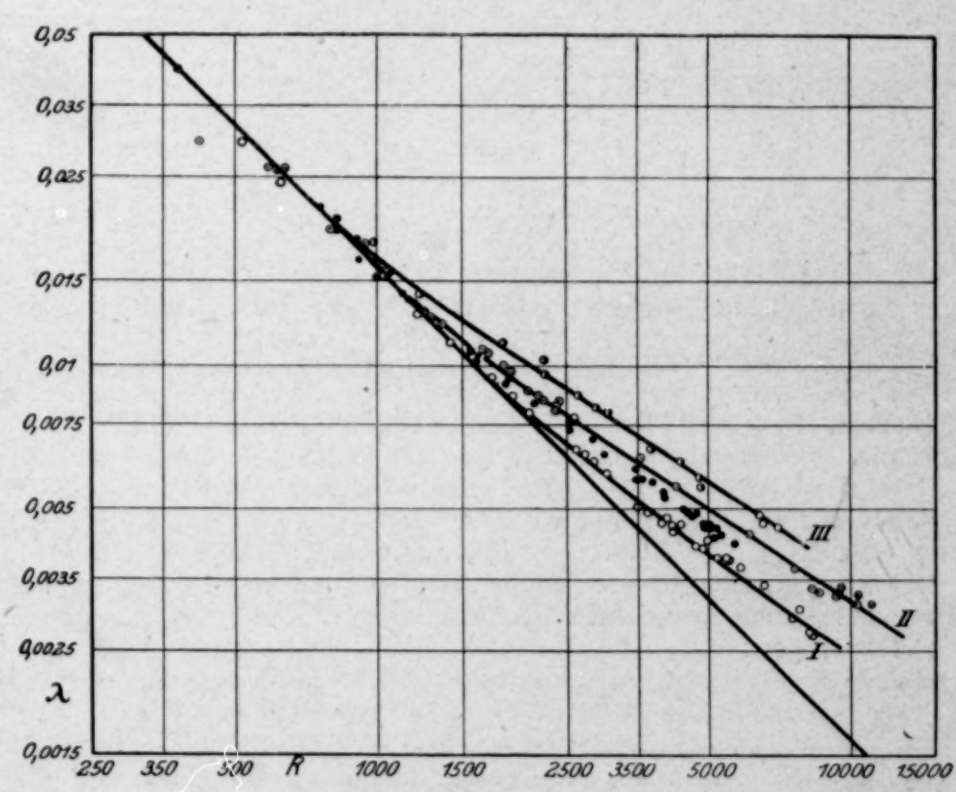


Abb. 1

[1]) $R = \frac{\bar{u}\,a\,\varrho}{\mu} = \frac{\bar{u}\,a}{\nu}$ ($\bar{u}$ = mittlere Geschwindigkeit, ϱ = Dichte, μ = Zähigkeit, $\nu = \frac{\mu}{\varrho}$ = kinematische Zähigkeit).

[2]) Die ausgefüllten Kreise zwischen Kurve II und I stellen Messungsergebnisse mit dem engen Rohr vor, die zunächst mit nicht genügend gerade gerichtetem Rohr erhalten wurden.

Die Bedeutung von λ ergibt sich aus dem in der Hydraulik gebräuchlichen Ansatz des Widerstandsgesetzes

$$\Delta p = \lambda \gamma \frac{l}{a} \frac{\bar{u}^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

wo Δp = Druckdifferenz, γ = spez. Gewicht, l = Länge der Meßstrecke, g = Schwerebeschleunigung.

Mit Einführung von λ nimmt das Poiseuillesche Gesetz die Form an:

$$\lambda_{\text{lam}} = \frac{16}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Es wird in Abb. 1 durch die unter 45° fallende Gerade dargestellt.

Während bei den niedrigen Werten der Reynoldsschen Zahl die gemessenen Widerstände dem Poiseuilleschen Gesetz innerhalb der Versuchsgenauigkeit gehorchen, entfernen sich die experimentellen Kurven mit wachsender Reynoldsscher Zahl mehr und mehr nach oben hin von der Poiseuilleschen Geraden. Diese Abweichung tritt bei um so kleineren Reynoldsschen Zahlen ein, je weiter das Rohr ist, und ist bei bestimmter Reynoldsscher Zahl stärker für die weiteren Rohre.

2. Deutung der beobachteten Widerstandserhöhung. Die Erklärung dieser Erscheinung liefert die auch hier wieder sich als sehr fruchtbar erweisende Prandtlsche Grenzschichtentheorie. Man kann in erster Annäherung annehmen, daß beim Eintritt in das Rohr — die Kontraktion ist durch die Abrundung weitgehend herabgesetzt — mit Ausnahme einer zunächst verschwindend geringen Schicht an der Wand gleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung über den ganzen Querschnitt herrscht. Unter dem Einfluß der Reibung wächst diese Schicht immer stärker an (Abb. 2a), andererseits tritt unter dem wirkenden Druck eine Beschleunigung ein. Das Resultat dieser wirkenden Kräfte ist unter stetigem Anwachsen der Grenzschicht die Entwicklung der Geschwindigkeitsverteilung in dem in Abb. 2a skizzierten Sinne, die schließlich asymptotisch zur parabolischen Poiseuilleschen Verteilung führt. Im Bilde der Prandtlschen Grenzschichtentheorie kann man sagen: die endgültige Geschwindigkeitsverteilung ist dann erreicht, wenn die Grenzschicht die Mitte des Rohres erreicht hat.

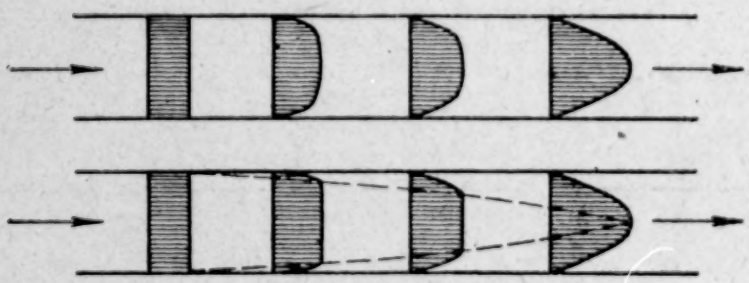


Abb. 2a und 2b

3. Näherungslösung des Problems. Um das Problem quantitativ zu behandeln, machen wir gemäß einem Vorschlag von Herrn Prof. Prandtl folgende Annahme über die Geschwindigkeitsverteilung in der Anlaufstrecke. An jeder Stelle enthalte die Fläche der Geschwindigkeiten in der Mitte ein ebenes kreisförmiges Stück konstanter Geschwindigkeit, von dessen Begrenzung der Abfall nach der Geschwindigkeit Null am Rande (haften!) nach einer Parabel erfolge, deren Scheitel auf dem Umfang des ebenen Stückes liegt. Die Entwicklung der Geschwindigkeitsverteilung in der Anlaufstrecke gestaltet sich dann so, wie in der Abb. 2b skizziert. Zu Beginn wird der ganze Querschnitt von dem ebenen Stück entsprechend der (mittleren) Geschwindigkeit $\bar{u}$ ausgefüllt. Unter gleichzeitigem Anwachsen der Paraboloidbegrenzung wird dieses ebene Stück immer kleiner und verschwindet schließlich mit der Vereinigung der Paraboloidstücke.

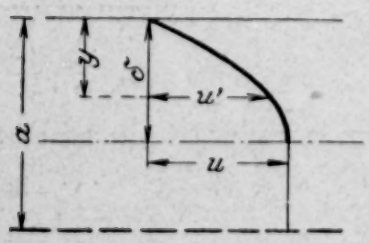


Abb. 3

Wir bezeichnen (Abb. 3) den Rohrhalbmesser mit a, die Dicke der Grenzschicht parabolischer Geschwindigkeitsverteilung mit δ, die Geschwindigkeiten in dem parabolischen Stück mit u', die mittlere Geschwindigkeit = Eintrittsgeschwindigkeit mit $\bar{u}$ und die Maximalgeschwindigkeit in jedem Querschnitt mit u. Wie bekannt, wächst diese schließlich bis $2\bar{u}$ in der Rohrmitte an. x sei der Abstand vom Einlauf, y senkrecht zur Rohrachse ($y = 0$ am Rande des Rohres). In den Variabeln u' und y lautet die Gleichung der Schnittparabel, für die zu setzen ist: bei $y = 0$

$$u' = 0,$$

$$(\delta - y)^2 = \frac{\delta^2}{u}(u - u') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

oder für die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht

$$u' = u\left(\frac{2y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Die Kontinuität erfordert den Ansatz, daß das Volumen des Zylinders, der die Geschwindigkeitsverteilung am Einlauf darstellt, gleich ist dem Volumen des beschriebenen jeweiligen Rotationskörpers:

$$a^2 \bar{u} = \frac{4}{3} a u \delta - \frac{5}{6} u \delta^2 + (a - \delta)^2 u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Dies liefert für die Dicke der Grenzschicht:

$$\delta = 2a - a\sqrt{6\left(\frac{\bar{u} - u}{u}\right) + 4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Schließlich gilt noch für die Druckkraft auf einen Zylinder, der durch zwei Ebenen senkrecht zur Achse aus der Röhre herausgeschnitten wird, wegen des nahezu reibungslosen Verhaltens der Kernströmung, die Bernoullische Gleichung:

$$P = a^2 \pi (p_0 - p) = a^2 \pi \varrho \left(\frac{u^2 - \bar{u}^2}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Nach bekannten Regeln ergibt sich die Aenderung des Impulses gegenüber dem Eintrittsquerschnitt zu:

$$J = \varrho \int_0^{\delta} u' (\bar{u} - u')(a - y)\, 2\pi\, dy + \varrho \int_{\delta}^{a} u (\bar{u} - u) 2\pi (a - y)\, dy \quad \ldots \quad (8)$$

oder mit Elimination von u' durch Gl. (4)

$$J = \pi \varrho u \bar{u} \left(a^2 - \frac{2}{3} a\delta + \frac{1}{6}\delta^2\right) - \pi \varrho u^2 \left(a^2 - \frac{14}{15} a\delta + \frac{4}{15}\delta^2\right) \quad \ldots \quad (9).$$

Durch Vereinigung von (7) und (9) erhalten wir:

$$J + P = \pi \varrho a^2 \left(u\bar{u} - \frac{u^2}{2} - \frac{\bar{u}^2}{2}\right) + \pi \varrho a \delta \left(\frac{14}{15} u^2 - \frac{2}{3} u\bar{u}\right) + \pi \varrho \delta^2 \left(\frac{1}{6} u\bar{u} - \frac{4}{15} u^2\right) \quad (10)$$

und unter Elimination von δ durch (6)

$$J + P = \pi \varrho a^2 \left(\frac{5}{6} u^2 + \frac{1}{2}\bar{u}^2 - \frac{8}{5} u\bar{u} + \frac{2}{15} u\sqrt{6u\bar{u} - 2u^2}\right) \quad \ldots \quad (11).$$

Das Gleichgewicht zwischen Impulsänderung, Druckabfall und Reibungskraft für die Begrenzung eines durch einen Schnitt senkrecht zur Achse gewonnenen Elementarzylinders liefert jetzt die Ausgangsgleichung für die Rechnung:

$$\frac{d}{dx}(J + P) = 2a\pi\mu \left(\frac{du'}{dy}\right)_{y=0} = 4a\pi\mu \frac{u}{\delta} = \frac{4\pi\mu u}{2 - \sqrt{6\frac{\bar{u}}{u} - 2}} \quad \ldots \quad (12)$$

oder mit Einsetzen von $J + P$ nach Gl. (11) und einfachen Umformungen

$$\frac{\varrho a^2}{4\mu}\left(\frac{58}{15} - \frac{22}{5}\frac{\bar{u}}{u} - \frac{7}{5}\sqrt{6\frac{\bar{u}}{u} - 2} + \frac{8}{5}\frac{\bar{u}}{u}\sqrt{6\frac{\bar{u}}{u} - 2} + \frac{4}{5}\frac{u}{\sqrt{6u\bar{u} - 2u^2}} - \frac{8}{15}\frac{u}{\sqrt{6u\bar{u} - 2u^2}}\right) du = dx \quad (13).$$

Dies vom Anfang der Röhre bis zu einer Stelle x (d. h. zwischen den Grenzen $\bar{u}$ und u) integriert gibt:

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{4}\frac{a}{\nu}\left[\frac{58}{15}(u - \bar{u}) - \frac{22}{5}\bar{u}\ln\frac{u}{\bar{u}} - \left(\frac{17}{15} + \frac{16}{5}\frac{\bar{u}}{u}\right)\sqrt{6u\bar{u} - 2u^2}\right.$$
$$\left. + \frac{26}{3}\bar{u} - \frac{21}{5}\bar{u}\sqrt{2}\left(\arcsin\sqrt{\frac{u}{6\bar{u}}} - \arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}\right) - \frac{16}{5}\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}\left(\arcsin\left(\frac{4u - 6\bar{u}}{6\bar{u}}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\right] \quad (14).$$

Setzen wir hierin die relative Geschwindigkeitszunahme (bezogen auf die Einlaufgeschwindigkeit)

$$\frac{u - \bar{u}}{\bar{u}} = \frac{u}{\bar{u}} - 1 = \eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15),$$

so erhalten wir

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{4}\frac{a\bar{u}}{\nu}\left[\frac{58}{15}\eta - \frac{66}{15}\ln(1+\eta) - \frac{17}{15}\sqrt{2}\,\sqrt{2+\eta-\eta^2}\right.$$
$$-\frac{48}{15}\sqrt{2}\,\sqrt{\frac{2-\eta}{1+\eta}} + \frac{130}{15} - \frac{63}{15}\sqrt{2}\,\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{\eta}{3}}$$
$$\left.+\frac{63}{15}\sqrt{2}\,\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{48}{15}\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{2}{3}\eta - \frac{1}{3}\right) - \frac{48}{15}\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{1}{3}\right] \quad . \quad (16).$$

Berücksichtigen wir, daß $\frac{a\bar{u}}{\nu}$ gleich der Reynoldsschen Zahl R ist und setzen die Klammer $= f(\eta)$, so haben wir in der Gleichung

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{4} R f(\eta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

eine übersichtliche Form der Beziehung zwischen den dimensionslosen Größen Reynoldssche Zahl, »relative Anlauflänge« (d. h. gemessen in Halbmessern) $\frac{x}{a}$ und »relative Geschwindigkeitsänderung gegenüber dem Einlauf« η, in der als einzige Unbekannte η steht.

4. Berechnung des Widerstandskoeffizienten λ. Um nun noch zu einer Beziehung für λ zu kommen, die uns einen Vergleich mit der Darstellung unserer Versuche ermöglicht, führen wir in die Bernoullische Gleichung (7) nach Gleichung (15) η ein und erhalten für die Druckdifferenz zwischen einer Stelle in der Anlaufstrecke und dem Einlauf:

$$p_0 - p = \frac{\varrho}{2}\bar{u}^2(2\eta+\eta^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Nehmen wir die Definitionsgleichung für λ (1):

$$\lambda = \frac{p_1 - p_2}{\frac{\varrho\bar{u}^2}{2}}\frac{a}{x_2 - x_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1\,a)$$

und bestimmen mit (18) die Druckdifferenz zwischen zwei beliebigen Stellen x_1 und x_2:

$$\frac{p_1 - p_2}{\frac{\varrho}{2}\bar{u}^2} = (2\eta+\eta^2)_{x_2} - (2\eta+\eta^2)_{x_1} = \Delta(2\eta+\eta^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19),$$

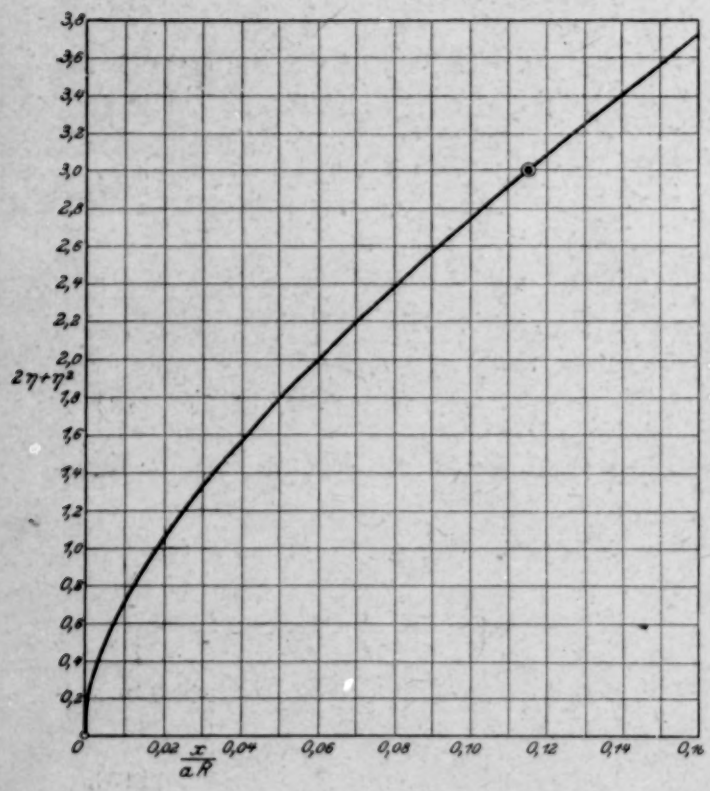


Abb. 4

so erhalten wir schließlich:

$$\lambda = \Delta(2\eta+\eta^2)\frac{a}{\Delta x} \quad . \quad . \quad (20),$$

worin Δx unsere Meßstrecke bedeutet.

Zur Berechnung von η bezw. $2\eta+\eta^2$ aus den Beobachtungsdaten $\frac{x}{a}$ und R nach Gleichung (17) wurde zunächst $\frac{x}{aR}$ nach Gleichung (16) für eine größere Zahl von η-Werten berechnet, tabuliert und in einer Kurve zur Darstellung gebracht, desgleichen wurde noch eine Kurve für $2\eta+\eta^2$ als Funktion von η gezeichnet. Durch Kombination dieser beiden Kurven wurde dann noch in Abb. (4) die Beziehung zwischen $2\eta+\eta^2$ und $\frac{x}{aR}$ zur Darstellung gebracht. Zur numerischen Berechnung von λ für gegebene Werte der Meßstellen, von Rohrhalbmesser und Reynoldsscher Zahl (Geschwindigkeit, Zähigkeit) sind jetzt nur die Werte $\frac{x_1}{aR}$ und $\frac{x_2}{aR}$ zu berechnen, aus Kurve Abb. 4 die zugehörigen Werte von $(2\eta+\eta^2)$ zu entnehmen, deren Differenz zu bestimmen und nach

Gleichung (20) mit $\frac{a}{\Delta x}$ zu multiplizieren. Für die Poiseuillesche Strömung des Kreisrohrs gilt bekanntlich $u_{max} = 2\,\bar{u}$. u_{max} ist aber in unserer Darstellung der Geschwindigkeitsbetrag für das mittlere Stück konstanter Geschwindigkeit $= u$. Für $u = 2\,\bar{u}$ ist aber $\eta = 1$ und $(2\eta + \eta^2) = 3$. Für diesen Wert von $(2\eta + \eta^2)$ ergibt sich $\frac{x}{aR} = 0{,}115$. In diesem Punkt (vergl. Abb. 4) müssen wir also den Beginn des Poiseuilleschen Gesetzes ansetzen. Schreiben wir dieses in der Form

$$\frac{\Delta p}{\frac{\varrho}{2}\bar{u}^2} = \frac{8\,\mu\,\bar{u}\,\Delta x}{a^2}\,\frac{2}{\varrho\,\bar{u}^2} = 16\,\frac{\Delta x}{aR} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

und berücksichtigen (19), so erhalten wir die Richtungsangabe für die Poiseuillesche Gerade, die man in Abb. 4 von dem markierten Punkt an eingetragen findet. Man sieht, daß die Gerade mit einem ganz leichten Knick an die Kurve ansetzt, eine natürliche Folge unserer Näherungstheorie. In Wirklichkeit wird der Uebergang asymptotisch sein.

In der angegebenen Weise wurde für jedes der drei Rohre λ für eine Anzahl von R-Werten berechnet.

In den Abb. 5 bis 7 sind die berechneten Punkte für die drei Rohre durch kleine Kreise kenntlich gemacht. Wie man sieht, schmiegen sie sich der durch die beobachteten Punkte gelegten Kurve in für eine Näherungstheorie befriedigender Weise an.

Durch Reihenentwicklung von $f(\eta)$ nach Potenzen von η (bis einschließlich quadratische Glieder) ergibt sich

$$f(\eta) = \frac{3}{10}\,\eta^2 \quad \ldots \quad (22)$$

und wegen (17) und (20) unter Vernachlässigung von η^2

$$\lambda = \frac{4}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}\,\sqrt{\frac{10}{3}\,\frac{a}{R}} \quad (23).$$

Die hiermit für das mittlere Rohr ermittelte Asymptote unserer λ-Kurve findet sich in Abb. 6 eingezeichnet.

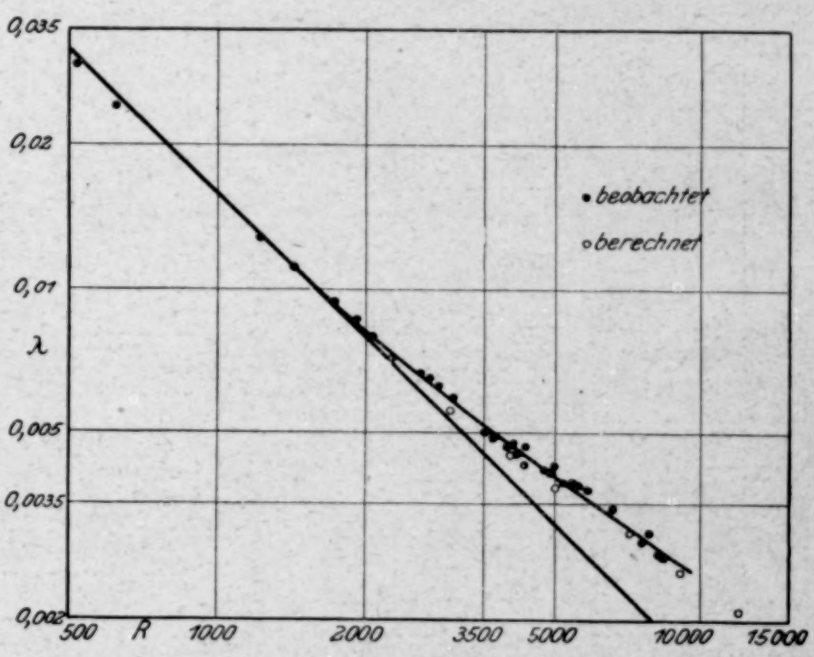


Abb. 5

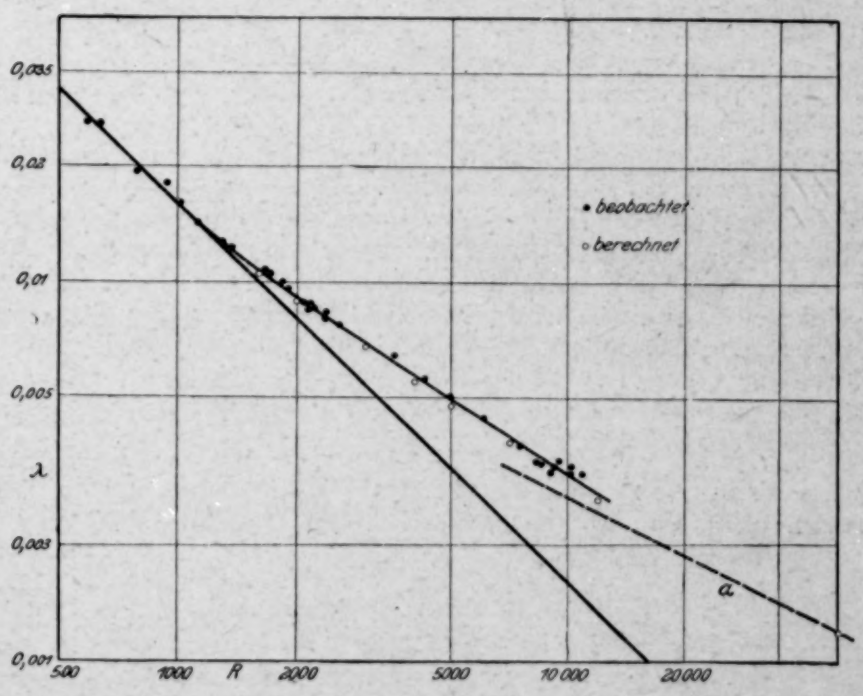


Abb. 6

II. Der Anlaufverlust der Poiseuilleschen Strömung.

1. Der Anlaufverlust nach der Theorie. Ein besonderer Fall der im vorhergehenden behandelten Aufgabe ist dann gegeben, wenn die eine Meßstelle mit der Eintrittsstelle der Strömung, dem Rohranfang, zu-

sammenfällt und die andere an einem Punkt liegt, wo bereits die parabolische Verteilung hergestellt ist. In diesem Fall fragen wir also z. B. nach dem gesamten Strömungswiderstand innerhalb eines Rohres, an dessen Ende parabolische Verteilung herrscht.

Nach unserer Theorie wird diese bei einem Werte von $\frac{x}{aR} = 0{,}115$ und $\frac{p_0 - p_1}{\varrho \frac{\bar{u}^2}{2}} = 3$ erreicht. Dementsprechend wurde die Kurve, Abb. 3, von hier ab als Gerade mit der Neigung 1 : 16 weitergeführt. Die Gleichung dieser Geraden lautet:

$$\frac{p_0 - p_1}{\varrho \frac{\bar{u}^2}{2}} = 3 + 16\left(\frac{x}{aR} - 0{,}115\right) = 16\,\frac{x}{aR} + 1{,}16 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

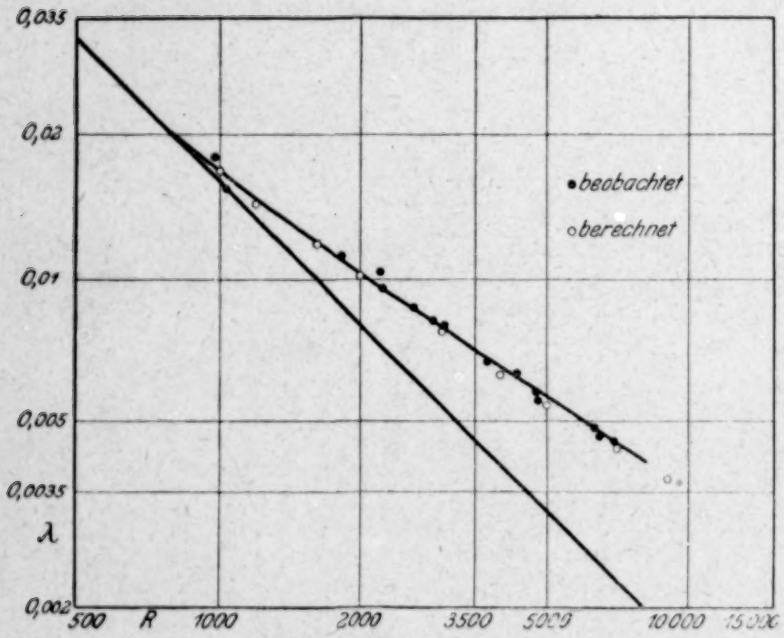


Abb. 7

Ohne das letzte Glied ist diese Gleichung identisch mit dem Poiseuilleschen Gesetz. Wir erhalten also als zusätzlichen Anlaufdruckverlust 1,16 Geschwindigkeitshöhen, zuzüglich des Eintrittsverlustes einen Gesamtzusatzverlust von 2,16 Geschwindigkeitshöhen.

2. Die Hagenbachsche „Korrektur der lebendigen Kraft". In nächster Beziehung zu dem hier ermittelten »Anlaufverlust« steht die Hagenbachsche[1]) »Korrektur der lebendigen Kraft«. Hagenbach hat nämlich darauf hingewiesen, daß bei Zähigkeitsbestimmungen nach der Kapillarmethode außer der Reibungsarbeit, die dem Poiseuilleschen Gesetz gehorcht, auch noch die Energie der ausströmenden Flüssigkeit in Rechnung zu setzen ist. Setzt man für diese parabolische Geschwindigkeitsverteilung an, so erhält man als Korrektur der Poiseuilleschen Gleichung $2\varrho\frac{\bar{u}^2}{2}$ gegenüber $2{,}16\,\varrho\frac{\bar{u}^2}{2}$ nach unserer Theorie.

Grundlage der Hagenbachschen Theorie ist die Annahme, daß der gesamte Druckabfall sich zusammensetzt aus einem Glied für die Energie der Poiseuilleschen Strömung und einem für die Poiseuillesche Reibungskraft. Oder, mit anderen Worten, es wird angenommen, daß die Reibungskraft in der ganzen »Anlaufstrecke« bereits dieselbe ist wie bei der parabolischen Verteilung. Ein Anhalt dafür, daß dem so ist, ist keineswegs gegeben. Theoretisch ist von Helmholtz[2]) vielmehr gezeigt worden, daß bei Abwesenheit von Trägheitskräften, also auch hier bei der Poiseuille-Strömung, sich die kleinstmögliche Reibungsarbeit einstellt. Eine abweichende Verteilung erfordert also mehr Reibungsarbeit, und man wird im Anlauf mit größerer Reibung zu rechnen haben. In Einklang hiermit steht, daß unsere Theorie tatsächlich einen höheren Wert für die Korrektur liefert. Da es jedoch nicht ganz ausgeschlossen ist, daß eine strenge Theorie wieder zum Hagenbachschen Wert führt, empfiehlt sich eine Prüfung durch den Versuch.

3. Messung des Druckverlustes durch Eintritt und Anlauf. Zur experimentellen Prüfung führen wir für diesen Zusatzverlust in Geschwindigkeitshöhen die Bezeichnung C ein und formen Gleichung (24) um in

$$\frac{P_0 - p_1}{\frac{x\mu\bar{u}}{a^2}} \overset{3)}{=} 8 + CR\,\frac{a}{2x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

---

[1]) Ed. Hagenbach, Pogg. Ann. **109**, 385. 1860.
[2]) H. v. Helmholtz, Wiss. Abhdlg. **1**, S. 224. 1882.
[3]) $P_0 - p_1$ enthalte zum Unterschied von $p_0 - p_1$ auch den Eintrittsverlust.

Dies ist die Gleichung einer Geraden für die dimensionslosen Koordinaten $\frac{P_0 - p_1}{\frac{x \mu \bar{u}}{a^2}}$ und $R\frac{a}{2x}$. Tragen wir die experimentellen Werte in dieser Weise auf, so erhalten wir die gesuchte Größe C als die Neigung der Geraden durch die Versuchspunkte. Wenn für die Zähigkeit μ der richtige Wert eingesetzt wird, so muß die Gerade für $R\frac{a}{2x} = 0$ durch den Punkt $\frac{P_0 - p_1}{\frac{x \mu \bar{u}}{a^2}} = 8$ gehen. Wird μ unrichtig eingesetzt, so bleibt die Kurve, wie eine einfache Ueberlegung zeigt, doch noch eine Gerade mit derselben Neigung, ist also jedenfalls für unseren Zweck verwendbar. Zur Ermittlung des gesamten Druckverlustes (einschließlich Eintrittsverlust) in der Anlaufstrecke, d. h. von der Eintrittstelle bis zu einem Punkt Poiseuillescher Verteilung wurde der eine Schenkel des Manometers an eine genügend weit vom Einlauf entfernte Meßstelle gelegt, der andere Schenkel an einen 25 cm über der Eintrittstelle gelegenen Punkt des Troges (Sch., Abb. 2). Die Spiegeldifferenz im Manometer gibt uns so die gesuchte Druckdifferenz unter der sicher zulässigen Voraussetzung, daß im Trog kein merklicher Druckverlust durch Reibung vorhanden ist.

Zunächst wurde mit abgerundetem Einlaufstück gearbeitet. Der Abstand der Meßstelle am Rohr vom Einlauf betrug bei drei Versuchsreihen 197,37 cm, bei einer 104,75 cm. Die Resultate wurden in Kurven in der oben besprochenen Weise niedergelegt; die der letzten Reihe sind in Abb. 8 wiedergegeben. Der

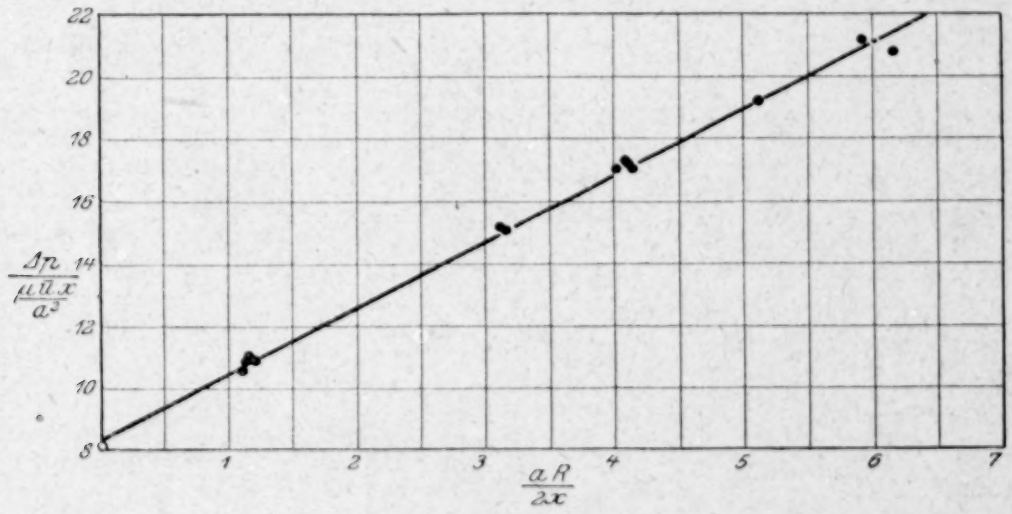


Abb. 8

Verlauf ist, wie erwartet, sehr gut geradlinig. Die Neigung, d. h. die gesuchte Konstante C, ergab sich für die einzelnen Reihen zu 2,35, 2,36, 2,45, 2,115; im Mittel $C = 2{,}32$. Dabei möchten wir der letzten Reihe, Abb. 8, die sich über den größten Bereich erstreckt, mit dem Wert 2,115 ein etwas größeres Gewicht beilegen, so daß die Uebereinstimmung mit dem theoretischen Wert 2,16 als gut bezeichnet werden darf. Da alle Reihen größere Werte als 2 liefern, so kann man jedenfalls annehmen, daß die Abweichung unseres näherungstheoretischen Resultats für C vom Wert 2 auch bei einer strengen Theorie erhalten bliebe.

Außerdem wurden am engen und mittleren Rohr noch gleiche Messungen mit scharfrandigem Einlaufstück ausgeführt. Es ergab sich hierbei das mit früheren Messungen über den Einfluß der Anlauflänge (Sch., Abschn. 4) übereinstimmende Resultat, daß die Verluste sich bei dem engen Rohr von den Verlusten bei Abrundung bis fast zum Eintritt der Turbulenz kaum unterschieden. Der laminare Teil der Kurve (Abb. 9) ist wieder eine Gerade mit der Neigung 2,38, in weitgehender Uebereinstimmung mit den Versuchen mit abgerundetem Einlaufstück. Man hat also anzunehmen, daß sich die Flüssigkeit selbst eine Art Abrundung am Einlauf durch einen stationären Wirbel schafft, und daß ein Abwandern von Wirbeln in merklichem Maße erst knapp vor dem Eintritt der allgemeinen Turbulenz einsetzt.

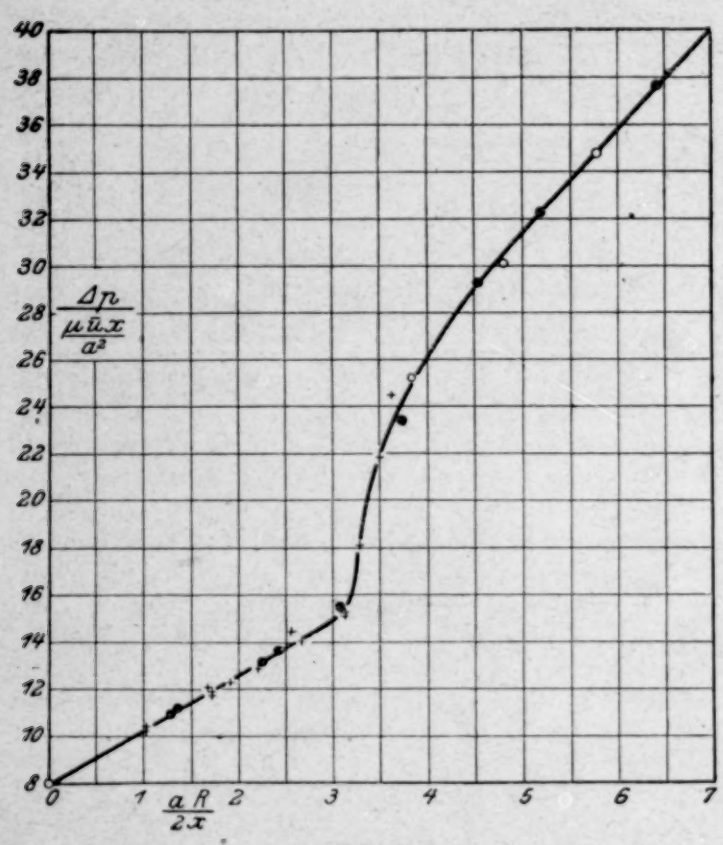


Abb. 9

Anders beim mittleren Rohr (Abb. 10): Hier zeigt zwar der laminare Kurventeil auch noch annähernd linearen Verlauf, soweit man dies bei der geringeren Genauigkeit der niedrigeren Versuchswerte beurteilen kann. Jedoch ist der Anstieg ein wesentlich stärkerer, wie man an der zum Vergleich durch die unteren Punkte gezogenen Geraden mit Neigung 2,2 sieht. Außerdem würde die verlängerte Gerade durch die Versuchspunkte die Ordinatenachse wesentlich tiefer unter dem Wert 8 schneiden, als man nach der Zuverlässigkeit des Zähigkeitswertes erwarten könnte. Man wird also wohl in Wirklichkeit eine schwach gekrümmt gegen den Wert 8 hin verlaufende Kurve anzunehmen haben. Augenscheinlich tritt also hier schon sehr früh ein Abmarsch von Wirbeln auf, der mit Druckverlust verbunden ist. Es wird sich daher bei Zähigkeitsbestimmungen empfehlen, dem Einlaufstück eine geeignete Abrundung zu erteilen.

III. Folgerungen für Zähigkeitsbestimmungen.

1. Bestimmung des Zähigkeitskoeffizienten mit beliebig kurzen Rohrstücken. Zähigkeitsmessungen werden in der Regel so ausgeführt, daß ein gemessenes Flüssigkeitsvolumen durch ein Rohr von einem höheren zu einem tieferen Niveau befördert wird. Die Berechnung erfolgt nach dem Poiseuilleschen Gesetz unter Berücksichtigung der Hagenbachschen Korrektur. Nach den Darlegungen in Abschnitt I und II gilt die letztere (bezw. 2,16 statt 2) jedoch nur für $\frac{x}{aR} > 0{,}115$. Dies setzt ein verhältnismäßig enges und langes Rohr, d. h. große Ausflußzeiten voraus, was den Bedürfnissen der Technik zuwiderläuft. Dort werden vielfach auch weitere, kürzere Rohre verwendet. Sollen mit diesen einwandfreie Ergebnisse erzielt werden, so muß eine entsprechend veränderte Korrektur eingesetzt werden, wie sie die entwickelte Theorie für beliebige Rohrlängen liefert.

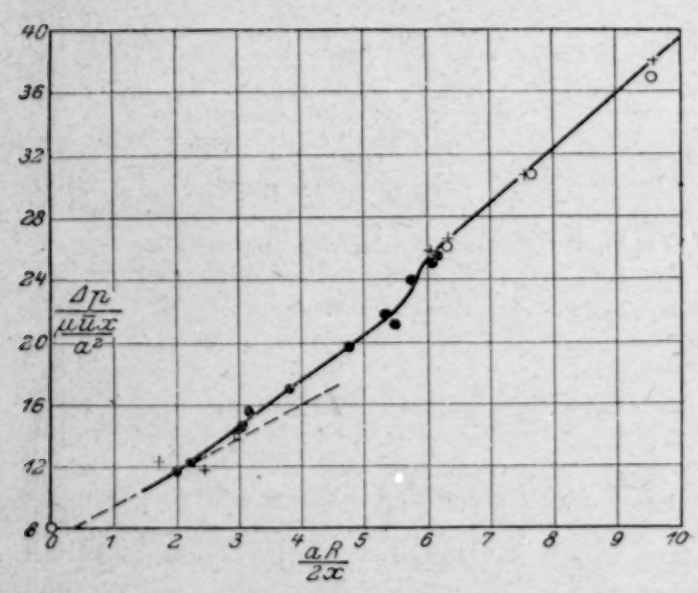


Abb. 10

Als Versuchsanordnung denken wir uns etwa die einfachste Form, ein oberes und ein unteres Reservoir[1]), dazwischen das Rohrstück, als Druckhöhe die (mittlere) Niveaudifferenz der Flüssigkeitsoberflächen. Zu ermitteln sind Rohrlänge x und Halbmesser a, die Durchflußgeschwindigkeit $\bar{u}$, die Dichte ϱ der Flüssigkeit und der

[1]) so weit, daß während der Dauer des Versuches keine wesentliche Aenderung der Niveaudifferenz eintritt.

mittlere Höhenunterschied der Flüssigkeitsoberflächen. Der Druckverlust $P_0 - p_1$, den die Flüssigkeit beim Strömungsvorgang erleidet und der durch den Spiegelunterschied gegeben ist, setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: dem der Bernoullischen Gleichung gehorchenden Eintrittsverlust beim Eintritt in das Rohr und dem Verlust bei der Strömung durch das Rohr.

In unserer Gl. (19)

$$2\eta + \eta^2 = \frac{p_0 - p_1}{\frac{\varrho}{2}\bar{u}^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

war $p_0 - p_1$ definiert lediglich als der zweite Anteil. Hierfür erhalten wir hier nach Bernoulli

$$(p_0 - p_1) = (P_0 - p_1) - \frac{\varrho \bar{u}^2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

und

$$2\eta + \eta^2 = \frac{P_0 - p_1}{\varrho \frac{\bar{u}^2}{2}} - 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27).$$

Zu dem so ermittelten Wert von $2\eta + \eta^2$ finden wir in Kurve Abb. 4 den zugehörigen Wert von $\frac{x}{aR} = \frac{x\mu}{a^2 \bar{u} \varrho}$, woraus μ als einzige Unbekannte zu berechnen ist. Dies Verfahren ist leicht für alle möglichen Längen anzuwenden.

2. Der Englersche Zähigkeitsmesser. Weit verbreitet ist für technische Zähigkeitsmessungen der Apparat von Engler, bestehend aus einem kreiszylindrischen Gefäß von 10,6 cm Durchmesser, in dessen Bodenmitte ein 2 cm langes und 0,29 cm weites Ausflußrohr eingesetzt ist. Gemessen wird die Zeit, in der sich der Flüssigkeitsspiegel von 5,2 cm bis 2,93 cm über der Ausflußmündung senkt (entspr. einer Ausflußmenge von 200 cm^3. Das Verhältnis dieser Zeitdauer für die zu bestimmende Substanz zu der für Wasser von 20° C liefert den »Englergrad«.

Zur Umwertung des »Englergrads« in »absolute Zähigkeit« besteht eine empirische Gleichung von Ubbelohde[1]) und eine theoretische Behandlung von v. Mises[2]), die nicht völlig übereinstimmen[3]). Die Berechnung von v. Mises benutzt die Hagenbachsche Korrektur, d. h. die Annahme, daß in jedem Fall die parabolische Verteilung noch innerhalb des Ausflußrohres erreicht werde. Wie eine Nachrechnung auf Grund unserer Theorie ergab[4]), ist dies jedoch für Wasser von 20° C nicht der Fall. Man erhält für den Beginn der Ausströmung $\frac{x}{aR} = 0{,}01272$, während (s. o.!) die parabolische Verteilung erst bei $\frac{x}{aR} = 0{,}115$ erreicht wird. Man wird also die Anwendbarkeit der Misesschen Theorie auf den Fall beschränken müssen, daß als Vergleichsflüssigkeit statt des Wassers eine solche gewählt wird, deren höhere Zähigkeit die Erreichung der parabolischen Geschwindigkeitsverteilung innerhalb des Ausflußrohres garantiert[5]) und auf die Bestimmung der Zähigkeitszahl solcher Flüssigkeiten.

Will man den Englerschen Apparat ganz allgemein zur unmittelbaren Bestimmung der absoluten Zähigkeit benutzen, wozu unsere Theorie die Möglichkeit bietet, so ist zur Erfüllung der theoretischen Voraussetzungen nötig, das Einlaufstück so abzurunden, daß keine Kontraktion eintritt und im Eintrittsquerschnitt konstante Geschwindigkeit herrscht[6]). Am einfachsten und genauesten wäre es, mit konstantem Spiegel zu arbeiten. Dann erfolgt die Bestimmung nach 1. Will man jedoch, wie üblich, den Spiegel von einer Marke bis zu einer zweiten sinken lassen, so hat man dem Apparat eine Tafel mit Kurven gleicher Zähigkeit als Funktion von Dichte und Ausflußzeit beizugeben, die man unschwer aufstellen kann.

---

[1]) L. Ubbelohde, Tabellen zum Englerschen Viskosimeter, Leipzig 1918, S. 26.

[2]) R. v. Mises, Ueber den Englerschen Flüssigkeitsmesser, Phys. Zeitschr., **12**, 812, 1911.

[3]) vergl. L. Gümbel, Zeitschr. f. techn. Phys. **2**, 172, 1921.

[4]) L. Schiller, Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 248, Abschn. III, 3. 1922.

[5]) Aus einem anderen Grunde empfiehlt auch v. Mises l. c. die Verwendung einer Vergleichssubstanz von höherem Zähigkeitsgrade.

[6]) Auch die Anwendbarkeit der Misesschen Theorie dürfte der gleichen Forderung unterworfen sein.

Anhang.

Der Eintrittsverlust für die turbulente Strömung. Bei turbulenter Strömung braucht man wegen der geringen Grenzschichtdicke[1]) auf die Geschwindigkeitsverteilung im Querschnitt keine Rücksicht zu nehmen. Ein »Anlaufverlust« kommt also nicht in Betracht. Als Eintrittsverlust setzen wir wieder eine Geschwindigkeitshöhe. Ein weiterer Verlust ergibt sich dadurch, daß der im Eintritt kontrahierte Strahl sich ziemlich schnell auf den vollen Röhrenquerschnitt erweitert. Aus einer Impulsbetrachtung folgt hierfür ein Druckverlust von $\frac{\varrho u^2}{2}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2$[2]), wo α der Kontraktionskoeffizient ist. Der gesamte Druckverlust im Einlauf ergibt sich also zu

$$\frac{\varrho u^2}{2}\left(\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2+1\right)=\frac{\varrho u^2}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{2}{\alpha}+2\right).$$

Setzt man als Kontraktionskoeffizient 0,61, so erhält man für die Klammer den Wert 1,4 und für den Druckabfall vom Trog bis zum Ende der Meßstrecke

$$\Delta p = 1{,}4\,\varrho\frac{u^2}{2}+\varrho\lambda\frac{x}{2a}\frac{u^2}{2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Um mit unserer graphischen Darstellung in Uebereinstimmung zu kommen, dividieren wir diese Gleichung durch $\frac{\mu u x}{a^2}$ und erhalten so:

$$\frac{\Delta p}{\frac{\mu u x}{a^2}}=\frac{a k}{2x}\left(1{,}4+\lambda\frac{x}{a}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Auf Grund dieser Gleichung und mit Benutzung der λ-Werte nach Blasius (Sch., Gl. (4)) wurden mehrere Punkte berechnet, die in Abb. 9 und 10 als Kreise eingezeichnet sind. Ihre für hydraulische Verhältnisse sehr befriedigende Uebereinstimmung mit dem Experiment zeigt die Nützlichkeit der zugrunde liegenden Impulsbetrachtung. 111

Stationärer Bewegungszustand einer schraubenförmigen Wirbelfläche.[3])

Von **H. REISSNER** in Berlin.

Die Theorie des Schraubenpropellers in einer inkompressiblen reibungslosen Flüssigkeit hat durch die Arbeiten von Joukowsky, Föttinger, Prandtl und Betz eine neue Wendung erhalten[4]). Ausgehend von der von Kutta, Joukowsky, Lanchester und Prandtl begründeten Flügelflächentheorie der geradlinigen Bewegung haben die erstgenannten die Flügelflächentheorie der Schraubenbewegung auf dem durch ein schraubenförmiges Wirbelsystem bedingten Strömungszustand aufgebaut. Während aber noch Joukowsky, Prandtl und Föttinger ein System isolierter, schraubenförmiger Wirbellinien, die von den Flügelspitzen bezw. der Nabe ausgehen, gebrauchten, hat Betz die Vorstellung einer von der Hinterkante des Schraubenflügels zurückgelassenen Wirbelschicht in scharfsinniger Weise von der Tragflächentheorie auf die Propellertheorie übertragen.

Er macht bei seinen Ueberlegungen die Voraussetzung, daß die vom Propellerflügel erzeugten, sich über die Grundströmung überlagernden Zusatzgeschwindigkeiten so klein sind, daß die von der Hinterkante zurückgelassene schraubenförmige Wirbelfläche sich im Strömungsgleichgewicht erhält bezw. von der Grundströmung unverändert fortgetragen wird. Diese Voraussetzung schien mir bei dem Studium der Betzschen Arbeit

[1]) Vergl. hierüber z. B. Prandtl, Abriß der Lehre von der Flüssigkeits- und Gasbewegung, Jena 1913, S. 20, oder v. Mises, Elemente der technischen Hydromechanik, I, Leipzig 1914, S. 67.

[2]) Vergl. Prandtl, l. c. S. 13 und 27.

[3]) Vortrag auf der Jenaer Versammlung, 20. September 1921.

[4]) Joukowsky in einer etwa 1912 erschienenen, mir augenblicklich nicht zugänglichen russischen Arbeit — H. Föttinger, Jahrb. d. Schiffbautechn. Gesellsch. 1918 S. 385 bis 472. — L. Prandtl, Handwörterbuch d. Naturwissensch., Jena 1913 S. 134. — A Betz, Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust, Nachr. Gesellsch. d. Wiss., Göttingen 1919.

zu eng für eine fruchtbare Anwendung zu sein, und ich versuche in Folgendem sie zu erweitern. Es stellt sich nun bei genauerer Durchrechnung in der Tat heraus, daß der von Betz vorausgesetzte stationäre Bewegungszustand einer schraubenförmigen Diskontinuitätsfläche mit den hydrodynamischen Gleichungen ohne einschränkende Bedingungen verträglich ist. Mit der folgenden Betrachtung ist freilich nur der Zustand in genügend weiter Entfernung hinter dem Propeller, auf den es dynamisch allerdings auch nur ankommt, diskutiert. Ferner ist die Abgrenzung der Wirbelfläche an den Flügelspitzen noch einer weiteren Diskussion bedürftig. Immerhin schien es mir wichtig genug zu zeigen, daß tatsächlich die Vorstellung der rotierenden schraubenförmigen Wirbelfläche rationell ist.

Die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten z, r, φ lauten in bezug auf ein um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierendes Koordinatensystem:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} + w\frac{\partial w}{\partial z} + u\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0 \\ &\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v^2}{r} - r\omega^2 - z\omega v = 0 \\ &\frac{1}{\mu r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + w\frac{\partial v}{\partial z} + u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{uv}{r} + z\omega u = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1),$$

wo u, v, w die Relativgeschwindigkeiten nach der r, φ, z-Richtung.

Die Gleichungen für ein festes Zylinderkoordinatensystem gehen aus den obigen hervor, wenn man die Glieder mit ω fortläßt.

Man kann diese Gleichungen in bekannter Weise umformen durch Einführung der Wirbelgeschwindigkeiten l, m, n, nämlich der Größen:

$$2n = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial rv}{\partial r}\right) \qquad 2l = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} \qquad 2m = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \quad \ldots \quad (2).$$

Man erhält durch Einführung von (2) in (1) die Gleichungen (1a)

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = 2(vl - um) \qquad \frac{\partial \chi}{\partial r} = 2(wm - vn_1) \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = 2(un_1 - wl) \qquad (1a),$$

worin

$$\chi = \frac{p}{\mu} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} - \frac{\omega^2 r^2}{2} \quad \ldots \quad (3),$$

eine Art erweiterter Bernoullischer Energie und:

$$n_1 = n - \omega \quad \ldots \quad (2a)$$

die absolute Wirbelgeschwindigkeit in bezug auf die z-Achse bedeuten.

Aus dieser Gleichung schließen wir, daß für ein rotierendes Koordinatensystem sowohl die relativen Stromlinien als auch die absoluten Wirbellinien auf den Flächen χ = konst. liegen, weil sich aus (1a) die Gleichungen ablesen lassen:

$$u\frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} + w\frac{\partial \chi}{\partial z} = 0 \qquad l\frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{m}{r}\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} + n_1\frac{\partial \chi}{\partial z} = 0.$$

Wir betrachten nun einen schraubenflächenartigen, wirbelnden Bereich, der sich mit konstanter Wirbelgeschwindigkeit herumdreht, und fragen nach den Bedingungen für die Existenzmöglichkeit eines solchen.

In diesem dünnwandigen Bereich sollen die absoluten Wirbellinien als zylindrische[3]) Schraubenlinien laufen, d. h.:

$$l = 0 \qquad m = s\cos\varepsilon \qquad n_1 = s\sin\varepsilon,$$

wo ε der Steigungswinkel der Schraubenlinien, der bei einer geraden Schraubenfläche von der Ganghöhe h gegeben ist durch die Beziehung $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{h}{2\pi r}$ und wo s die resultierende Wirbelgeschwindigkeit $\sqrt{m^2 + n_1^2}$.

Die Stromlinien in diesem Bereich sollen nicht alle als zylindrische Schraubenlinien verlaufen, vielmehr entsteht die resultierende Wirbelgeschwindigkeit dadurch, daß auf beiden Seiten des dünnen, schraubenflächenartigen Bereiches die Radialgeschwindigkeiten u verschieden sind.

[3]) Bei konischen Schraubenlinien hätte man $l \neq 0$ zu setzen.

Durch diese rasche Veränderlichkeit (Sprung) Δu der Tangentialkomponente u der Geschwindigkeit entsteht eine Wirbelgeschwindigkeit

$$s = \frac{1}{2}\frac{\Delta u}{\Delta v},$$

wo Δv die Dicke des Schichtbereiches.

Die aus v und w allein resultierende Geschwindigkeit V_1 verläuft ebenfalls in zylindrisch schraubenförmigen Bahnen. Es gilt also:

$$v = V_1 \cos\varepsilon \qquad w = V_1 \sin\varepsilon \qquad V_1^2 = v^2 + w^2.$$

Für die Geschwindigkeiten an den Grenzen der schraubenförmigen Wirbelschicht kann man nun aus der Betrachtung der nicht wirbelnden Umgebung einiges aussagen.

Bezeichnet man mit χ_a die Bernoullische Energiegröße außerhalb der Wirbelschicht, welche konstant ist nach Gl. (1a), da alle absoluten Wirbelgeschwindigkeiten Null sind, in bezug auf das bewegte Zylinderpolarkoordinatensystem $r\varphi z$, so ist offenbar nach (3)

$$\chi_a = \frac{p}{\mu} + \frac{u^2+v^2+w^2}{2} - \frac{w^2 r^2}{2} = \text{konst.} = \frac{p_0}{\mu} + \frac{w_0^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a),$$

da im Unendlichen der Druck $p = p_0$ und die Geschwindigkeitskomponenten w_0 und ωr sind. Für Antriebspropeller oder Ventilator ist $w_0 = 0$, nur für Windmotorflügel verschwindet w_0 nicht.

Da ferner auf beiden Seiten der dünnen wirbelnden Schicht der Druck p derselbe sein muß und nach Voraussetzung auch die Geschwindigkeiten v und w, so müssen auch die Geschwindigkeitsquadrate u^2 gleich, also die u selbst gleich oder entgegengesetzt gleich sein, d. h. es wird das oben eingeführte $\Delta u = 2u_a$ sein, wo u_a die Radialgeschwindigkeiten an den Oberflächen der Schicht.

Die Gleichungen (1a) innerhalb der wirbelnden Schicht werden also:

$$\frac{\partial\chi}{\partial z} = -2s\Delta v\, s\cos\varepsilon \qquad \frac{\partial\chi}{\partial r} = 2V_1 s(\sin\varepsilon\cos\varepsilon - \cos\varepsilon\sin\varepsilon) = 0 \qquad \frac{\partial\chi}{\partial\varphi} = r\,2s\Delta v\, s\sin\varepsilon \quad (1b).$$

Die Flächen $\chi = \text{konst.}$ der wirbelnden Schicht, auf denen die Stromlinien verlaufen, werden demnach nach der zweiten der Gleichungen (1b) jedenfalls gebildet aus den auf der z-Achse senkrecht stehenden Radien.

Da wir nun nach einer längs der z-Achse und um die z-Achse gleichförmigen Strömung fragen, muß die Wirbelgeschwindigkeit s eine reine Funktion von r sein. Gleichungen (1b) lassen dann die folgende Integration zu:

$$\chi = -2s^2\Delta v\cos\varepsilon z + 2s^2 r\Delta v\sin\varepsilon\varphi + c,$$

wo c eine reine Konstante ist und Δv der Abstand der betrachteten Fläche des Schichtbereiches von der Mittelfläche der Schicht.

Hierin müssen die Größen $s^2\cos\varepsilon$ und $s^2 r\sin\varepsilon$ unabhängig von r sein, da $\frac{\partial\chi}{\partial r} = 0$, was erfüllt ist, wenn man verlangt, daß die Wirbelgeschwindigkeit s längs des Radius r veränderlich ist nach der Gleichung:

$$s^2 = s_\infty^2\cos\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

wo s_∞ eine Konstante, d. h. die Wirbelgeschwindigkeit für $r = \infty$, wonach s von außen nach innen zunehmen und die z-Achse selbst ausgeschlossen werden muß.

Es ist nun andererseits nach (3)

$$\chi = \frac{p}{\mu} + \frac{u^2+v^2+w^2}{2} - \frac{\omega^2 r^2}{2},$$

und nach (3a) an der Oberfläche der Wirbelschicht

$$\chi = \frac{p_0}{\mu} + \frac{w_0^2}{2},$$

und damit wird die Gleichung der Flächen $\chi = \text{konst.}$

$$-2s_\infty^2\Delta v z + 2s_\infty^2\frac{h}{2\pi}\Delta v\varphi + c = \frac{p_0}{\mu} + \frac{w_0^2}{2}.$$

Man kann offenbar den Anfangspunkt der z so wählen, daß diese Gleichung der Wirbelschicht die Form annimmt:

$$z = \varphi\frac{h}{2\pi}.$$

Es folgt übrigens auch aus (4) die Radialkomponente u der Geschwindigkeit

$$u = s\,\Delta v = u_\infty \frac{1}{\sqrt{\cos\varepsilon}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Diese Radialgeschwindigkeit wird in der Achse unendlich, was ein Umströmen der scharfen Innenkante der Wirbelfläche mit unendlicher Geschwindigkeit bedeutet. Ein zylindrischer Bereich an der Nabe ist also auszuschließen vermittelst einer eingefügten, anderen Nabenströmung.

Dagegen können die Geschwindigkeitskomponenten v und w der Wirbelschicht willkürlich angenommen werden, wenn nur die Bedingung erfüllt ist:

$$w = v\,\mathrm{tg}\,\varepsilon = v\,\frac{h}{2\pi r}.$$

Eine Verfügung über diese Geschwindigkeiten muß auch deshalb an dieser Stelle willkürlich bleiben, weil die ergänzende Frage nach dem Potentialströmungszustand um die oben berechnete Wirbelfläche herum, welcher eindeutig mit der Wirbelfläche verknüpft ist, sonst nicht widerspruchsfrei lösbar bezw. sonst die Gl. (5) für u als Grenzbedingung an der umströmten Wirbelfläche nicht erfüllbar wäre.

Auf Grund dieser Betrachtung kann demnach der folgende Satz ausgesprochen werden:

Eine Wirbelfläche (Unstetigkeitsfläche der Tangentialkomponente der Geschwindigkeit) von der Gestalt einer geraden Schraubenfläche von der konstanten Steigung h, d. h. von der Gleichung $z = \varphi\,\frac{h}{2\pi}$, deren Wirbellinien in zylindrischen Schraubenlinien verlaufen und welche mit der konstanten Wirbelgeschwindigkeit ω rotiert, befindet sich im stationären Strömungsgleichgewicht (ist kräftefrei möglich), wenn die Radialgeschwindigkeiten auf beiden Seiten der Wirbelschicht entgegengesetzt gleich und vom Radius nach Gleichung (5) abhängig sind.

Die hier beschriebene Wirbelschicht geht radial ins Unendliche, während die wirklich auftretende Wirbelschicht in der Nähe des Flügelspitzenradius endigen muß. Das Bild wird also physikalisch nicht stimmen in der Nähe der Flügelspitzen. Es wird noch einer weiteren Untersuchung bedürfen, um festzustellen, ob sich die wirkliche schraubenförmige Wirbelschicht hinter einem Propellerflügel von dem äußeren Rande her in sich aufwickelt und dadurch in eine kaum noch mathematisch faßbare Mischbewegung übergeht oder ob sie auch gegen einen äußeren nicht wirbelnden Teil im Gleichgewicht zu halten ist, etwa durch eine sich anschließende, den Strahl begrenzende, ringförmig zylindrische Wirbelfläche. 153

Die Induktion von Wechselströmen in einer ebenen, leitenden Schicht.

Von **M. ABRAHAM.**

Wenn man in einer Schicht aus schlecht leitendem Stoffe, etwa feuchter Erde, zwei Elektroden anbringt und diese durch einen primären Wechselstrom periodisch aufzuladen sucht, so wird in der Schicht jeweils von der positiven zur negativen Elektrode ein Strom fließen, der den primären Strom zu einer geschlossenen Strömung ergänzt. Wäre die Strömung stationär, so erhielte man das bekannte Bild, bei dem kreisförmige Stromlinien von der einen Elektrode zur anderen laufen. Bei Wechselstrom ist nun aber das magnetische Feld in Betracht zu ziehen, und zwar sowohl das des primären Stromes wie das der sekundären Strömung in der Schicht selbst. Werden die von diesen magnetischen Feldern induzierten elektrischen Kräfte berücksichtigt, wie verlaufen dann die Stromlinien in der Schicht? Diese Frage, die in der sogenannten »Erdtelegraphie« eine Rolle spielt, bildet den Ausgangspunkt der vorliegenden Untersuchungen.

Es erweist sich als zweckmäßig, die Fragestellung zu verallgemeinern und als Erreger einen Hertzschen Dipol anzunehmen, der über der Schicht steht, sei es senkrecht (**2**), sei es parallel (**3**) zu ihr; so ist man von vornherein sicher, daß die elektrischen und die magnetischen Kräfte des primären Feldes durch die Feldgleichungen miteinander verkettet sind. Man gelangt zu allgemeineren Lösungen, indem man Hertzsche Dipole,

d. h. Stromstücke aneinander reiht. Läßt man wagrechte Stromstücke an die Schicht heran oder in sie hinein rücken und fügt sie dann aneinander, so erhält man einen geraden Draht von endlicher Länge, der zwei Elektroden verbindet; wir gelangen so zu der Lösung jener Aufgabe der Erdtelegraphie (**4**). Wir behandeln weiter noch die Fälle, wo als Erreger eine von Wechselstrom durchflossene Spule dient, deren Achse senkrecht (**5**) oder parallel (**6**) zur leitenden Schicht gerichtet ist. Hier gelingt es, indem man die Spule durch einen magnetischen Dipol von periodisch wechselndem Momente ersetzt, die in der Schicht induzierte Strömung zu ermitteln. Endlich wird der Sonderfall erörtert (**7**), daß die Spule an die Schicht heran, oder in sie hinein rückt; auch kann die Spule, bei horizontal gestellter Achse, eine endliche Länge haben.

Statt der schlechtleitenden Schicht kann man sich, ohne die mathematische Formulierung zu ändern, eine gutleitende metallische Platte denken; nur die Zahlenverhältnisse (**1**) werden andere. Die Platte oder Schicht ersetzt man durch eine Unstetigkeitsfläche, in der die tangentiellen magnetischen Komponenten bezw. die normale elektrische Komponente Sprünge machen erleiden, die den Komponenten des Flächenstromes bezw. mit der Ladungsdichte verknüpft sind. Hingegen die tangentiellen elektrischen Komponenten und die mit ihnen durch die Feldgesetze verkettete normale magnetische Komponente sollen stetig die Sprungebene durchsetzen. Der Ersatz durch eine Sprungfläche ist selbstverständlich nur dann zulässig, wenn die Platte oder Schicht nicht zu dick ist (**1.**).

Von T. Levi-Civita[1]) ist eine in mancher Hinsicht verwandte Aufgabe behandelt worden, nämlich eine ebene metallische Platte, zu der parallel ein gerader Draht gespannt ist; im Draht fließt eine Strom- und Ladungswelle; die Platte schirmt ganz das elektrische, zum Teile auch das magnetische Feld ab. Wir zielen hier nicht sowohl auf die vollständige Bestimmung des elektromagnetischen Feldes hin, wie auf die Ermittlung der in der Platte induzierten Strömung; für diese ist die Kenntnis der zu ihr senkrechten elektrischen bezw. magnetischen Feldstärke ausreichend, welche die Dichten der Quellen bezw. der Wirbel des Flächenstromes bestimmt. Einen besonderen Fall behandelt T. Boggio[2]).

1. Die Grundgleichungen. Es seien $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{H}_0$ die elektrische und die magnetische Feldstärke des erregenden (primären) Feldes, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{H}_1$ diejenigen des erregten (sekundären) Feldes in der Schicht (Platte); sie setzen sich zusammen zu dem Gesamtfeld

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}_1, \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}_1.$$

Es sei ν die Frequenz der Schwingungen, d. h. die Zahl der Schwingungen in 2π Sekunden; bringt man die Abhängigkeit von der Zeit durch den Faktor $e^{i\nu t}$ zum Ausdruck, so haben die komplexen Ausdrücke der Feldstärken im Raume den Verkettungsgleichungen zu genügen.

$$i\varkappa\mathfrak{E} = \operatorname{rot}\mathfrak{H}, \quad \operatorname{div}\mathfrak{E} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1), \qquad -i\varkappa\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{E}, \quad \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0 \quad . \quad . \quad (2).$$

Dabei ist

$$\varkappa = \frac{\nu}{c} = \frac{2\pi}{c\tau} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

(c Lichtgeschwindigkeit, τ Schwingungsdauer, λ Wellenlänge im Raume). Auch die primären und die sekundären Feldstärken für sich sind durch solche Feldgleichungen verknüpft.

Die Schicht (Platte) sei senkrecht zur z-Achse; ihre Mittelebene sei die xy Ebene, ihre Dicke sei d; es seien σ, ε Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante des die Schicht erfüllenden homogenen isotropen Stoffes; σ wird elektrostatisch gemessen, wie überhaupt das zugrunde gelegte Maßsystem das Gaußsche ist. Die Komponenten des Flächenstromes j sind proportional denjenigen des in der Schicht herrschenden elektrischen Gesamtfeldes:

$$j_x = d\left(\sigma + \frac{i\nu\varepsilon}{4\pi}\right)\mathfrak{E}_x, \qquad j_y = d\left(\sigma + \frac{i\nu\varepsilon}{4\pi}\right)\mathfrak{E}_y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß die Komponenten $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$ über die ganze Dicke der Schicht hin merklich konstant sind (siehe unten). Der Flächenstrom ist mit dem Flächenwirbel des von ihm erregten magnetischen Feldes durch die erste Hauptgleichung ver-

[1]) T. Levi-Civita, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Vol. XI[1]. 1902.
[2]) T. Boggio, R. Acc. delle scienze di Torino, vol. XXXVIII, 1903.

knüpft; ihr entspricht eine Unstetigkeit der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{H}_1$, die aus Symmetriegründen ergibt:

$$j_x = \mp \frac{c}{2\pi} \mathfrak{H}_{1y}, \qquad j_y = \pm \frac{c}{2\pi} \mathfrak{H}_{1x} \Big\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Das obere bezw. untere Vorzeichen bezieht sich hier, wie auch weiterhin, stets auf die obere bezw. untere Seite der Platte, d. h. auf die Seite der positiven bezw. negativen z. Ersetzen wir die Schicht durch eine Sprungebene, so können wir die beiden Seiten durch $z = \pm 0$ kennzeichnen. So ist z. B. die elektrische Flächendichte der Platte

$$\omega = \pm \frac{1}{2\pi} \mathfrak{E}_{1z} \text{ für } z = \pm 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

In der Tat muß aus Symmetriegründen die z-Komponente des Plattenfeldes oben und unten entgegengesetzte Richtung und gleichen Betrag haben; andererseits muß ihr Sprung, d. h. die Flächendivergenz von $\mathfrak{E}_1$, gleich $4\pi\omega$ sein.

Die Flächendichten der Elektrizität und des Stromes sind durch die Kontinuitätsbedingung verknüpft:

$$i\nu\omega + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Setzt man abkürzungsweise

$$\alpha = \frac{c}{2\pi d\left(\sigma + \frac{i\nu\varepsilon}{4\pi}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7),$$

wo α eine Zahl ist, so folgt aus (3), (4)

$$\mathfrak{E}_{1x} + \mathfrak{E}_{1x} = \mp \alpha \mathfrak{H}_{1y}, \qquad \mathfrak{E}_{0y} + \mathfrak{E}_{1y} = \pm \alpha \mathfrak{H}_{1x} \text{ für } z = \pm 0 \quad \ldots \quad (8).$$

Das sind die Bedingungen an der die Schicht ersetzenden Sprungebene.

Die Strömung in der Schicht ist nun bestimmt, wenn man die Dichte ihrer Quellen und Wirbel kennt; die Quellendichte bezw. die Wirbeldichte sind

$$D = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} \quad \ldots\ldots \quad (9), \qquad C = \frac{\partial j_y}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial y} \quad \ldots\ldots \quad (10).$$

Aus (3), (7) und (1) erhält man

$$D = \frac{c}{2\pi\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y}\right) = -\frac{c}{2\pi\alpha}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z},$$

andererseits aus (5), (6)

$$D = \mp \frac{i\nu}{2\pi} \mathfrak{E}_{1z} \text{ für } z = \pm 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Es folgt

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_{1z}}{\partial z} \mp iq\mathfrak{E}_{1z} = -\frac{\partial \mathfrak{E}_{0z}}{\partial z} \text{ für } z = \pm 0 \quad \ldots\ldots \quad (12),$$

mit

$$q = \frac{\alpha\nu}{c} = \alpha\varkappa \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12\,a).$$

Ferner leitet man aus (3), (7) und (2) ab:

$$C = \frac{c}{2\pi\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y}\right) = -\frac{i\nu}{2\pi\alpha}\mathfrak{H}_z,$$

und aus (4), (2)

$$C = \pm \frac{c}{2\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_{1y}}{\partial y}\right) = \mp \frac{c}{2\pi}\frac{\partial \mathfrak{H}_{1z}}{\partial z} \text{ für } z = \pm 0.$$

Demgemäß hat man

$$\pm \frac{\partial \mathfrak{H}_{1z}}{\partial z} - ip\mathfrak{H}_{1z} = ip\mathfrak{H}_{1z} \text{ für } z = \pm 0 \quad \ldots\ldots \quad (13),$$

mit

$$p = \frac{\nu}{c\alpha} = \frac{\varkappa}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13\,a)$$

und ferner

$$C = -\frac{ipc}{2\pi}(\mathfrak{H}_{0z} + \mathfrak{H}_{1z}) \text{ für } z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14).$$

Die Grenzbedingungen (12) bezw. (13) an der Schicht bestimmen, mit den Feldgleichungen zusammen, die zur Schicht senkrechten Komponenten

des sekundären elektrischen bezw. magnetischen Feldes, wenn die des primären Feldes gegeben sind. Die Gleichungen (11) und (14) ergeben sodann die Dichten der Quellen und Wirbel der elektrischen Strömung, wodurch nach allgemeinen Sätzen über ebene Vektorfelder das Strömungsfeld selbst bestimmt ist. Wie man sieht, kommt für die Quellen die Konstante q, für die Wirbel die Konstante p in Betracht; beide haben die Dimension reziproker Längen.

Zahlenverhältnisse: In (3) kommt der Verschiebungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom nur bei sehr hohen Frequenzen und bei sehr schlechten Leitern zur Geltung. In trockner Erde ist bei den Frequenzen der drahtlosen Telegraphie der Verschiebungsstrom zu berücksichtigen. Dagegen ist in feuchter Erde selbst bei so hoher Frequenz der Verschiebungsstrom zu vernachlässigen, wie aus Untersuchungen von Rausch v. Traubenberg und mir[1]) hervorgeht; wir fanden als Wert der Leitfähigkeit $\sigma \approx c^2 10^{-13} \approx 10^8$ bei feuchter Erde. Für Seewasser, wo $\sigma \approx 10^{10}$, ist um so mehr in (3) und in (7) $\varepsilon = 0$ zu setzen, selbst bei Hochfrequenz. Bei telephonischen Frequenzen, die wir hier im Auge haben, ist somit selbst in schlechten Leitern $\frac{\nu \varepsilon}{4\pi} << \sigma$, so daß man hat

$$\alpha = \frac{c}{2\pi d \sigma} = \frac{cR}{2\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

wo R der Widerstand eines cm² der Schicht ist.

Um mit Flächenstrom rechnen zu können, müssen die Komponenten $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$ in der Schicht senkrecht zu ihr merklich konstant sein; das ist nur dann der Fall, wenn die Schichtdicke d eine gewisse Grenze d_m nicht überschreitet. Diese Grenze kann man dadurch abschätzen, daß man das Eindringen von Wellen der betreffenden Frequenz verfolgt[2]); die Bedingung dafür, daß Amplitude und Phase der Wellen sich auf der Strecke d_m nur wenig ändern, ist[3])

$$\frac{\nu}{c} d_m \sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\nu}} = \beta,$$

wo $\beta \approx 10^{-1}$ gesetzt werden mag also ist die Grenzdicke:

$$d_m \approx \frac{3 \cdot 10^9}{2\sqrt{\pi \sigma \nu}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Rechnen wir nun mit einer Schwingungsdauer von ein Tausendstel Sekunde, setzen also $\nu = 2\pi 10^3$ für die Frequenz, so wird:

$$d_m \approx \frac{10^9}{2\sqrt{\sigma 10^3}}, \quad d \leq d_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16\,a).$$

Für feuchte Erde, wo $\sigma \approx 10^8$, wird $d_m \approx 16$ m; für Seewasser, wo $\sigma \approx 10^{10}$, wird $d_m \approx 1{,}6$ m; für Kupfer, wo $\sigma = 5 \cdot 10^{17}$, wird die Grenzdicke $d_m \approx 0{,}02$ cm.

In der folgenden Tabelle ist die Frequenz $\nu = 2\pi \cdot 10^3$ gesetzt, daher

$$\varkappa = \frac{\nu}{c} \approx 2 \cdot 10^{-7}.$$

In der ersten Spalte sind die Werte der Leitfähigkeit σ eingetragen, in der zweiten diejenigen der Schichtdicke d, in der dritten die nach (15) berechneten Werte der Zahl α, in der vierten und fünften die aus (13a), (12a) erhaltenen Konstanten p, q, endlich in der sechsten und siebenten die reziproken Größen $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, welche die Dimension von Längen haben.

	σ	d	α	p	q	p^{-1}	q^{-1}
Feuchte Erde	10^8	10^3 cm	$5 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-6}$	10^{-8}	2,5 km	10^3 km
Seewasser	10^{10}	10^2 »	$5 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-5}$	10^{-9}	250 m	10^4 »
Kupfer	$5 \cdot 10^{17}$	$2 \cdot 10^{-2}$ »	$5 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-1}$	10^{-13}	2,5 cm	10^8 »

[1]) Abraham, Rausch v. Traubenberg und Pusch, Physik. Zeitschrift **20**, S. 150 (1919).
[2]) vergl. Abraham, Theorie der Elektrizität, I, § 69.
[3]) l. c. Gl. (207), (207a), wo $\mu = 1$, $\varepsilon = 0$ zu setzen ist.

Den Feldgleichungen (1), (2) für das primäre Feld $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{H}_0$ genügt man durch Annahme eines Hertzschen Vektors[1])

$$\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{m}\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Dabei stellt der Vektor $\mathfrak{m}$ nach Betrag und Richtung das Moment eines Dipoles dar, mithin sein Betrag das Produkt aus Polstärke und Abstand der (elektrischen oder magnetischen) Pole.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17\,a)$$

ist der Abstand eines beliebigen Aufpunktes von dem Dipole, der sich auf der z-Achse in der Höhe h über der Schicht befindet. Im Falle des elektrischen Dipoles leiten sich die elektromagnetischen Vektoren des primären Feldes aus dem Hertzschen Vektor ab gemäß

$$\mathfrak{E}_0 = \text{grad div}\,\mathfrak{Z}_0 + \varkappa^2\mathfrak{Z}_0, \qquad \mathfrak{H}_0 = i\varkappa\,\text{rot}\,\mathfrak{Z}_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17\,b).$$

Im Falle des magnetischen Dipoles ist $\mathfrak{H}_0$ an Stelle von $\mathfrak{E}_0$, $-\mathfrak{E}_0$ an Stelle von $\mathfrak{H}_0$ zu setzen.

2. Vertikaler elektrischer Dipol. Hier ist der Momentenvektor $\mathfrak{m}$ und also auch der Hertzsche Vektor $\mathfrak{Z}_0$ der z-Achse parallel; es kommt allein seine z-Komponente Z_0 in Frage:

$$Z_0 = \mathfrak{m}\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Aus dieser »Hertzschen Funktion« leiten sich die Komponenten des primären Feldes folgendermaßen ab:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_{0x} &= \frac{\partial^2 Z_0}{\partial x\,\partial z}, \quad \mathfrak{E}_{0y} = \frac{\partial^2 Z_0}{\partial y\,\partial z}, \quad \mathfrak{E}_{0z} = \frac{\partial^2 Z_0}{\partial z^2} + \varkappa^2 Z_0 \\ \mathfrak{H}_{0x} &= i\varkappa\frac{\partial Z_0}{\partial y}, \quad \mathfrak{H}_{0y} = -i\varkappa\frac{\partial Z_0}{\partial x}, \quad \mathfrak{H}_{0z} = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (18\,a).$$

Die Hertzsche Funktion, wie auch jede der Feldkomponenten, genügt der »Wellengleichung«:

$$\frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z_0}{\partial z^2} + \varkappa^2 Z_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18\,b).$$

Da $\mathfrak{H}_{0z} = 0$ ist, d. h die magnetischen Kraftlinien des primären Feldes hier stets parallel zur Schicht verlaufen, so wird der Grenzbedingung (13) genügt, indem man auch $\mathfrak{H}_{1z} = 0$ setzt, d. h. auch dem von den Plattenströmen erregten Felde keine zur Platte senkrechte magnetische Feldkomponente zuschreibt. Dann folgt aus (14), daß die Strömung in der Platte keine Wirbel hat; sie leitet sich also aus einem skalaren Potential φ ab:

$$j_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad j_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19),$$

während nach (9) und (11) die Quellendichte ist

$$D = -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) = \mp\frac{i\nu}{2\pi}\mathfrak{E}_{1z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Statt nun $\mathfrak{E}_{1z}$ durch die Grenzbedingung (12) zu bestimmen, ist es hier einfacher, das sekundäre Feld $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{H}_1$ aus einer Hertzschen Funktion Z_1 abzuleiten, entsprechend wie sich in (18a) $\mathfrak{E}_0\,\mathfrak{H}_0$ aus Z_0 ableiten; Z_1 muß ebenfalls der Wellengleichung genügen, und außerdem den Grenzbedingungen (8):

$$\frac{\partial^2(Z_0 + Z_1)}{\partial x\,\partial z} = \pm i\alpha\varkappa\frac{\partial Z_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2(Z_0 + Z_1)}{\partial y\,\partial z} = \pm i\alpha\varkappa\frac{\partial Z_1}{\partial y}$$

für $z = \pm 0$ und für beliebige x, y.

Diese lassen sich zu einer einzigen Bedingung zusammenfassen:

$$\frac{\partial Z_1}{\partial z} \mp iqZ_1 = -\frac{\partial Z_0}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{m}e^{-i\varkappa r}}{r}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

für $z = \pm 0$.

Gesucht ist die dieser Grenzbedingung entsprechende Lösung der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2} + \varkappa^2 Z_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

---

[1]) Abraham, Theorie der Elektrizität, I, § 79.

Aus ihr folgt $$\mathfrak{E}_{1z} = \frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2} + \varkappa^2 Z_1 = -\left(\frac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z_1}{\partial y^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22\,\text{a}),$$

so daß man aus (20) ohne weiteres das Strömungspotential erhält:

$$\varphi = \mp \frac{i\nu}{2\pi} Z_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Die wirbelfreie Strömung in der Schicht ist also gefunden, sobald man die Hertzsche Funktion Z_1 des sekundären Feldes kennt.

Wir setzen

$$s^2 = \varrho^2 + (|z| + h - iu)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24),$$

mit $\varrho^2 = x^2 + y^2$; dabei ist u eine reelle positive Veränderliche. Für $u = 0$ geht s über in s_0, wo

$$s_0^2 = \varrho^2 + (|z| + h)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24\,\text{a}).$$

Es ist

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } z < 0\text{: } s_0 = r \text{ der Abstand vom Dipol (vergl. 17 a),} \\ \text{» } z > 0\text{: } s_0 = r' \text{ der Abstand vom Spiegelbilde des Dipols in Bezug auf die Platte} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (24\text{b})$$

s ist überall endlich und mit seinen Ableitungen stetig, mit Ausnahme der xy-Ebene; $\frac{e^{-i\varkappa s}}{s}$ ist daher außerhalb der Schicht mit seinen Ableitungen endlich und stetig, und genügt der Wellengleichung (22). Diese Gleichung wird daher auch erfüllt durch[1])

$$Z_1 = i\,\mathfrak{m} \int_0^\infty du e^{-qu} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-i\varkappa s}}{s}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Wir wollen zeigen, daß auch die Grenzbedingung (21) erfüllt ist. Es gilt nach (24) $\frac{\partial s}{\partial u} = -i\frac{\partial s}{\partial |z|}$, oder

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \pm i \frac{\partial s}{\partial u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25\,\text{a})$$

für $z \gtrless 0$; daher wird

$$Z_1 = \mp\, \mathfrak{m} \int_0^\infty du e^{-qu} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{e^{-i\varkappa s}}{s}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25\,\text{b}).$$

Eine partielle Integration ergibt

$$Z_1 = \mp\, \mathfrak{m}\left[\frac{e^{-i\varkappa s}}{s} e^{-qu}\right]_{u=0}^{\infty} \mp\, \mathfrak{m} q \int_0^\infty du e^{-qu} \frac{e^{-i\varkappa s}}{s},$$

also

$$Z_1 = \pm\, \mathfrak{m} \frac{e^{-i\varkappa s_0}}{s_0} \mp\, \mathfrak{m} q \int_0^\infty du e^{-qu} \frac{e^{-i\varkappa s}}{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Ableitung nach z ergibt, wegen (25 a)

$$\frac{\partial Z_1}{\partial z} = \pm \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{m} e^{-i\varkappa s_0}}{s_0}\right) - \mathfrak{m} q i \int_0^\infty du e^{-qu} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{e^{-i\varkappa s}}{s}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26\,\text{a}),$$

mithin gemäß (25 b)

$$\frac{\partial Z_1}{\partial z} \mp i q Z_1 = \pm \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{m} e^{-\varkappa i s_0}}{s_0}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26\,\text{b}).$$

Nun ist für negative z: $s_0 = r$, $\frac{\partial s_0}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}$; demnach ist auf der unteren Plattenseite die Bedingung (21) erfüllt. Sie ist es auch auf der oberen Seite, wo $s_0 = r'$, also für $z = +0$: $\frac{\partial s_0}{\partial z} = \frac{\partial r'}{\partial z} = -\frac{\partial r}{\partial z}$ ist.

Wir haben also in (25) ein Integral der Wellengleichung (22) erhalten, welches der Grenzbedingung (21) genügt, und überall außerhalb der Sprung-

---

[1]) Ein ähnliches Verfahren wendet Levi-Civita an, um die elektromagnetischen Potentiale, die in seinem Falle der zweidimensionalen Laplaceschen Gleichung, jedoch ähnlichen Grenzbedingungen genügen, zu berechnen.

ebene endlich und stetig ist[1]). Es stellt die Hertzsche Funktion des sekundären Feldes dar. Ein Blick auf die Tabelle in **1.** lehrt nun, daß die reziproke Länge q nicht nur für eine Kupferplatte, sondern auch für eine Schicht aus feuchter Erde oder Seewasser sehr klein ist. Falls — was praktisch stets zutrifft — bei sonst in Frage kommenden Längen r, ϱ, h klein gegen die in der letzten Spalte der Tabelle aufgeführten Werte von q^{-1} sind, ist in (26) bezw. in (26a) das zweite Glied zu streichen; mithin wird

$$Z_1 = \mathfrak{m}\frac{e^{-i\varkappa r'}}{r'} \text{ für } z \geq 0 \quad . \quad . \quad . \quad (27), \qquad Z_1 = -\mathfrak{m}\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \text{ für } z \leq 0 \quad . \quad . \quad . \quad (27a).$$

Das elektromagnetische Feld der Plattenströme stimmt also unterhalb der Platte überein mit demjenigen eines Dipoles, der am Orte des ursprünglichen Dipoles zu denken ist, aber nach (18) entgegengesetzt gleiches Moment hat. Für das Gesamtfeld ist unterhalb der Platte

$$Z_0 + Z_1 = 0 \text{ für } z \leq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27b).$$

Die Platte oder Schicht schirmt also im Falle des zu ihr senkrechten Dipoles das elektromagnetische Feld vollkommen ab. Oberhalb der Platte läßt sich das sekundäre Feld auffassen als das eines Dipoles, welcher zum ursprünglichen Dipole spiegelbildlich liegt und gleiches Moment hat. Das Gesamtfeld leitet sich aus der Hertzschen Funktion ab

$$Z_0 + Z_1 = \mathfrak{m}\left\{\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} + \frac{e^{-i\varkappa r'}}{r'}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27c),$$

was man auch durch das Spiegelungsverfahren, das für vollkommene Leiter gilt, hätte erhalten können; merkwürdig bleibt aber, daß es noch für so schlechte Leiter, wie feuchte Erde, gültig bleibt.

Da Z_1 eine ungerade, $\frac{\partial Z_1}{\partial z}$ aber eine gerade Funktion von z ist, so folgt, wenn man die sekundären Feldkomponenten nach dem Schema (18a) aus Z_1 ableitet, daß $\mathfrak{H}_{1x}$, $\mathfrak{H}_{1y}$, $\mathfrak{E}_{1z}$ ungerade, dagegen $\mathfrak{E}_{1x}$, $\mathfrak{E}_{1y}$ gerade Funktionen von z sind; $\mathfrak{H}_{1x}$, $\mathfrak{H}_{1y}$, $\mathfrak{E}_{1z}$ sind in der Sprungebene unstetig, $\mathfrak{E}_{1x}$, $\mathfrak{E}_{1y}$ stetig. Dieses Verhalten entspricht den Voraussetzungen in **1.**

Da nach (27), (27a)

$$\mp Z_1 = -\mathfrak{m}\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \text{ für } z = \pm 0, \text{ mit } r = \sqrt{\varrho^2 + h^2},$$

so folgt aus (23) das Potential der Strömung in der Schicht

$$\varphi = -\frac{i\nu\mathfrak{m}}{2\pi}\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Für die hier in Frage kommenden telephonischen Frequenzen ist $\varkappa r = \frac{2\pi r}{\lambda} < < 1$,

also

$$\varphi = -\frac{i\nu\mathfrak{m}}{2\pi}\frac{1}{r} = -\frac{i\nu\mathfrak{m}}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + h^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28a).$$

Die Strömung ist radial vom Ursprung 0 aus gerichtet. Die Dichte des Flächenstromes in der Schicht ist

$$j_\varrho = -\frac{d\varphi}{d\varrho} = -\frac{i\nu\mathfrak{m}}{2\pi}\frac{\varrho}{r^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28b);$$

hier wäre eigentlich noch der Zeitfaktor $e^{i\nu t}$ beizufügen.

$$i\nu\mathfrak{m} = T\delta l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28c),$$

die Ableitung des Dipolmomentes nach der Zeit, ist gleich der Stromstärke (T) des die Pole verbindenden Stromstückes mal ihrem Abstande (δl).

3. Horizontaler elektrischer Dipol. Ist das Moment des elektrischen Dipoles der x-Achse parallel, so ist es auch der Hertzsche Vektor; er geht dann über in die Hertzsche Funktion

$$X_0 = \mathfrak{m}\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29),$$

---

[1]) Die Lösung ist selbstverständlich nicht die einzige; man kann stets ebene Wellen hinzufügen, welche auf die Platte treffen, und zum Teil gespiegelt, zum Teil durchgelassen werden; solche Wellen sind als herrührend von im Unendlichen befindlichen Erregungsstellen anzusehen, und sind hier nicht von Belang, da wir nur den von dem einen bestimmten Dipol erregten Schwingungszustand ins Auge fassen.

aus der sich, gemäß (17b), die Komponenten des primären Feldes folgendermaßen ableiten:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_{0x} &= \frac{\partial^2 X_0}{\partial x^2} + \varkappa^2 X_0\,, \qquad \mathfrak{E}_{0y} = \frac{\partial^2 X_0}{\partial x\,\partial y}\,, \qquad \mathfrak{E}_{0z} = \frac{\partial^2 X_0}{\partial x\,\partial z} \\ \mathfrak{H}_{0x} &= 0\,, \qquad \mathfrak{H}_{0y} = i\varkappa \frac{\partial X_0}{\partial z}\,, \qquad \mathfrak{H}_{0z} = -\,i\varkappa \frac{\partial X_0}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Das Plattenfeld dagegen werden wir in diesem Falle nicht durch eine Hertzsche Funktion darstellen. Wir werden uns damit begnügen, aus den Grenzbedingungen (12), (13) die zur Platte senkrechten Komponenten $\mathfrak{E}_{1z}$, $\mathfrak{H}_{1z}$ zu ermitteln und durch sie vermöge (11), (14) die Dichten der Quellen und der Wirbel des Stromes in der Platte bestimmen.

A) Elektrisches Feld und Quellenverteilung.

Man setze

$$\mathfrak{E}_{1z} = \frac{\partial W}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Wie hieraus und aus (30) zu ersehen, ist die Grenzbedingung (12) erfüllt, wenn

$$\frac{\partial W}{\partial z} \mp iqW = -\,\mathfrak{m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) \text{ für } z = \pm 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

Außerdem soll W der Wellengleichung genügen. Die Grenzbedingung (32) ist ähnlich gebaut wie (21), nur daß rechts statt der ersten die zweite Ableitung einer Wellenfunktion nach der Zeit steht. Die Lösung lautet hier

$$W = \mp i\mathfrak{m}\int_0^\infty du e^{-qu}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{e^{-i\varkappa s}}{s}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33),$$

wo s durch (24) gegeben ist. Nach (25a) kann man schreiben

$$W = \pm i\mathfrak{m}\int_0^\infty du e^{-qu}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{e^{-i\varkappa s}}{s}\right) \quad . \quad . \quad (34), \qquad \frac{\partial W}{\partial z} = -\,\mathfrak{m}\int_0^\infty du e^{-qu}\frac{\partial^3}{\partial u^3}\left(\frac{e^{-i\varkappa s}}{s}\right) \quad . \quad . \quad (35).$$

Partielle Integration ergibt

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -\,\mathfrak{m}\left[e^{-qu}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{e^{-i\varkappa s}}{s}\right)\right]_{u=0}^{\infty} - q\mathfrak{m}\int_0^\infty du e^{-qu}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{e^{-i\varkappa s}}{s}\right).$$

Hieraus folgt, mit Rücksicht auf (24a), (25a) und (34)

$$\frac{\partial W}{\partial z} \mp iqW = -\,\mathfrak{m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{e^{-i\varkappa s_0}}{s_0}\right).$$

Dies gilt für beliebige z, wobei nach (24b) für $z \geq 0$, $s_0 = r'$, für $z \leq 0$, $s_0 = r$ ist. Für $z = 0$ ist aber $r' = r$, und $\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{e^{-i\varkappa s_0}}{s_0}\right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right)$. Es erfüllt also der Ausdruck (33) von W die Grenzbedingung (32). Oberhalb und unterhalb der Platte hat W, und daher auch $\mathfrak{E}_{1z}$ (vergl. (31)) entgegengesetzt gleichen Wert, wie es sein muß.

Formt man (34) durch partielle Integration um, so kommt

$$W = \pm i\mathfrak{m}\left[e^{-qu}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{e^{-i\varkappa s}}{s}\right)\right]_{u=0}^{\infty} \pm iq\mathfrak{m}\int_0^\infty du e^{-qu}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{e^{-i\varkappa s}}{s}\right)$$

$$= -\,\mathfrak{m}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-i\varkappa s_0}}{s_0}\right) \pm iq\mathfrak{m}\left[e^{-qu}\frac{e^{-i\varkappa s}}{s}\right]_{u=0}^{\infty} \pm iq^2\mathfrak{m}\int_0^\infty du e^{-qu}\frac{e^{-i\varkappa s}}{s},$$

also schließlich

$$W = -\,\mathfrak{m}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-i\varkappa s_0}}{s_0}\right) \mp iq\mathfrak{m}\frac{e^{-i\varkappa s_0}}{s_0} \pm iq^2\mathfrak{m}\int_0^\infty du e^{-qu}\frac{e^{-i\varkappa s}}{s} \quad . \quad . \quad . \quad (36).$$

Nun ist, wie ein Blick auf die Tabelle in **1.** lehrt, q sehr klein, nicht nur für Kupfer, sondern auch für Seewasser und für feuchte Erde, d. h. q^{-1} ist eine Länge, die groß ist gegen die Entfernung der Aufpunkte vom Dipole. Man kann daher das zweite und dritte Glied streichen und hat dann nach (24b)

$$W = -\,\mathfrak{m}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-i\varkappa r'}}{r'}\right) \text{ für } z \geq 0 \quad . \quad (36a), \qquad W = -\,\mathfrak{m}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) \text{ für } z \leq 0 \quad . \quad (36b),$$

wo r, r' die Entfernungen der Aufpunkte vom Dipole bezw. von seinem Spiegelbilde in bezug auf die Platte sind. Nach (30), (31) ist also

$$\mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}_{0z} + \mathfrak{E}_{1z} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\mathfrak{m}\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} - \mathfrak{m}\frac{e^{-i\varkappa r'}}{r'}\right) \text{ für } z \geq 0,$$

$$\mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}_{0z} + \mathfrak{E}_{1z} = 0 \text{ für } z \leq 0.$$

Es wird also das zur Plattenebene senkrechte elektrische Feld unten vollständig abgeschirmt; das gilt auch für schlechte Leiter. Oberhalb dagegen wirkt das sekundäre Feld wie ein spiegelbildlicher Dipol, dessen Moment dem primären entgegengesetzt gleich ist.

Da, für $z = \pm 0$, nach (24a)

$$\frac{\partial s_0}{\partial z} = \mp \frac{\partial r}{\partial z} = \pm \frac{h}{r},$$

so wird

$$W = \mp \mathfrak{m}\frac{h}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \text{(36c)},$$

mit $r = \sqrt{\varrho^2 + h^2}$, also nach (31)

$$\mathfrak{E}_{1z} = \mp \mathfrak{m} h \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right)\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(36d)}$$

für $z = \pm 0$. Dies ist in (11) einzusetzen, um die Dichte der Quellenverteilung in der Platte zu finden.

$$D = \frac{i\nu \mathfrak{m} h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right)\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(37)}.$$

Leitet man den wirbelfreien Teil j_d der Strömung aus einem skalaren Potential φ ab, so daß

$$j_d = -\operatorname{grad}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(37a)},$$

so ist

$$D = -\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) \quad \ldots\ldots \text{(37b)}.$$

Setzt man dies in (37) ein, so ergibt sich für φ die Poissonsche Differentialgleichung. Man nimmt einfacher

$$\varphi = \frac{i\nu \mathfrak{m} h}{2\pi}\frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(38)}$$

und bestimmt Ω als Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \text{(38a)}.$$

Das Integral muß in der ganzen Ebene endlich und stetig sein. Auch kann es, ebenso wie die rechte Seite, nur von ϱ abhängen. Es kommt

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho\frac{d\Omega}{d\varrho}\right) = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \text{(38b)}.$$

Wegen $r^2 = \varrho^2 + h^2$, $r\,dr = \varrho\,d\varrho$, wird

$$\varrho\frac{d\Omega}{d\varrho} = \frac{e^{-i\varkappa h}}{h} - \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(38c)}.$$

Da nun Ω eine Funktion von ϱ ist, so ergibt (38):

$$\varphi = \frac{i\nu \mathfrak{m} h}{2\pi}\frac{x}{\varrho}\frac{d\Omega}{d\varrho} = -\frac{i\nu \mathfrak{m} h}{2\pi}\frac{x}{\varrho^2}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} - \frac{e^{-i\varkappa h}}{h}\right) \quad \ldots\ldots \text{(39)}.$$

Sind, wie wir annehmen wollen, r und h klein gegen die Wellenlänge, also $\varkappa r = \frac{2\pi r}{\lambda} << 1$, und $\varkappa h << 1$, so wird das Potential der wirbelfreien Strömung

$$\varphi = -\frac{i\nu \mathfrak{m} h}{2\pi}\frac{x}{r^2 - h^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{h}\right),$$

oder

$$\varphi = \frac{i\nu \mathfrak{m}}{2\pi}\frac{x}{r(r+h)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(39a)}.$$

Der vom normalen elektrischen Felde herrührende, wirbelfreie Teil der Strömung in der Schicht ist durch (39a), (37a) bestimmt.

B) Magnetisches Feld und Wirbelverteilung.

Die Komponente $\mathfrak{H}_{1z}$ des sekundären magnetischen Feldes muß der Wellengleichung, und, an der Ebene $z = \pm 0$, der Grenzbedingung (13) genügen, wo nach (30) und (29) $\mathfrak{H}_{0z} = -i\varkappa \mathfrak{m} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right)$ ist

Wir setzen

$$\mathfrak{H}_{1z} = -i\varkappa \frac{\partial X_1}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40),$$

und schreiben vor, daß X_1' eine Lösung der Wellengleichung sein soll, die außerhalb der Schicht überall endlich und stetig ist und an der Schicht selbst der Bedingung genügt

$$\pm \frac{\partial X_1}{\partial z} - ipX_1 = ip\mathfrak{m} \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \text{ für } z = \pm 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41).$$

Dann sind für $\mathfrak{H}_{1z}$ die entsprechenden Bedingungen erfüllt.

Die Grenzbedingung (41) ist ähnlich gebaut, wie (21) bezw. (32), nur daß rechts statt der Ableitungen nach z die Wellenfunktion selbst steht. Wir genügen ihr durch folgende Lösung der Wellengleichung

$$X_1 = -p\mathfrak{m}\int_0^\infty du e^{-pu} \frac{e^{-i\varkappa s}}{s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42).$$

In der Tat ist gemäß (25a)

$$\pm \frac{\partial X_1}{\partial z} = -ip\mathfrak{m}\int_0^\infty du e^{-pu} \frac{e^{-i\varkappa s}}{s}$$

$$= -ip\mathfrak{m}\left[e^{-pu}\frac{e^{-i\varkappa s}}{s}\right]_{u=0}^{\infty} - ip^2\mathfrak{m}\int_0^\infty du e^{-pu}\frac{e^{-i\varkappa s}}{s},$$

also

$$\pm \frac{\partial X_1}{\partial z} - ipX_1 = ip\mathfrak{m}\frac{e^{-i\varkappa s_0}}{s_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42a).$$

Da nun (vergl. 24a), für $z = \pm 0$, $s_0 = r$ wird, so ist die Grenzbedingung (41) erfüllt. X_1 und daher auch $\mathfrak{H}_{1z}$ sind gerade Funktionen von z, ihre Ableitungen nach z dagegen ungerade. Das zur Schicht normale Gesamtfeld ist

$$\mathfrak{H}_z = \mathfrak{H}_{0z} + \mathfrak{H}_{1z} = -i\varkappa \frac{\partial}{\partial y}(X_0 + X_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43),$$

mit

$$X_0 + X_1 = \mathfrak{m}\left\{\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} - p\int_0^\infty du e^{-pu}\frac{e^{-i\varkappa s}}{s}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (43a).$$

Wie die Tabelle in **1.** zeigt, ist die Konstante p wesentlich größer als q; bei Metallen ist p^{-1} eine Länge von der Größenordnung weniger Zentimeter. Hier kommt das zweite Glied (das sekundäre magnetische Feld) gegenüber dem ersten (dem primären magnetischen Felde) sehr wohl in Betracht. Ist r, der Abstand vom Dipole, größer als p^{-1}, so wird eine Reihenentwicklung nach absteigenden Potenzen von (rp) angezeigt sein (vergl. **5.**). Wir wollen jetzt aber schlechte Leiter ins Auge fassen, und Entfernungen vom Dipole, die erheblich kleiner sind, als die in der sechsten Spalte der Tabelle aufgeführten Längen p^{-1}. Dann steht das sekundäre magnetische Feld $\mathfrak{H}_{1z}$ zum primären $\mathfrak{H}_{0z}$ in einem Verhältnis von der Ordnung (pr). Die von $\mathfrak{H}_{0z}$ herrührende wirbelnde Strömung in der Schicht verhält sich aber, wie wir sogleich sehen werden, selbst zu der unter (A) ermittelten wirbelfreien Strömung wie $r : p^{-1} = (pr)$. Wir begehen also nur einen relativen Fehler von der Ordnung $(pr)^2$, wenn wir bei der Berechnuug von j das zweite Glied in (43a) streichen, und statt des aus (14), (43) folgenden genauen Wertes der Wirbeldichte

$$C = -\frac{p\nu}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}(X_0 + X_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

setzen

$$C = -\frac{p\nu\mathfrak{m}}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45),$$

Dabei ist dann allerdings die induzierende Wirkung der sekundären Ströme in der Schicht unberücksichtigt geblieben, und nur die des primären Stromstückes in Rechnung gestellt [1]).

Den jetzt zu ermittelnden quellenfreien Stromanteil j_c leiten wir aus der Stromfunktion ψ ab:

$$j_{cx} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad j_{cy} = +\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots (46).$$

Dann wird die Wirbeldichte (vergl. 10)

$$C = \frac{\partial j_{cy}}{\partial x} - \frac{\partial j_{cx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad \ldots\ldots\ldots (46\,a),$$

und es ergibt sich aus (45) für die Stromfunktion die Poissonsche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{p \nu \mathfrak{m}}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (46\,b).$$

Wir setzen

$$\psi = \frac{p \nu \mathfrak{m}}{2\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots (47),$$

wo dann Ψ eine überall endliche und stetige Lösung der Differentialgleichung sein muß,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \quad \ldots\ldots\ldots (47\,a),$$

mit $r = \sqrt{\varrho^2 + h^2}$; hier ist die rechte Seite nur von ϱ abhängig. Auch Ψ wird daher als Funktion von ϱ anzusetzen sein, so daß

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho}\left(\varrho \frac{d\Psi}{d\varrho}\right) = -\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \quad \ldots\ldots\ldots (47\,b).$$

Da $\varrho\, d\varrho = r\, dr$, hat man

$$\varrho \frac{d\Psi}{d\varrho} = -\int_h^r dr\, e^{-i\varkappa r} = \frac{1}{i\varkappa}\left\{e^{-i\varkappa r} - e^{-i\varkappa h}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (47\,c).$$

Wir setzen wiederum $\varkappa r = \frac{2\pi r}{\lambda} << 1$, $\varkappa h = \frac{2\pi h}{\lambda} << 1$, und erhalten

$$\varrho \frac{d\Psi}{d\varrho} = -(r - h) \quad \ldots\ldots\ldots (47\,d).$$

Nun folgt aus (47) die gesuchte Stromfunktion

$$\psi = \frac{p \nu \mathfrak{m}}{2\pi} \frac{y}{\varrho} \frac{d\Psi}{d\varrho} = -\frac{p \nu \mathfrak{m}}{2\pi} \frac{y(r-h)}{\varrho^2},$$

also

$$\psi = -\frac{p \nu \mathfrak{m}}{2\pi} \frac{y}{r+h} \quad \ldots\ldots\ldots (48).$$

Nachdem wir somit in (37a), (39a) die von den Quellen herrührende Strömung j_d, in (46), (48) die von den Wirbeln erzeugte Strömung j_c dargestellt haben, erhalten wir als Dichte des Gesamtstromes in der Schicht

$$j = j_d + j_c \quad \ldots\ldots\ldots (49),$$

mit

$$j_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad j_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots (49\,a).$$

Setzen wir $i \nu \mathfrak{m} = T \delta l$, wo T die Stärke, δl die Länge des primären Stromstückes sind, so hat man

$$\varphi = \frac{T \delta l}{2\pi} \frac{x}{r(r+h)} \quad \ldots\ldots\ldots (49\,b)$$

für das Potential des wirbelfreien Teiles,

$$\psi = ip \frac{T \delta l}{2\pi} \frac{y}{r+h} \quad \ldots\ldots\ldots (49\,c)$$

für die Stromfunktion des quellenfreien Teiles der Strömung.

---

[1]) Auf Grund der in 5. abgeleiteten Formel (63a) könnten wir (43a) mit Einschluß von Gliedern der Ordnung (pr), also die Stromverteilung bis auf Glieder der Ordnung $(pr)^2$ finden.

Die Phase des Potentiales stimmt mit derjenigen des Primärstromes überein, während diejenige der Stromfunktion ihm um $\frac{\pi}{2}$ voran ist. Die Amplituden von ψ und φ verhalten sich im allgemeinen wie $r : p^{-1}$. In Entfernungen vom primären Dipol, die klein gegen die in der Tabelle angeführte Länge p^{-1} sind, kommt die quellenfreie Strömung gegen die wirbelfreie wenig in Betracht. Sie wird erst dann von Belang, wenn (rp) nicht mehr zu vernachlässigen ist; allerdings stellt dann, wie wir oben gesehen haben, der Ausdruck (49c) für ψ nur eine Näherung dar, wobei der relative Fehler von der Ordnung $(rp)^2$ ist.

Wir wollen die Strömung genauer für den Sonderfall $h = 0$ erörtern.

4. Stromstück in der Schicht. Das im vorigen Paragraphen betrachtete, der leitenden Schicht parallele Stromstück rücke jetzt nahe an die Schicht heran. Man stelle sich etwa vor, daß es in zwei Platten mündet, die der Schicht parallel sind, und von ihr nur wenig entfernt; sie bilden dann die Belegungen zweier Kondensatoren, deren andere Belegungen auf der Schicht ihren Sitz haben. Ein zur Schicht senkrechtes elektrisches Feld besteht dann lediglich innerhalb dieser Kondensatoren. Hier allein hat also die Strömung in der Schicht ihre Quellen und Senken. Der wirbelfreie Teil der Strömung stellt sich demnach als herrührend von einer Doppelquelle dar, während der quellenfreie Teil nach wie vor durch Induktion des magnetischen Feldes des primären Stromstückes entsteht. Man kann nun auch verschiedene Stromstücke geradlinig aneinander reihen; so gelangt man zu einem Draht von endlicher Länge, der in zwei der leitenden Schicht gegenüberstehende Kondensatorbelegungen mündet. In der Schicht hat man dann einen Quellpunkt und einen Senkpunkt, in endlichem Abstand voneinander; der wirbelfreie Teil des Feldes zeigt das entsprechende Strombild.

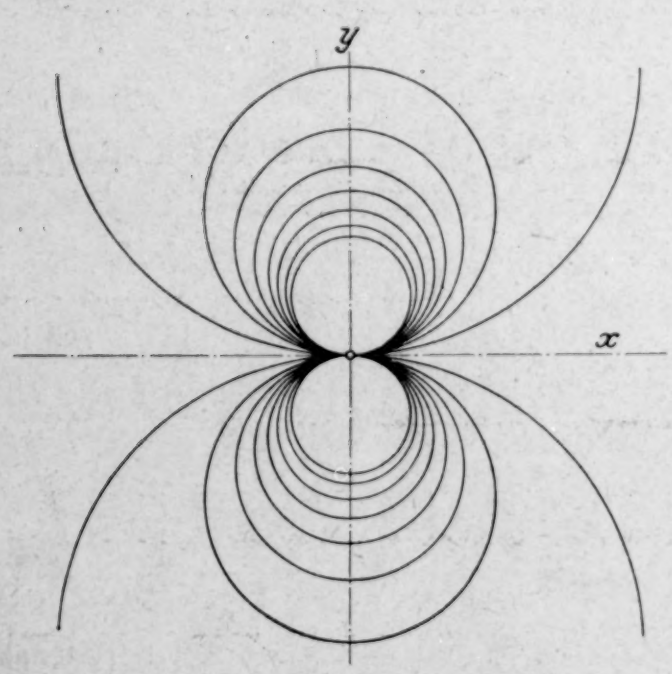


Abb. 1.
Die Stromlinien eines zur x-Achse parallelen Quellenpaares.

Man kann nun aber auch den Draht (isoliert) in die Schicht einbetten; die beiden Elektroden, in die er mündet, bilden dann Quellpunkt und Senkpunkt der Strömung in der Schicht; es fehlt hier nur der Luftspalt, und somit der Verschiebungsstrom, der vorhin den Strom im Drahte und den in der Schicht schloß. Indessen für die Strömung in der Schicht selbst ist das ohne Belang. Ihr wirbelfreier Teil bleibt auch hier derjenige eines Quellenpaares von unendlich kleinem oder endlichem Abstande, während die Wirbel durch die Schwankungen des nach dem Biot-Savartschen Gesetze bestimmten Magnetfeldes des Primärstromes bestimmt sind.

Zu den entsprechenden mathematischen Ausdrücken gelangt man, indem man in den Formeln des vorigen Paragraphen $h = 0$, mithin $r = \varrho$ setzt. (49b) ergibt

$$\varphi = \frac{T\delta l}{2\pi}\frac{x}{\varrho^2}$$

als Potential des wirbelfreien Teiles der Strömung:

$$j_d = -\operatorname{grad}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50\,\mathrm{a}).$$

Dieses Potential ist nun in der Tat dasjenige eines zur x-Achse parallelen Quellenpaares in 0 vom Momente $T\delta l$. Die Niveaulinien $\varphi = \text{konst}$ sind durch 0 gehende Kreise, die ihren Mittelpunkt auf der x-Achse haben. Die zu ihnen orthogonalen Stromlinien sind Kreise, welche in 0 die x-Achse berühren. (Vergl. Abb. 1.) Da mit Ausschluß von 0 die Strömung quellenfrei ist, kann sie auch aus einer (zu φ konjugierten) Stromfunktion abgeleitet werden:

$$\psi_d = -\frac{T\delta l}{2\pi}\frac{y}{\varrho^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50\,\mathrm{b}).$$

$\psi_d = \text{konst}$ gibt dann die Stromlinien des wirbelfreien Teiles j_d der Strömung.

Hierzu kommt noch der quellenfreie Teil j_c der Strömung, dessen Stromfunktion (jetzt mit ψ_c bezeichnet) durch (49c) gegeben ist. Mit $h=0$, $r=\varrho$ wird

$$\psi_c = ip\frac{T\delta l}{2\pi}\frac{y}{\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50\,c).$$

Die Gleichung der Stromlinien der Strömung j_c ist $y=k\varrho$. Die Stromlinien bestehen somit aus zwei geraden Stücken, die in 0 endigen bezw. anfangen, und deren Winkel durch die y-Achse halbiert wird. Das ist die Strömung, welche der Induktion durch das Magnetfeld eines kleinen Stromstückes ihren Ursprung verdankt. Dieser Stromteil j_c ist vor j_a um $\frac{\pi}{2}$ an Phase voran, da er ja der Ableitung des Primärstromes T nach der Zeit, jener aber T selbst proportional ist. Der Phasenvorsprung wird in (50c) durch den Faktor i zum Ausdruck gebracht. Um zu reellen Größen zu gelangen, muß man, nach Beifügung des Zeitfaktors e^{ivt}

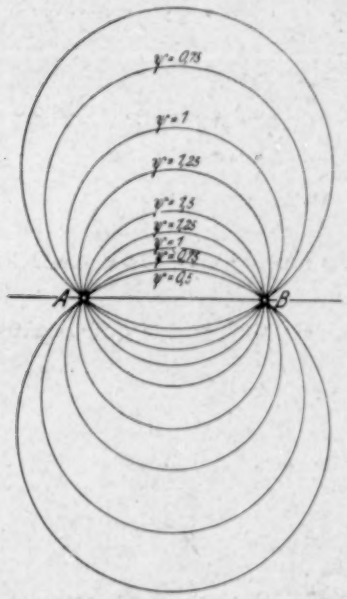


Abb. 2.

Die Stromlinien einer Elektrode AB von endlicher Länge. Wirbelfreier Teil der Strömung.

[cos $(vt)=1$, sin $(vt)=0$].

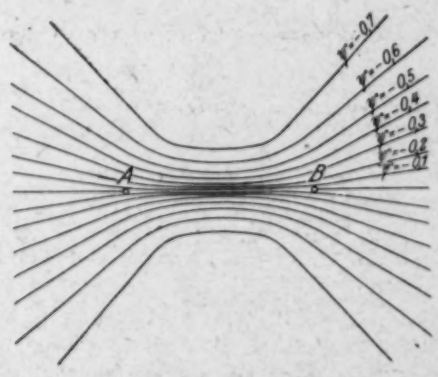


Abb. 3.

Die Stromlinien einer Elektrode AB von endlicher Länge. Quellenfreier Teil der Strömung.

[cos $(vt)=0$, sin $(vt)=1$].

in (50b, c) rechts die reellen Teile nehmen. Dann erhält man als Stromfunktion der Gesamtströmung in der Schicht

$$\psi = -\frac{T\delta l}{2\pi}\left\{\frac{y}{\varrho^2}\cos(vt) + \frac{py}{\varrho}\sin(vt)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51).$$

Hiernach kann man für jeden Zeitpunkt die Stromlinien finden. Das zweite Glied kommt um so mehr in Betracht, je größer $p\varrho$ ist. Doch muß, damit die Genauigkeit ausreicht, ϱ wesentlich kleiner sein, als der in Spalte sechs der Tabelle in **5.** aufgeführte Wert von p^{-1}; sonst kommen die vernachlässigten höheren Potenzen von $p\varrho$ in Betracht, welche der Induktion durch das Magnetfeld der Strömung in der Schicht selbst ihren Ursprung verdanken.

Wir betrachten jetzt einen Draht von endlicher Länge $2a$, der in die x-Achse fällt, und vom Ursprung 0 halbiert wird. Es ist zu setzen

$$\varrho = \sqrt{(x-\xi)^2+y^2}, \qquad \delta l = d\xi, \qquad -a \leq \xi \leq +a,$$

und von $-a$ bis $+a$ zu integrieren. Dann erhält man aus (50b) durch Summation der Beiträge der einzelnen Stromstücke die Stromfunktion des wirbelfreien Teiles der Strömung

$$\psi_a = -\frac{Ty}{2\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}.$$

Setzt man hier

$$\operatorname{cotg}\vartheta = \frac{x-\xi}{y}, \qquad d\xi = \frac{y\,d\vartheta}{\sin^2\vartheta},$$

so kommt

$$\psi_a = -\frac{T}{2\pi}\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} d\vartheta = -\frac{T}{2\pi}(\vartheta_1-\vartheta_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52).$$

Dabei sind ϑ_2, ϑ_1 die Winkel, welche die vom Anfang ($\xi = -a$) und vom Ende ($\xi = +a$) des Drahtes nach dem Aufpunkte gezogenen Fahrstrahlen mit der x-Achse einschließen; mithin gilt

$$\operatorname{cotg}\vartheta_1 = \frac{x-a}{y}, \quad \operatorname{cotg}\vartheta_2 = \frac{x+a}{y} \quad \ldots\ldots\ldots (52\,\mathrm{a}).$$

Die Stromlinien: $\vartheta_1 - \vartheta_2 = k$ sind Kreise, welche durch die Endpunkte des Drahtes, d. h. die Elektroden, gehen. Das ist in der Tat die wirbelfreie Strömung eines Quellpunktes und eines Senkpunktes von gleicher Ergiebigkeit.

Ebenso erhält man durch Zusammenfügung der Beiträge der einzelnen Stromstücke nach (50c) als Stromfunktion des quellenfreien Teiles der Strömung

$$\psi_c = \frac{ipTy}{2\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}} = \frac{ipTy}{2\pi}\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta},$$

also

$$\psi_c = \frac{ipT}{2\pi}y\left\{\log\operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta_1}{2}\right) - \log\operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta_2}{2}\right)\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (52\,\mathrm{b}),$$

wobei nach (52a) ist

$$y = \frac{2a}{\operatorname{cotg}\vartheta_2 - \operatorname{cotg}\vartheta_2} \quad \ldots\ldots\ldots (52\,\mathrm{c}).$$

Durch Beifügung des Zeitfaktors $e^{i\nu t}$ und Bildung der reellen Teile ergibt sich die Stromfunktion der gesamten Strömung in der Schicht

$$\psi = -\frac{T}{2\pi}\left\{(\vartheta_1 - \vartheta_2)\cos(\nu t) + p\,y\,\log\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\vartheta_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\vartheta_2}{2}}\right)\sin(\nu t)\right\} \quad \ldots (53).$$

Sie entspricht dem Falle eines geradlinigen vom Primärstrome der Frequenz ν durchflossenen Drahtes von endlicher Länge, dessen Endpunkte als Elektroden für den Sekundärstrom in der Schicht anzusehen sind. Für jeden Zeitpunkt t kann man nach (53) die Stromlinien $\psi = \text{konst}$ in der Schicht finden, jedoch mit Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung $(p\varrho)^2$. (Vergl. Abb. 2 und 3.)

5. Vertikaler magnetischer Dipol. Ein Draht sei Nmal um das ebene Flächenstück F herumgewunden; in der so entstandenen Spule fließe der Strom T (elektrostatisch gemessen). Das magnetische Feld der Spule in Entfernungen, die groß gegen ihre Abmessungen sind, ist dem eines magnetischen Dipols gleichwertig, vom Momente

$$\mathfrak{m} = \frac{NFT}{c} \quad \ldots\ldots\ldots (54);$$

die Richtung des Momentenvektors fällt in die Spulenachse. Ist T ein Wechselstrom, so wechselt der gleichwertige magnetische Dipol periodisch sein Moment und erregt ein elektromagnetisches Feld, welches man, entsprechend wie dasjenige des elektrischen Dipols, aus einem Hertzschen Vektor (vergl. 17, 17b) ableitet; nur ist $\mathfrak{H}$ an Stelle von $\mathfrak{E}$, $-\mathfrak{E}$ an Stelle von $\mathfrak{H}$ zu setzen:

$$\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{m}\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \quad \ldots\ldots\ldots (54\,\mathrm{a}),$$

$$\mathfrak{H}_0 = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{Z}_0 + \varkappa^2\mathfrak{Z}_0, \qquad \mathfrak{E}_0 = -i\varkappa\operatorname{rot}\mathfrak{Z}_0 \quad \ldots\ldots (54\,\mathrm{b}).$$

Hierdurch ist das primäre Feld gegeben.

Steht die Spulenachse senkrecht zur leitenden Platte (oder Schicht), ist also der magnetische Dipol vertikal (parallel zur z-Achse) gestellt, so hat man, ähnlich wie in **2** (18), (18a), die Hertzsche Funktion

$$Z_0 = \mathfrak{m}\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \quad \ldots\ldots\ldots (55),$$

aus der sich die primären Feldkomponenten folgendermaßen ableiten:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H}_{0x} &= \frac{\partial^2 Z_0}{\partial x\,\partial z}, \quad \mathfrak{H}_{0y} = \frac{\partial^2 Z_0}{\partial y\,\partial z}, \quad \mathfrak{H}_{0z} = \frac{\partial^2 Z_0}{\partial z^2} + \varkappa^2 Z_0 \\ \mathfrak{E}_{0x} &= -i\varkappa\frac{\partial Z_0}{\partial y}, \quad \mathfrak{E}_{0y} = +i\varkappa\frac{\partial Z_0}{\partial x}, \quad \mathfrak{E}_{0z} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (55\,\mathrm{a})$$

Die elektrischen Kraftlinien sind Kreise um die Spulenachse (z-Achse); da die vertikale Komponente von $\mathfrak{E}_0$ gleich null ist, so wird (12) durch $\mathfrak{E}_{1z} = 0$ erfüllt. Es folgt somit aus (11)

$$D = 0,$$

d. h. die Strömung in der Platte (Schicht) ist durchweg quellenfrei.

Die Wirbeldichte C in der Platte bestimmt sich durch die vertikalen magnetischen Komponenten. Wir schreiben, ähnlich wie in **2** auch dem sekundären Felde eine Hertzsche Funktion Z_1 zu, aus welcher sich die sekundären Feldkomponenten ebenso ableiten, wie die primären nach (55a) aus Z_0. Die Bedingungen (8) lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} -i\varkappa\frac{\partial}{\partial y}(Z_0+Z_1) &= \mp\,\alpha\frac{\partial^2 Z_1}{\partial y\,\partial z}\\ +i\varkappa\frac{\partial}{\partial x}(Z_0+Z_1) &= \pm\,\alpha\frac{\partial^2 Z_1}{\partial x\,\partial z}\end{aligned}\right\} \text{ für } z = \pm 0 \text{ und beliebige } x, y.$$

Dieselben lassen sich vereinigen in

$$\pm\frac{\partial Z_1}{\partial z} - ip Z_1 = ip Z_0 = ip\,\mathfrak{m}\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

für $z = \pm 0$.

Diese Grenzbedingung stimmt ganz mit (41) überein. Die ihr entsprechende Lösung (42) der Wellengleichung ist

$$Z_1 = -\,p\,\mathfrak{m}\int_0^\infty du\, e^{-pu}\frac{e^{-i\varkappa s}}{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57).$$

Die vertikale Komponente des magnetischen Gesamtfeldes ist nach (55a)

$$\mathfrak{H}_z = \mathfrak{H}_{0z} + \mathfrak{H}_{1z} = \frac{\partial^2(Z_0+Z_1)}{\partial z^2} + \varkappa^2(Z_0+Z_1);$$

da nun Z_0 und Z_1 beide der Wellengleichung genügen, kann man auch schreiben:

$$\mathfrak{H}_z = \mathfrak{H}_{0z} + \mathfrak{H}_{1z} = -\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Z_0+Z_1) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(Z_0+Z_1)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58).$$

Die quellenfreie Strömung leitet sich aus einer Stromfunktion ψ ab:

$$j_x = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad j_y = +\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59).$$

Die Wirbeldichte ist nach (10)

$$C = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59\,\mathrm{a}).$$

Setzt man nun (59a) und (58) in (14) ein, so wird

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{ipc}{2\pi}\left\{\frac{\partial^2(Z_0+Z_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(Z_0+Z_1)}{\partial y^2}\right\}.$$

Hieraus erhält man die Stromfunktion

$$\psi = \frac{ipc}{2\pi}(Z_0+Z_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60),$$

also nach (55), (57):

$$\psi = \frac{ipc\,\mathfrak{m}}{2\pi}\left\{\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} - p\int_0^\infty d\,u\,e^{-pu}\,\frac{e^{-i\varkappa s}}{s}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60\,\mathrm{a}),$$

mit

$$r = \sqrt{\varrho^2+h^2}, \quad s = \sqrt{\varrho^2+(h-iu)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60\,\mathrm{b}),$$

wegen $z = 0$ Da ψ nur von ϱ abhängt, ist die radiale Stromkomponente j_ϱ gleich null; die Stromlinien sind Kreise um den Ursprung 0; die Stromkomponente senkrecht zu den von 0 aus gezogenen Fahrstrahlen ist

$$j_\vartheta = \frac{d\psi}{d\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61).$$

Bei der Behandlung des Integrales in (60a), welches die Einwirkung des sekundären magnetischen Feldes ausdrückt, hat man in verschiedener Weise vorzugehen, je nachdem es sich um gute oder schlechte Leiter handelt. Wie die Tabelle in **1.** zeigt, ist z. B. für Kupfer p^{-1} gleich 2,5 cm. Sind die sonst in Betracht kommenden Längen h oder ϱ größer, ist etwa $h \approx 1$ m, so wird eine Reihenentwicklung nach absteigenden Potenzen von p am Platze sein.

Zu einer solchen gelangt man durch partielle Integration:

$$p\int_0^\infty du\, e^{-pu}\frac{e^{-i\varkappa s}}{s} = \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} + \int_0^\infty du\, e^{-pu}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{e^{-i\varkappa s}}{s}\right)$$

$$= \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} + \frac{1}{p}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{e^{-i\varkappa s}}{s}\right)\right\}_{u=0} + \frac{1}{p^2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{e^{-i\varkappa s}}{s}\right)\right\}_{u=0} + \ldots$$

Da nun u in s nur in der Verbindung $(h - iu)$ auftritt, und für $u = 0$, $s = r$ wird, so kann man schreiben:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)_{u=0} = -i\left(\frac{\partial s}{\partial h}\right)_{u=0} = -i\frac{\partial r}{\partial h} \text{ usf.}$$

Es wird also aus (60a):

$$\psi = -\frac{ic\mathfrak{m}}{2\pi}p\left\{\frac{-i}{p}\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) + \left(\frac{-i}{p}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial h^2}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) + \ldots + \left(\frac{-i}{p}\right)^n\frac{\partial^n}{\partial h^n}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) + \ldots\right\} \quad (62).$$

Die Entwicklung beginnt mit dem von p unabhängigen Gliede

$$\psi = -\frac{c\mathfrak{m}}{2\pi}\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) \quad (62\,a).$$

Es stellt die Stromfunktion für $p = \infty$, d. h. für vollkommene Leiter dar, und ließe sich auch durch das Spiegelungsverfahren ableiten. Der entsprechende Wert von $(Z_0 + Z_1)$ in der Platte und unter ihr ist nach (60) gleich null; d. h. die Platte schirmt das Feld ganz ab, wenn $p = \infty$ ist. Die von der Platte herrührende Schwächung des magnetischen Spulenfeldes ist unterhalb der Spule von der Ordnung $3\,(ph)^{-1}$. Ein ähnliches Ergebnis erhält Levi-Civita in dem von ihm behandelten Falle.

Ist $\varkappa r = \frac{2\pi r}{\lambda} << 1$, so hat man

$$\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{h}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) = \frac{\partial^2}{\partial h^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3h^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial h^3}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) = \frac{\partial^3}{\partial h^3}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{9h}{r^5} - \frac{15h^3}{r^7},$$

und (62) liefert

$$\psi = \frac{c\mathfrak{m}}{2\pi}\left\{\frac{h}{r^3} - \frac{i}{p}\frac{r^2 - 3h^2}{r^5} + \frac{1}{p^2}\frac{9hr^2 - 15h^3}{r^7} + \ldots\right\} \quad (62\,b).$$

Ist r erheblich größer als die Länge p^{-1}, so konvergiert die Entwicklung sehr rasch. Durch (62b) und (61) ist dann die Stromdichte mit genügender Annäherung dargestellt.

Bei schlechten Leitern dagegen, wie feuchter Erde oder Seewasser, wo p^{-1} gleich 2,5 km bezw. 250 m ist, wird man, wenigstens bei Entfernungen r, die kleiner als diese Längen sind, (60a) nach aufsteigenden Potenzen von p ordnen, indem man im umgekehrten Sinne wie oben partiell integriert. Setzen wir $\varkappa = 0$, weil alle Längen klein gegen die Wellenlänge sind, so wird

$$\psi = \frac{ipc\mathfrak{m}}{2\pi}\left\{\frac{1}{r} - p\int_0^\infty du\,\frac{e^{-pu}}{s}\right\} \quad (63).$$

Es sei

$$f(u) = \int_0^u \frac{du}{s} = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{\varrho^2 + (h - iu)^2}} = i\log(h - iu + s);$$

dann wird:

$$\int_0^\infty du\,\frac{e^{-pu}}{s} = [e^{-pu}f(u)]_{u=0}^\infty + p\int_0^\infty du\, e^{-pu}f(u) = -i\log(h + r) + [p] \quad (63\,a),$$

und (63) ergibt, mit einem relativen Fehler von der Ordnung $(pr)^2$

$$\psi = \frac{ipc\mathfrak{m}}{2\pi}\frac{1}{r} - \frac{p^2c\mathfrak{m}}{2\pi}\log(r + h) \quad (63\,b).$$

Es folgt aus (61) die Stromdichte

$$j_\vartheta = \frac{d\psi}{d\varrho} = -\frac{ipc\mathfrak{m}}{2\pi}\frac{\varrho}{r^3} - \frac{p^2 c\mathfrak{m}}{2\pi}\frac{\varrho}{r(r+h)} \quad \ldots\ldots\ldots (63\,c).$$

Dabei ist $\mathfrak{m}$ durch (54) gegeben. Der erste Term in (63c) rührt vom magnetischen Felde der primären Spule her und ist hinter dem Spulenstrome um $\frac{\pi}{2}$ an Phase zurück. Das zweite Glied berücksichtigt näherungsweise das magnetische Feld der sekundären Strömung in der Schicht, und ist wiederum hinter dem ersten Gliede um $\frac{\pi}{2}$ an Phase zurück.

6. Horizontaler magnetischer Dipol. Die vom primären Wechselstrom durchflossene Spule sei jetzt horizontal gestellt, so daß der sie darstellende magnetische Dipol ein der x-Achse paralleles Moment hat. Dann ist, wie in **3.** Gl. (29), (30), die Hertzsche Funktion des primären Feldes

$$X_0 = \mathfrak{m}\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \quad \ldots\ldots\ldots (64),$$

und die Feldkomponenten parallel der z-Achse (der Vertikalen):

$$\mathfrak{H}_{0z} = \frac{\partial^2 X_0}{\partial x\,\partial z}, \quad \mathfrak{E}_{0z} = i\varkappa\frac{\partial X_0}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots (64a).$$

Erstere Komponente bestimmt die Quellen-, letztere die Wirbel-Verteilung in der Platte (Schicht).

A) Elektrisches Feld und Quellenverteilung.

Man genügt der Grenzbedingung (12), indem man setzt

$$\mathfrak{E}_{1z} = i\varkappa\frac{\partial X_1}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots (65),$$

und

$$\frac{\partial X_1}{\partial z} \mp i q X_1 = -\frac{\partial X_0}{\partial z} = -\mathfrak{m}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) \quad \ldots\ldots (65a)$$

für $z = \pm 0$.

Diese mit (21) übereinstimmende Bedingung wird erfüllt durch folgende Lösung der Wellengleichung (vergl. (25))

$$X_1 = i\,\mathfrak{m}\int_0^\infty d\,u\,e^{-q\,u}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-i\varkappa s}}{s}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (65b).$$

Dieselbe läßt sich auch schreiben (vergl. (26))

$$X_1 = \pm\,\mathfrak{m}\frac{e^{-i\varkappa s_0}}{s_0} \mp \mathfrak{m}\,q\int_0^\infty d\,u\,e^{-q\,u}\frac{e^{-i\varkappa s}}{s} \quad \ldots\ldots (65\,c).$$

Wie in **2.** gezeigt wurde, ist selbst bei schlechten Leitern q meist so klein, daß das zweite Glied gestrichen werden kann. Das sekundäre elektrische Feld oberhalb der Platte entspricht dann dem durch Spiegelung an einer vollkommen leitenden Platte zu erhaltenden, während unterhalb der Platte das elektrische Gesamtfeld gleich null ist.

Ist j_d der wirbelfreie Teil der Strömung in der Schicht, φ sein Potential, also

$$j_d = -\,\mathrm{grad}\;\varphi \quad \ldots\ldots\ldots (66),$$

so wird, nach (9)

$$D = -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (66a),$$

und es folgt aus (11) und (65)

$$D = \mp\frac{i\nu}{2\pi}\mathfrak{E}_{1z} = \mp\frac{\nu^2}{2\pi c}\frac{\partial X_1}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots (66b).$$

Setzt man nun

$$\varphi = \frac{\nu^2\mathfrak{m}}{2\pi c}\frac{\partial\Psi}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots (67),$$

so hat Ψ der Poissonschen Gleichung zu genügen

$$-\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right) = \pm\frac{1}{\mathfrak{m}}X_1 \quad \ldots\ldots\ldots (67a),$$

wobei X_1 durch (65c) gegeben ist. Wird hier, wegen $z = 0$, $s_0 = r$ gesetzt, und das zweite Glied (weil $r << q^{-1}$) gestrichen, so kommt

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = -\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \quad \ldots\ldots\ldots (67b),$$

eine Differentialgleichung, die mit (47a) übereinstimmt. Das von ϱ allein abhängige, für $\varrho = 0$ endliche Integral wird, wenn $\varkappa r << 1$, durch (47d) gegeben

$$\varrho \frac{d\Psi}{d\varrho} = -(r-h) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (67c);$$

aus (67) folgt

$$\varphi = \frac{\nu^2 \mathfrak{m}}{2\pi c} \frac{y}{\varrho} \frac{d\Psi}{d\varrho} = -\frac{\nu^2 \mathfrak{m}}{2\pi c} \frac{y(r-h)}{\varrho^2}$$

und, wegen $\varrho^2 = r^2 - h^2 = (r-h)(r+h)$, schließlich

$$\varphi = -\frac{\nu^2 \mathfrak{m}}{2\pi c} \frac{y}{r+h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

als Potential des wirbelfreien Teiles der Strömung.

Es ist — abgesehen von einem konstanten Faktor — genau so gebaut, wie die Stromfunktion (48) der quellenfreien Strömung im Falle des horizontalen elektrischen Dipols. Der magnetische Dipol erzeugt dort Quellen in der Platte, wo der elektrische Dipol Wirbel erzeugte.

B. Magnetisches Feld und Wirbelverteilung.

Führt man in die Grenzbedingung (13) den Ausdruck (64a) von $\mathfrak{H}_{0z}$ ein, so kann man sie ersetzen durch

$$\mathfrak{H}_{1z} = \frac{\partial V}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69),$$

und

$$\pm \frac{\partial V}{\partial z} - ip\,V = ip \frac{\partial X_0}{\partial z} = ip\,\mathfrak{m} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) \quad \ldots\ldots \quad (70)$$

für $z = \pm 0$.

Dieser Bedingung genügt folgende Lösung der Wellengleichung

$$V = \pm p\,\mathfrak{m} \int_0^\infty du\, e^{-pu} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-i\varkappa s}}{s}\right) \quad \ldots\ldots \quad (71).$$

Da, nach (25a), $\pm \frac{\partial s}{\partial z} = i \frac{\partial s}{\partial u}$, hat man auch

$$V = ip\,\mathfrak{m} \int_0^\infty du\, e^{-pu} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{e^{-i\varkappa s}}{s}\right) \quad \ldots\ldots \quad (71a),$$

und

$$\pm \frac{\partial V}{\partial z} = -p\,\mathfrak{m} \int_0^\infty du\, e^{-pu} \frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{e^{-i\varkappa s}}{s}\right);$$

durch partielle Integration folgt

$$\pm \frac{\partial V}{\partial z} = \mp ip\,\mathfrak{m} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-i\varkappa s_0}}{s_0}\right) + ip\,V.$$

Da nun, nach (24b),

$$\text{für } z \geq 0,\ s_0 = r',\ \frac{\partial s_0}{\partial z} = \frac{\partial r'}{\partial z}, \quad \text{für } z \leq 0,\ s_0 = r,\ \frac{\partial s_0}{\partial z} = \frac{\partial r'}{\partial z},$$

$$\text{und, für } z = \pm 0,\ s_0 = r,\ \frac{\partial s_0}{\partial z} = \mp \frac{\partial r}{\partial z},$$

so ist

$$\pm \frac{\partial V}{\partial z} - ip\,V = ip\,\mathfrak{m} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right)$$

für $z = \pm 0$; die Bedingung (70) ist also wirklich erfüllt.

Aus (71a) folgt durch partielle Integration

$$V = -ip\,\mathfrak{m} \frac{e^{-i\varkappa s_0}}{s_0} + ip^2\,\mathfrak{m} \int_0^\infty du\, e^{-pu} \frac{e^{-i\varkappa s}}{s} \quad \ldots\ldots \quad (71b),$$

setzt man hier $z = 0$, also $s_0 = r = \sqrt{\varrho^2 + h^2}$, $s = \sqrt{\varrho^2 + (h - iu)^2}$, so kommt

$$V = -ip\,\mathfrak{m} \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} + ip^2\,\mathfrak{m} \int_0^\infty du\, e^{-pu} \frac{e^{-i\varkappa s}}{s} \quad \ldots\ldots \quad (71c)$$

für $z = 0$.

Der quellenfreie Teil j_e der Strömung in der Platte (Schicht) leitet sich aus der Stromfunktion ψ ab:

$$j_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad j_y = +\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (72).$$

Die Wirbeldichte ist nach (10)

$$C = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (72a).$$

Andererseits folgt aus (14), (64a), (69)

$$C = -\frac{i p c}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X_0}{\partial z} + V\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (72b).$$

Ist nun

$$\psi = -\frac{i p c \mathfrak{m}}{2\pi} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (73),$$

und befriedigt Ω die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = \frac{1}{\mathfrak{m}}\left(\frac{\partial X_0}{\partial z} + V\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (73a),$$

so genügt die Stromfunktion ψ der aus (72a, b) abzuleitenden Poissonschen Differentialgleichung. Nach (64a), (71c) ist dabei

$$\frac{1}{\mathfrak{m}}\left(\frac{\partial X_0}{\partial z} + V\right) = -\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) - i p \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} + i p^2 \int_0^\infty d u\, e^{-p u} \frac{e^{-i\varkappa s}}{s} \quad (73b),$$

mit $r = \sqrt{\varrho^2 + h^2}$, $s = \sqrt{\varrho^2 + (h - i u)^2}$.

Man hat wiederum, wie in **5.**, gute und schlechte Leiter zu unterscheiden. Für erstere ist nach absteigenden, für letztere nach aufsteigenden Potenzen von $(p r)$ zu entwickeln.

Indem wir die rechte Seite von (60a) auf die Form (62) brachten, benutzten wir die nach absteigenden Potenzen von $p r$ fortschreitende Reihe:

$$K = -\frac{i}{p}\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) - \frac{1}{p^2}\frac{\partial^2}{\partial h^2}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) + \frac{i}{p^3}\frac{\partial^3}{\partial h^3}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) + \frac{1}{p^4}\frac{\partial^4}{\partial h^4}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) + \ldots \quad (74),$$

welche den Ausdruck

$$-\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} + p\int_0^\infty d u\, e^{-p u} \frac{e^{-i\varkappa s}}{s} = K \quad \ldots \ldots \quad (74a)$$

annähert. Setzen wir die rechte Seite von (73b)

$$-\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) - i p \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} + i p^2 \int_0^\infty d u\, e^{-p u} \frac{e^{-i\varkappa s}}{s} = L \quad \ldots \ldots \quad (74b),$$

so ist

$$L = +i p K - \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (74c),$$

also nach (74)

$$L = -\frac{i}{p}\frac{\partial^2}{\partial h^2}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) - \frac{1}{p^2}\frac{\partial^3}{\partial h^3}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) + \frac{i}{p^3}\frac{\partial^4}{\partial h^4}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) - \ldots \quad (74d).$$

Formt man, gemäß (73b), (74b), die rechte Seite von (73a) um, und berücksichtigt, daß Ω nur von ϱ abhängt, so folgt

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho \frac{d\Omega}{d\varrho}\right) = L \quad \ldots \ldots \ldots \quad (75),$$

während (73) liefert

$$\psi = -\frac{i p c \mathfrak{m}}{2\pi} \frac{x}{\varrho} \frac{d\Omega}{d\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (75a).$$

Es empfiehlt sich jedoch, zu setzen

$$\omega = i p \varrho \frac{d\Omega}{d\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (76),$$

und daher

$$\psi = -\frac{c \mathfrak{m}}{2\pi} \frac{x}{\varrho^2} \omega \quad \ldots \ldots \ldots \quad (76a).$$

Durch (76) geht (75) über in

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d\omega}{d\varrho} = i p L \quad \ldots \ldots \ldots \quad (76b),$$

wobei nach (74d)

$$i p L = \frac{\partial^2}{\partial h^2}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) - \frac{i}{p}\frac{\partial^3}{\partial h^3}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) - \frac{1}{p^2}\frac{\partial^4}{\partial h^4}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) + \ldots \quad (76c).$$

Die Integration von (76b) ergibt

$$\omega = \int_0^\varrho d\varrho\, \varrho\, i p L \quad \ldots \ldots \ldots \quad (77);$$

das ist diejenige Lösung, die für $\varrho = 0$ verschwindet, wie es (76) verlangt. Setzen wir hier rechts die Reihe (76c) ein, so ergibt sich für ω eine Reihe, die wir schreiben können

$$\omega = \omega_2 + \left(-\frac{i}{p}\right)\omega_3 + \left(-\frac{i}{p}\right)^2 \omega_4 + \ldots \left(-\frac{i}{p}\right)^n \omega_{n+2} \quad \ldots \quad (77a),$$

wobei

$$\omega_0 = \int_0^\varrho d\varrho\, \varrho\, \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \quad \ldots \quad (78),$$

$$\omega_1 = \frac{\partial \omega_0}{\partial h}, \quad \omega_2 = \frac{\partial \omega_2}{\partial h}, \quad \ldots \quad \omega_{n+1} = \frac{\partial \omega_n}{\partial h} \quad \ldots \quad (78a).$$

Wir nehmen an, daß $\varkappa r = \frac{2\pi r}{\lambda} << 1$, d. h. daß der Abstand vom Dipol und Aufpunkt klein gegen die Wellenlänge sei. Dann wird, weil $\varrho^2 = r^2 - h^2$, $\varrho\, d\varrho = r\, dr$, erhalten:

$$\omega_0 = \int_h^r dr = r - h \quad \ldots \quad (79),$$

$$\omega_1 = \frac{\partial \omega_0}{\partial h} = \frac{h}{r} - 1 = \frac{h - r}{r} \quad \ldots \quad (79a),$$

$$\omega_2 = \frac{\partial \omega_1}{\partial h} = \frac{1}{r} - \frac{h^2}{r^3} = \frac{\varrho^2}{r^3} \quad \ldots \quad (79b),$$

$$\omega_3 = \frac{\partial \omega_2}{\partial h} = -\frac{3\varrho^2 h}{r^5} \quad \ldots \quad (79c),$$

$$\omega_4 = \frac{\partial \omega_3}{\partial h} = -3\varrho^2 \frac{(r^2 - 5h^2)}{r^7} \text{ u. s. f.} \quad \ldots \quad (79d).$$

Nachdem so die ω_n rekurrierend berechnet sind, ergibt sich aus (76a) und (77a)

$$\psi = -\frac{c\mathfrak{m}}{2\pi}\frac{x}{\varrho^2}\left\{\omega_2 - \frac{i}{p}\omega_3 - \frac{1}{p^2}\omega_4 \ldots .\right\} \quad \ldots \quad (80),$$

also nach (79b, c, d)

$$\psi = -\frac{c\mathfrak{m}}{2\pi} x \left\{\frac{1}{r^3} + i\frac{3h}{p r^5} + \frac{3(r^2 - 5h^2)}{p^2 r^7} \ldots .\right\} \quad \ldots \quad (80a).$$

So bestimmt sich die Stromfunktion der quellenfreien Strömung für eine metallische Platte, wo $pr >> 1$. Das erste, von p unabhängige Glied entspricht dem Falle $p = \infty$, d. h. einer vollkommen leitenden Platte.

Nun wäre noch das in (68) erhaltene Potential φ der wirbelfreien Strömung zu berücksichtigen; es ist aber der Quotient von φ und ψ von der Ordnung

$$\frac{\nu^2 r^2}{c^2} = \varkappa^2 r^2 = \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2,$$

d. h. von der Ordnung hier vernachlässigter Glieder. Demnach stellt bei der hier gebrauchten Annäherung (80) bezw. (80a) die Stromfunktion der Gesamtströmung für gute Leiter dar.

Auch bei schlechten Leitern, wo (pr) meist klein ist, bleiben die allgemeinen Beziehungen (74b), (76a), (77) gültig. Man hat also

$$\psi = -\frac{c\mathfrak{m}}{2\pi}\frac{x}{\varrho^2}\omega, \quad \omega = \int_0^\varrho d\varrho\, \varrho\, i p L \quad \ldots \quad (81),$$

$$L = -\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) - ip\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} + ip^2\int_0^\infty du\, e^{-pu}\frac{e^{-i\varkappa s}}{s} \quad \ldots \quad (81a).$$

Nach (78), (78a) ist somit

$$\omega = ip\left\{-\omega_1 - ip\,\omega_0 + ip^2\int_0^\infty du\, e^{-pu}\,\omega_0'\right\} \quad \ldots \quad (82),$$

wo ω_0' aus ω_0 hervorgeht, indem s statt r, also $h - iu$ statt h gesetzt wird. In (79), (79a) ist nun erhalten worden, für $\varkappa r << 1$:

$$\omega_1 = -\frac{r - h}{r} = -\frac{\varrho^2}{r(r + h)} \quad \ldots \quad (82a), \qquad \omega_0 = r - h = \frac{\varrho^2}{r + h} \quad \ldots \quad (82b),$$

somit ist

$$\omega_0' = s - (h - iu) = \frac{\varrho^2}{s + (h - iu)} \quad \ldots \quad (82c).$$

Demnach ergibt (82)

$$\omega = i\,p\,\varrho^2 \left\{ \frac{1}{r\,(r+h)} - \frac{i\,p}{r+h} + i p^2 \int_0^\infty \frac{d\,u\,e^{-p\,u}}{s+h-i\,u} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

und aus (81) erhält man die Stromfunktion für schlechte Leiter

$$\psi = -\frac{i\,p\,c\,\mathfrak{m}}{2\,\pi} \left\{ \frac{x}{r\,(r+h)} - \frac{i\,p\,x}{r+h} + i\,p^2\,x \int_0^\infty \frac{d\,u\,e^{-p\,u}}{s+h-i\,u} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84).$$

Ist $(p\,r)$ hinreichend klein, so daß $p^2 r^2$ vernachlässigt werden kann, so stellen die beiden ersten Terme eine genügende Annäherung dar.

Noch wäre das unter **4**, A, (68) erhaltene Potential des wirbelfreien Teiles der Strömung zu berücksichtigen; doch ist der Quotient aus φ und dem zweiten Gliede von ψ von der Ordnung $\frac{\nu^2 p^2}{c^2} = \alpha^2$; aus der dritten Spalte der Tabelle in **1** ersieht man, daß für schlechte Leiter α^2 sehr klein ist. Es wird also durch (84) die gesamte Strömung in der schlecht leitenden Schicht mit ausreichender Genauigkeit dargestellt.

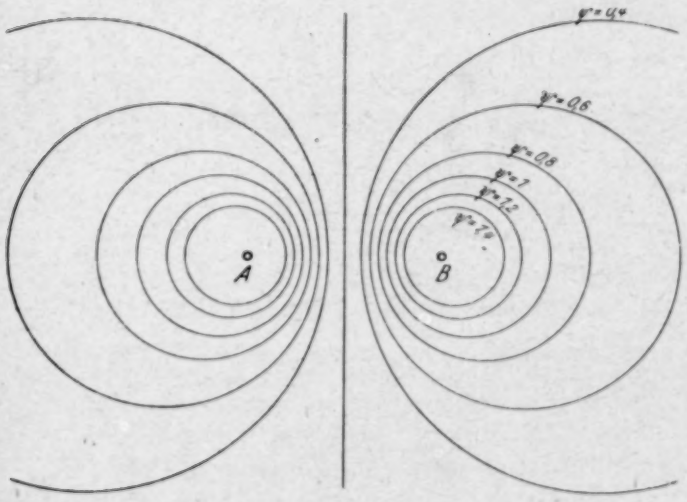


Abb. 4.

Die Stromlinien einer Spule von endlicher Länge. (A, B Spulenenden).

[sin $(\nu t) = 1$, cos $(\nu t) = 0$].

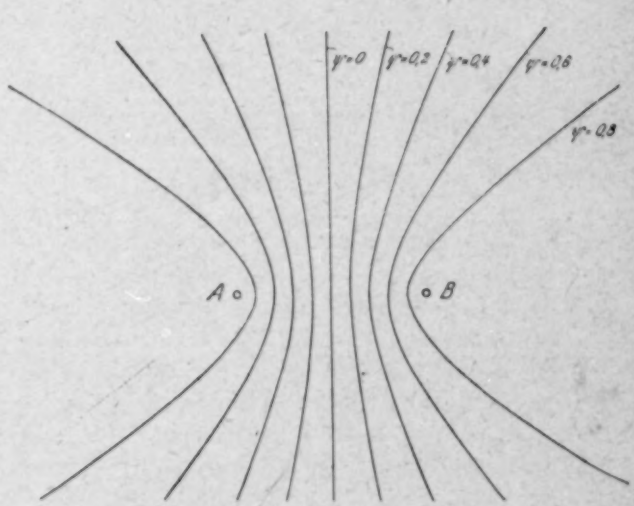


Abb. 5.

Die Stromlinien einer Spule von endlicher Länge. (A, B Spulenenden).

[sin $(\nu t) = 0$, cos $(\nu t) = 1$].

Vergleichen wir die vom horizontalen magnetischen Dipol erzeugte Strömung in der Schicht mit der vom horizontalen elektrischen Dipol erzeugten Strömung, die in **3** behandelt worden ist, indem wir den ersten beiden Gliedern in (84) die Ausdrücke (49b), (49c) für Potential und Stromfunktion gegenüberstellen. Das erste Glied von ψ hier stimmt bis auf einen konstanten Faktor mit φ dort überein; es entspricht also der Quellenverteilung dort eine Wirbelverteilung hier. Dazu kommt im zweiten Gliede hier noch eine Stromfunktion, die aus der Stromfunktion (49c) dort hervorgeht, indem man x statt y setzt; die entsprechenden Wirbelverteilungen, die dort dem magnetischen Felde des Stromstückes, hier demjenigen der Schichtströme selbst ihren Ursprung verdanken, gehen durch Drehung um einen rechten Winkel aus einander hervor.

Wir wollen schließlich noch den Sonderfall $h = 0$ genauer erörtern.

7. Spule in der Schicht. Wir denken uns die Spule ganz nahe an die ebene Platte oder Schicht herangerückt; auf dasselbe kommt es hinaus, wenn man die Spule isoliert in die Schicht hinein bettet. Man erhält die betreffenden Ausdrücke für die Stromfunktion, indem man in den obigen Formeln $h = 0$, mithin $r = \varrho$ setzt.

a) Spulenachse vertikal.

1. Gut leitende Platte, $p\,\varrho$ groß. Aus (62b) wird

$$\psi = -\frac{i\,c\,\mathfrak{m}}{2\,\pi}\,\frac{1}{p\,\varrho^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85),$$

mit einem relativen Fehler der Ordnung $(p\varrho)^{-2}$. Für vollkommene Leiter $(p = \infty)$ wird ψ gleich null, weil die magnetischen Felder der Spule und ihres Spiegelbildes sich aufheben.

2. Schlecht leitende Schicht, $p\varrho$ klein. (63 b) liefert

$$\psi = \frac{i p c \mathfrak{m}}{2\pi}\left\{\frac{1}{\varrho} + i p \log \varrho\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86),$$

mit einem relativen Fehler der Ordnung $(p\varrho)^2$.

b) Spulenachse horizontal (parallel der x-Achse).

1. Gut leitende Platte, $p\varrho$ groß. Aus (80 a) folgt

$$\psi = -\frac{c \mathfrak{m}}{2\pi}\left\{\frac{x}{\varrho^3} + \frac{3x}{p^2\varrho^5}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87),$$

mit einem relativen Fehler der Ordnung $(p\varrho)^{-4}$.

2. Schlecht leitende Schicht, $p\varrho$ klein. Aus (84) erhält man

$$\psi = -\frac{i p c \mathfrak{m}}{2\pi}\left\{\frac{x}{\varrho^2} - \frac{i p x}{\varrho}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88),$$

mit einem relativen Fehler der Ordnung $(p\varrho)^2$.

Selbstverständlich ist, um zu reellen Ausdrücken zu gelangen, der Leitfaktor e^{-ivt} beizufügen, und dann der reelle Teil zu nehmen. So ergibt (88)

$$\psi = \frac{p c \mathfrak{m}}{2\pi}\left\{\frac{x}{\varrho^2}\sin(vt) - \frac{p x}{\varrho}\cos(vt)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88\,a).$$

Die Gleichung $\psi =$ konst gibt für jeden Zeitpunkt die Schaar der Stromlinien in der Schicht an. Man vergleiche hiermit **4** (51). In den Zeiten, wenn $vt = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ ist, werden die Stromlinien dargestellt durch $\frac{x}{\varrho^2} =$ konst. Das sind Kreise, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen, und die im Ursprunge 0 die y-Achse berühren. Sie entsprechen einem der x-Achse parallelen Wirbelpaare, oder einem der y-Achse parallelen Quellenpaare in 0. Hingegen zu den Zeiten $t = 0, \pi, \ldots$ ist $\frac{x}{\varrho} =$ konst die Gleichung der Stromlinienschar; jede Stromlinie besteht aus zwei Geraden, die sich in 0 treffen und derer Winkel von der x-Achse halbiert wird. Das von der horizontalen Spule in einem schlechten Leiter erzeugte Stromlinienbild geht aus dem von einem Stromstücke (vergl. **4** (51)) erzeugten hervor, indem man die Schwingungsphase um $\frac{\pi}{2}$ vorstellt und außerdem in der x, y-Ebene eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ vornimmt; das trifft natürlich nur mit dem hier ins Auge gefaßten Grade der Annäherung zu.

Es mag zum Schlusse noch eine horizontal gestellte Spule von endlicher Länge behandelt werden, welche in die schlechtleitende Schicht eingebettet ist. Sie ist gleichmäßig gebaut, so daß n Windungen auf den cm kommen, auf das Stück $d\xi$ entfallen dann $n\,d\xi$ Windungen. Nach (54) besitzt also jedes solche Stück der Spule das Moment

$$d\mathfrak{m} = \frac{n F T}{c} d\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89).$$

Das ist statt $\mathfrak{m}$ in (88 a) einzusetzen; sodann ist statt x zu schreiben $x - \xi$, also $\varrho^2 = (x-\xi)^2 + y^2$ und von $\xi = -a$ bis $\xi = +a$ zu integrieren; so entsteht

$$\psi = \frac{n F T p}{2\pi}\{\psi' \sin(vt) - p\psi'' \cos(vt)\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90),$$

wo

$$\psi' = \int_{-a}^{+a} \frac{(x-\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2}, \quad \psi'' = \int_{-a}^{+a} \frac{(x-\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90\,a).$$

Es wird

$$\psi' = \int_{\varrho_2}^{\varrho_1} \frac{\varrho\,d\varrho}{\varrho^2} = \log\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (90\,b), \qquad \psi'' = \int_{\varrho_2}^{\varrho_1} d\varrho = \varrho_1 - \varrho_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90\,c),$$

wo ϱ_2, ϱ_1 die Abstände des Aufpunktes von den Spulenenden sind.

Die Kurven $\psi' =$ konst sind Kreise: $\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = k$, welche die Spulenachse harmonisch teilen. Diese Stromlinienschar stellt das Strömungsbild im Falle zweier Wirbelpunkte dar, welche an den Spulenenden liegen. Die Kurven $\psi'' = \varrho_1 - \varrho_2$

= konst hingegen sind konfokale Hyperbeln, deren Brennpunkte in den Spulenenden liegen (vergl. Abb. 4 und 5); für Aufpunkte, deren Entfernung von der Spule groß gegen deren Länge ist, kann man jede Hyperbel durch ihre beiden Asymptoten ersetzen, und erhält so wieder die früher (in **6**) auftretenden aus zwei Geraden bestehenden Stromkurven. Zwischen der Kreisschar und der Hyperbelschar pendelt nun, nach (90), (90 b, c) das Stromlinienbild hin und her, indem die Stromfunktion jeweils ist:

$$\psi = \frac{n F T p}{2\pi} \left\{ \log\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) \sin(\nu t) - p(\varrho_1 - \varrho_2) \cos(\nu t) \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (91).$$

Der relative Fehler ist von der Ordnung $(p\varrho)^2$. 114

Bozen, den 7. Oktober 1921.

Zeichnerische Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung in Polarkoordinaten.

Von **R. NEUENDORFF** in Kiel.

Eine Differentialgleichung $d\varrho : d\varphi = \sigma(\varrho, \varphi)$, in der ϱ und φ Polarkoordinaten sind, soll zeichnerisch gelöst werden. Zur Ausführung der Konstruktion wird gewöhnlich empfohlen, ϱ und φ als kartesische Koordinaten aufzutragen und dann eines der bekannten Verfahren anzuwenden. Im Gegensatz dazu will ich zeigen, wie man eine Lösungsmethode entwickeln kann, wenn man unmittelbar im Polarkoordinatensystem konstruiert, also ϱ und φ als Polarkoordinaten aufträgt. Mir ist keine derartige allgemeine Methode bisher bekannt geworden.

Die Aufgabe zerfällt in zwei Teile: erstens ist eine zeichnerische Näherungslösung herzuleiten und diese Lösungsmethode zu untersuchen; zweitens ist ein konvergierendes Verfahren anzugeben, um jene erste Näherungslösung zeichnerisch zu verbessern bis zu der zeichnerisch überhaupt erreichbaren Genauigkeit.

1. Einführung der Polkurve und der Isopolen. Die gegebene Differentialgleichung sei auf die Form gebracht:

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = \sigma(\varrho, \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Zu ihrer Lösung werde ein Verfahren verwendet, das zuerst für einen Sonderfall E. Czuber entwickelt hat. Seine Verallgemeinerung gab C. Veithen[1]) an.

In Abb. 1 seien P und Q benachbarte Punkte einer Integralkurve, so daß man von $P(\varrho, \varphi)$ zu $Q(\varrho + d\varrho;\ \varphi + d\varphi)$ gelangt, wenn $d\varrho$ und $d\varphi$ der Gleichung (1) genügen. Man ordnet »Isopolen« r_i einer »Polkurve« p so zu, daß man von sämtlichen Punkten P auf r_i zu den jeweils benachbarten Punkten Q gelangt, indem man P mit einem festen, r_i zugeordneten, Punkte R_i auf p verbindet. Mit anderen Worten: Das durch die Differentialgleichung definierte Richtungsfeld wird in einfach unendlich viel Strahlenbüschel aufgelöst, deren Scheitel auf p liegen.

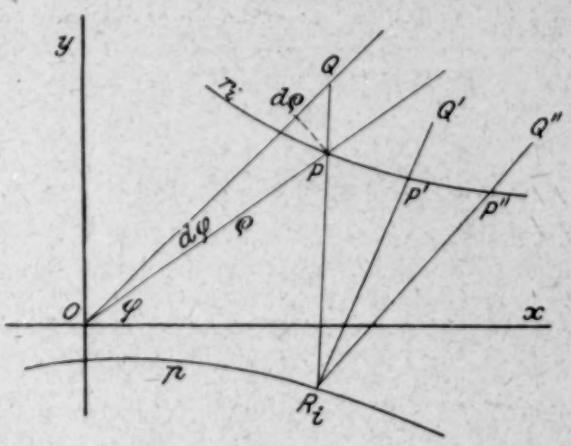


Abb. 1

Die Gleichung der Isopolen sei: $h(\varrho, \varphi) = t$; die Gleichung der Polkurve: $\varrho = f(t)$; $\varphi = g(t)$; worin t der Parameter ist, durch den die Punkte der Polkurve je einer Isopolen zugeordnet werden.

---

[1]) E. Czuber, Beitrag zur graphischen Integration der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung. Zeitschr. f. Math. und Physik, 44, 1899, S. 41.

Die Arbeit des im Oktober 1918 verstorbenen Mathematikers C. Veithen, die bereits in einer mathematischen Zeitschrift veröffentlicht werden sollte, scheint verloren zu sein. Ihr Inhalt wird an anderer Stelle ausführlich dargestellt werden.

Die drei Punkte P, Q, R seien in kartesischen Koordinaten gegeben; und zwar $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(\xi, \eta)$, dann muß sein:

$$\frac{\xi - x_1}{\eta - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

oder

$$\frac{f(t)\cos g(t) - \varrho\cos\varphi}{f(t)\sin g(t) - \varrho\sin\varphi} = \frac{(\varrho + d\varrho)\cos(\varphi + d\varphi) - \varrho\cos\varphi}{(\varrho + d\varrho)\sin(\varphi + d\varphi) - \varrho\sin\varphi}.$$

Entwickelt man, läßt die unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung fort und ersetzt noch t durch $h(\varrho, \varphi)$, so erhält man schließlich:

$$\sigma(\varrho, \varphi) = \frac{\varrho^2}{f[h(\varrho,\varphi)]\sin[\varphi - g(h(\varrho,\varphi))]} - \varrho\,\mathrm{ctg}\,[\varphi - g(h(\varrho, \varphi))] \quad . \; . \; . \quad (2).$$

Auf diese Form (2) muß also die gegebene Funktion $\sigma(\varrho, \varphi)$ gebracht werden, wenn man die Gleichungen der Polkurve und der Isopolen in jedem Einzelfall ablesen will.

2. Konstruktion der Integralkurve. Zur Konstruktion benutzt man vorgedrucktes Polarkoordinaten-Papier. Gegeben ist $\sigma(\varrho, \varphi)$. Man denke die Zerlegung auf die Form (2) ausgeführt, so daß die drei Funktionen f, g und h bekannt sind. Dann zeichne man die kotierten Isopolen und die mit kotierten Punkten versehene Polkurve.

Ist in Abb. 2 A der gegebene Anfangspunkt einer Integralkurve, so verbindet man A entsprechend seiner Lage zwischen den Isopolen 0 und 1 mit einem durch Interpolation zwischen 0 und 1 auf der Polkurve p gefundenen Punkte. Man schreitet im allgemeinen am günstigsten immer um $\Delta\varphi = 2^0$ fort (auf dem im Handel erhältlichen Papier sind die Strahlen von 2^0 zu 2^0 gedruckt), indem man wie vorher den Punkt auf der Polkurve, mit dem zu verbinden ist, durch Interpolation bestimmt.

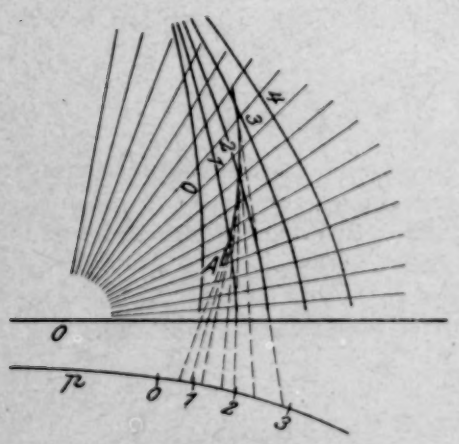


Abb. 2

Natürlich kann man auch, wie bei kartesischen Koordinaten üblich, die Geradenstücke bis etwa zur Mitte zwischen je zwei Isopolen ziehen und so nur die auf der Polkurve aufgetragenen Punkte benutzen. Im allgemeinen liefert das erste Verfahren die besseren Ergebnisse. In beiden Fällen wird man die nach den Polen gezogenen Geraden als Tangenten der gesuchten Integralkurve auffassen.

3. Wahl der Polkurve, Sonderfälle. Die Polkurve kann man beliebig vorschreiben und dann aus Gleichung (2) $h(\varrho, \varphi)$ bestimmen. So kann man z. B. immer die x-Achse als Polkurve wählen, am einfachsten in der Form

$$\varrho = f(t) = t; \quad \varphi = g(t) = 0,$$

dann ist

$$h(\varrho, \varphi) = \frac{\varrho^2}{\varrho\cos\varphi + \sigma(\varrho, \varphi)\sin\varphi} = t$$

die Gleichung der Isopolen. Doch diese Fragestellung hat wenig Interesse.

Umgekehrt kann man $h(\varrho, \varphi)$ nicht beliebig vorschreiben. Es entsteht daher die Aufgabe, diejenigen Differentialgleichungen zu bestimmen, die durch möglichst einfach konstruierbare Isopolenscharen lösbar sind, denn in solchen Fällen ist das Verfahren vor anderen besonders bevorzugt.

a) Die Isopolen seien ein Strahlenbüschel um den Nullpunkt als Zentrum. In diesem Falle ist $\varphi = t \equiv h(\varrho, \varphi)$. Folglich wird Gleichung (2)

$$\sigma(\varrho, \varphi) = \frac{\varrho^2}{f(\varphi)\sin[\varphi - g(\varphi)]} - \varrho\,\mathrm{ctg}\,[\varphi - g(\varphi)]$$

und die Differentialgleichung hat die Form:

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = \varrho^2 P(\varphi) - \varrho\, Q(\varphi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Die Polkurve erhält dann die Gleichung:

$$\varphi = t - \mathrm{arc\,ctg}\, Q(t); \quad \varrho = \frac{1}{P(t)\sin[\mathrm{arc\,ctg}\, Q(t)]}.$$

Sonderfälle erhält man, wenn man auch noch für die Polkurve eine bestimmte Kurve vorschreibt. Soll z. B. die x-Achse Polkurve sein, so ist $\varphi = g(t) = 0$. Die Differentialgleichung hat die Form

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = \varrho^2 P(\varphi) - \varrho \operatorname{ctg} \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Die x-Achse als Polkurve trägt die Funktionsskala

$$\varrho = \frac{1}{P(t) \sin t}.$$

Diese Differentialgleichungen haben die **Bernoullische Form**; folglich sind die Lösungen von Gleichung (3) bezw. (4)

$$\varrho = \frac{-e^{-\int Q d\varphi}}{\int P e^{-\int Q d\varphi} d\varphi + c} \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{-1}{\sin\varphi \left[\int P \sin\varphi \, d\varphi + c\right]}.$$

In cartesischen Koordinaten geschrieben, lauten die Differentialgleichungen (3) und (4):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + P\left(\frac{y}{x}\right)}{x\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + Q\left(\frac{y}{x}\right)} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + P\left(\frac{y}{x}\right)}{x\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) P\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

b) **Die Isopolen seien konzentrische Kreise um den Nullpunkt.** In diesem Falle haben die Isopolen die Gleichung $\varrho = t \equiv h(\varrho, \varphi)$. Folglich muß nach Gleichung (2) σ auf die Form gebracht werden können:

$$\sigma(\varrho, \varphi) = \frac{\varrho^2}{f(\varrho) \sin[\varphi - g(\varrho)]} - \varrho \operatorname{ctg}[\varphi - g(\varrho)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Es ist eine notwendige und hinreichende Bedingung herzuleiten, die σ erfüllen muß, wenn es auf die Form (5) gebracht werden kann. Die Aufstellung solch einer Bedingungsgleichung ist nötig, weil es unter Umständen recht schwierig ist, unmittelbar zu erkennen, ob sich σ auf die Form (5) bringen läßt.

Aus Gleichung (5) folgt:

$$\frac{\varrho^2}{f(\varrho)} = \sigma \sin(\varphi - g) + \varrho \cos(\varphi - g) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Differenziert man partiell nach φ, so erhält man $\sigma_\varphi + \sigma \operatorname{ctg}(\varphi - g) - \varrho = 0$ oder

$$\operatorname{tg} g(\varrho) = \frac{(\varrho - \sigma_\varphi) \operatorname{tg}\varphi - \sigma}{\sigma \operatorname{tg}\varphi + \varrho - \sigma_\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Noch einmal nach φ partiell differenziert, ergibt nach einfachen Umformungen:

$$\sigma \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}\left(3\varrho - 2\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}\right) = \sigma^2 + \varrho^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Die Gleichung ist auch hinreichend, wie rückwärts durch Integration folgt.

Ist also eine Differentialgleichung $d\varrho : d\varphi = \sigma(\varrho, \varphi)$ gegeben, und soll untersucht werden, ob sie mit Hilfe von konzentrischen Kreisen um den Nullpunkt als Isopolen gelöst werden kann, so bildet man σ_φ und $\sigma_{\varphi\varphi}$ und setzt in Gleichung (8) ein. Ist Gleichung (8) erfüllt, so findet man die Polkurve in folgender Weise: Nach Gleichung (7) berechnet man

$$g(\varrho) = \operatorname{arc\,tg} \frac{(\varrho - \sigma_\varphi) \operatorname{tg}\varphi - \sigma}{\sigma \operatorname{tg}\varphi + \varrho - \sigma_\varphi}$$

und dann nach Gleichung (6)

$$f(\varrho) = \frac{\varrho^2}{\varrho \sin(\varphi - g) + \varrho \cos(\varphi - g)},$$

so ist die Gleichung der Polkurve

$$\varrho = f(t): \quad \varphi = g(t).$$

Sonderfälle ergeben sich wieder, wenn auch für die Polkurve eine bestimmte Kurve vorgeschrieben wird. Ist z. B. die x-Achse Polkurve, also $\varphi = g(t) = 0$, so muß die Differentialgleichung die Form haben:

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{\varrho^2}{f(\varrho) \sin\varphi} - \varrho \operatorname{ctg}(\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Die Bedingungsgleichung dafür, daß sich diese Form herstellen läßt, lautet:

$$\sigma_\varphi + \sigma \operatorname{ctg} \varphi - \varrho = 0.$$

Weiter wird

$$f(\varrho) = \frac{\varrho^2}{\sigma \sin \varphi + \varrho \cos \varphi}$$

und $\varrho = f(t)$ ist die Funktionsskala, die die x-Achse als Polkurve trägt.

Statt Gleichung (9) kann man schreiben

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = P(\varrho) \operatorname{cosec} \varphi - \varrho \operatorname{ctg} \varphi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10).$$

Läßt sich diese Form unmittelbar herstellen, so ist die Polkurve bestimmt durch

$$\varphi = 0; \quad \varrho = \frac{t^2}{P(t)}.$$

Gleichung (10) lautet in kartesischen Koordinaten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y P(x^2 + y^2)}{x P(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)}.$$

4. Bestimmung der Polkurve im allgemeinen. Im allgemeinsten Falle erhält man leicht entsprechende Bedingungsgleichungen.

Gegeben sei die beliebige Isopolenschar:

$$h(\varrho, \varphi) = t \text{ oder nach } \varrho \text{ aufgelöst } \varrho = H(\varphi, t) \quad \ldots \ldots \quad (11).$$

Dieser Wert für ϱ ist überall in Gleichung (2) einzusetzen, insbesondere auch in $\sigma(\varrho, \varphi)$. Man erhält:

$$\sigma(\varphi, t) = \frac{H^2(\varphi, t)}{f(t) \sin [\varphi - g(t)]} - H(\varphi, t) \operatorname{ctg} [\varphi - g(t)].$$

Hieraus folgt:

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{\sigma \sin (\varphi - g) + H \cos (\varphi - g)}{H^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12).$$

Diese Gleichung wird partiell nach φ differenziert. Umgeformt wird daraus

$$\operatorname{tg}(\varphi - g) = \frac{H \dfrac{\partial H}{\partial \varphi} - \sigma H}{H \dfrac{\partial \sigma}{\partial \varphi} - 2\sigma \dfrac{\partial H}{\partial \varphi} - H^2} = \frac{A}{B} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13).$$

Mit Benutzung dieser Abkürzung ergibt sich

$$\operatorname{tg} g = \frac{B \operatorname{tg} \varphi - A}{A \operatorname{tg} \varphi + B} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14),$$

und wenn man noch einmal nach φ partiell differenziert:

$$A^2 + B^2 = A \frac{\partial B}{\partial \varphi} - B \frac{\partial A}{\partial \varphi}.$$

Ist diese Bedingungsgleichung von $\sigma(\varphi, t)$ erfüllt, so erhält man $g(t)$ und $f(t)$ aus Gleichung (14) und (12).

Ergebnis: Soll eine gegebene Differentialgleichung $d\varrho : d\varphi = \sigma(\varrho, \varphi)$ mit Hilfe einer beliebig vorgeschriebenen Isopolenschar $h(\varrho \varphi) = t$ oder $\varrho = H(\varphi, t)$ lösbar sein, so muß die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$A^2 + B^2 = A \frac{\partial B}{\partial \varphi} - B \frac{\partial A}{\partial \varphi}$$

erfüllt sein. Darin ist

$$A = H \frac{\partial H}{\partial \varphi} - \sigma H; \quad B = H \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} - 2\sigma \frac{\partial H}{\partial \varphi} - H^2,$$

und in $\sigma(\varrho, \varphi)$ ist ϱ durch $H(\varphi, t)$ zu ersetzen. Die Gleichung der Polkurve ist dann:

$$\varphi = g(t) = \operatorname{arc\,tg} \frac{B \operatorname{tg} \varphi - A}{A \operatorname{tg} \varphi + B}; \quad \varrho = f(t) = \frac{H^2}{\sigma \sin (\varphi - g) + H \cos (\varphi - g)}.$$

Sonderfälle ergeben sich, wenn man für die Polkurve Bedingungen vorschreibt. Ist $g(t)$ gegeben, so kann man aus Gleichung (14) σ bis auf eine willkürliche Funktion von t bestimmen. Ist auch $f(t)$ vorgeschrieben, so gibt es eine bestimmte Differentialgleichung, die mit diesen vorgeschriebenen Hilfsmitteln gelöst werden kann.

5. Das Subnormalen-Verfahren. Eine andere Konstruktion zur Erlangung einer ersten Näherungslösung ist die folgende. Gegeben sei wieder $d\varrho : d\varphi = \sigma(\varrho, \varphi)$. Nun ist aber die Länge der Polarsubnormalen $S_n = d\varrho : d\varphi$. Folglich ist $S_n = \sigma(\varrho, \varphi)$.

Hieraus läßt sich ein halb rechnerisches, halb konstruktives Verfahren ableiten.

In Abb. 3 sei A_0 der gegebene Anfangspunkt mit ϱ_0 und φ_0. Man berechne $\sigma_0 = \sigma(\varrho_0, \varphi_0)$, ziehe OA_0 und errichte in O auf OA_0 das Lot. Dieses Lot soll die Polarsubnormale werden. Also hat man auf ihm $OP_0 = \sigma_0$ abzutragen. Jetzt verbindet man P_0 mit A_0 und errichtet eine kurze Strecke A_0A_1 senkrecht auf P_0A_0.

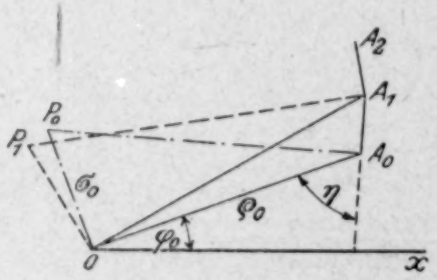


Abb. 3

Weiter liest man die Koordinaten ϱ_1 und φ_1 von A_1 ab (man zeichne auf vorgedrucktem Koordinatenpapier), berechnet $\sigma_1 = \sigma(\varrho_1, \varphi_1)$ und konstruiert wie vorher die kurze Strecke A_1A_2. So fährt man fort und findet als erste genäherte Integralkure die von den Geraden A_0A_1, A_1A_2 usw. als Tangenten eingehüllte Kurve.

Zweifelhaft bleibt zunächst, nach welcher Seite des Lotes auf OA_0 die Strecke σ_0 abzutragen ist. Da aber — siehe Abb. 3 — $\operatorname{tg}\eta = \varrho\frac{d\varphi}{d\varrho} = \frac{\varrho}{\sigma}$ ist, so hat man nur das Vorzeichen von $\operatorname{tg}\eta_0 = \frac{\varrho_0}{\sigma_0}$ zu bestimmen, um festzustellen, ob η_0 ein spitzer oder ein stumpfer Winkel werden muß.

6. Das Lord Kelvinsche Verfahren zur zeichnerischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Dieses bekannte Verfahren wird bei Verwendung von Polarkoordinaten besonders einfach. Deshalb mag die folgende Bemerkung hier eingeschaltet werden.

Gegeben sei die Gleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} = \sigma\left(\varrho, \varphi, \frac{d\varrho}{d\varphi}\right) \text{ oder } \varrho'' = \sigma(\varrho, \varphi, \varrho').$$

Ferner sei der Anfangspunkt A_0 bekannt mit ϱ_0, φ_0, ϱ_0'. In Abb. 4 zeichne man $OA_0 = \varrho_0$, $OP_0 = \varrho_0'$ senkrecht auf OA_0 mit Berücksichtigung des Vorzeichens wie vorher. Dann ziehe man A_0P_0 und trage darauf $A_0M_0 = R_0$ ab, wo

$$R_0 = \frac{(\varrho_0^2 + \varrho_0'^2)^{3/2}}{\varrho_0^2 + 2\varrho_0'^2 - \varrho_0\varrho_0''}$$

der Krümmungsradius im Punkte A_0 und $\varrho_0'' = \sigma(\varrho_0, \varphi_0, \varrho_0')$ ist. Um M_0 beschreibe man einen kleinen Kreisbogen A_0A_1.

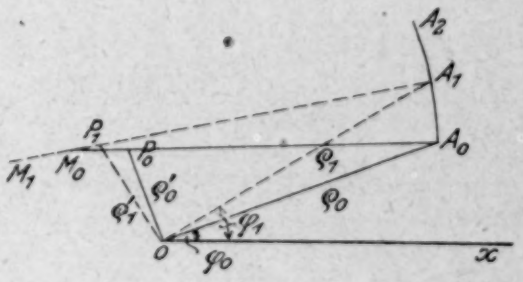


Abb. 4

Jetzt ziehe man die Normale A_1M_0 und errichte in O das Lot OP_1 auf OA_1. Aus der Abbildung liest man ab: $OA_1 = \varrho_1$, $\sphericalangle A_1Ox = \varphi_1$, $OP_1 = \varrho_1'$. Man berechnet:

$$\varrho_1'' = \sigma(\varrho_1, \varphi_1, \varrho_1') \text{ und } R_1 = \frac{(\varrho_1^2 + \varrho_1'^2)^{3/2}}{\varrho_1^2 + 2\varrho_1'^2 - \varrho_1\varrho_1''}.$$

R_1 trägt man auf A_1M_0 von A_1 bis M_1 ab und beschreibt einen kleinen Kreisbogen A_1A_2 um M_1. In derselben Weise fährt man fort.

Die Richtung, in welcher man R auf der Normalen abzutragen hat, ist in bekannter Weise aus dem Vorzeichen von R und der Richtung der Tangente zu bestimmen.

7. Die zeichnerische Verbesserung der Näherungslösungen. Man wendet das Verfahren der sukzessiven Approximation an, ähnlich wie es C. Runge[1]) zum vor-

[1]) C. Runge, Ueber graphische Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung, Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 16, 1907, S. 270.

liegenden Zweck zuerst entwickelt hat. Ist zu irgend einem φ ein Näherungswert ϱ_1 gefunden, so erhält man einen besseren Näherungswert ϱ_2 aus der Gleichung

$$\varrho_2 = \varrho_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sigma(\varrho_1, \varphi)\, d\varphi.$$

Zunächst soll gezeigt werden, wie man diese Verbesserung zeichnerisch ausführt. Man beginnt mit der Konstruktion der Kurve $\sigma(\varrho_1, \varphi)$. Wie schon oben erwähnt, ist $\sigma(\varrho_1 \varphi) = \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)_{\varrho=\varrho_1}$ nichts anderes als die Länge der Polarsubnormalen. In Abb. 5 sei $A_0 B$ die erste Näherungslösung. Dann errichtet man auf OA_0 in O das Lot und zeichnet die Normale CA_0 auf der schon vorhandenen Tangentenrichtung in A_0. So fährt man fort — etwa von 10^0 zu 10^0 fortschreitend — und erhält die Kurve CD, wenn man die gefundenen Punkte durch eine Kurve verbindet. Diese Kurve ist das graphische Bild der Funktion $\sigma(\varrho_1, \varphi)$ in einem um 90^0 gedrehten Achsenkreuz. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ist

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \sigma(\varrho_1\, \varphi)\, d\varphi = \sigma_m(\varrho_1, \varphi)\,(\varphi - \varphi_0).$$

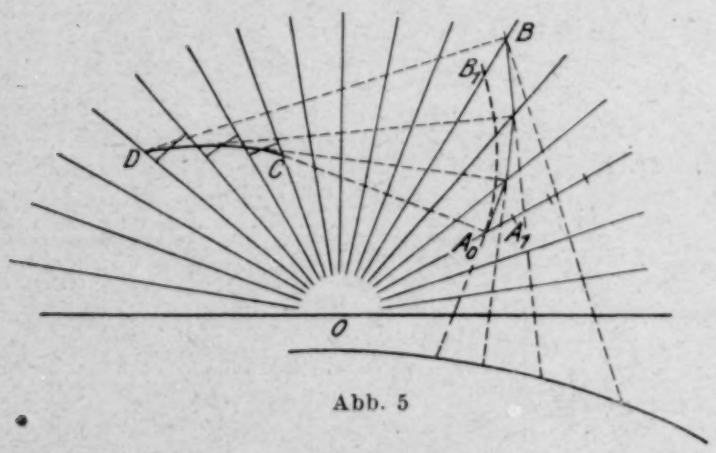


Abb. 5

Das ist die Länge des Bogens im mittleren Abstand σ_m von O und zum Winkel $(\varphi - \varphi_0) = \Delta\varphi$ gehörig. Diese mittleren Bögen zeichnet man für jedes Intervall $\Delta\varphi$ nach Augenmaß. Die einzelnen Bogenlängen trägt man von A_0 aus auf OA_0 hintereinander ab und überträgt die Strecken OA_1 usw. auf die zugehörigen Radienvektoren. Die Verbindungskurve der gefundenen Punkte ist eine verbesserte Integralkurve. So fährt man fort, bis die letzten Integralkurven zeichnerisch nicht mehr unterschieden werden können.

Das Verfahren konvergiert nur, wie bekannt, wenn der Bogen $A_0 B$ nicht zu groß gewählt ist. Man muß daher unter Umständen die Integralkurve stückweise konstruieren, immer von dem zuletzt gefundenen verbesserten Endpunkt als neuem Anfangspunkt beginnend, und jedes Stück für sich verbessern.

Die Grenzen der Konvergenz lassen sich unmittelbar aus der Zeichnung erkennen. Gelangt nämlich A_i, irgend einer der Punkte auf OA_0, bei fortschreitender Verbesserung nach A_i^1, A_i^2 usw., so muß ja immer $A_i^k A_i^{k-1} < A_i^{k-1} A_i^{k-2}$ sein. Sobald an einer Stelle diese Ungleichung nicht erfüllt ist, hört von ihr ab die Konvergenz auf[1]. 99

---

[1]) Als einfaches Beispiel sei empfohlen: $d\varrho : d\varphi = \varrho \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$. Als Anfangspunkt wurde gewählt A_0 (6 cm, 20^0). Die Isopolen waren die Kreise um den Nullpunkt $\varrho = t$, und die Polkurve war die x-Achse $\varphi = 0$, $\varrho = t$. Für $\varphi = 90^0$ ergab sich:

durch Rechnung	$\varrho = 11{,}64$ cm
bei $\Delta\varphi = 2^0$ zeichnerisch	$\varrho = 11{,}52$ »
» $\Delta\varphi = 4^0$ »	$\varrho = 11{,}72$ »

In beiden Fällen war also eine zeichnerische Verbesserung nicht möglich.
Bei $\Delta\varphi = 10^0$ ergab sich durch Zeichnung $\varrho = 12{,}61$ cm.
Die erste Verbesserung ergab $\varrho = 11{,}96$ cm, die zweite $\varrho = 11{,}68$ cm; die dritte fiel mit der zweiten zusammen.

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Bisherige Lösungen des Torsionsproblems für Drehkörper.

Von **TH. PÖSCHL** in Prag.

Die Torsion von Stäben mit veränderlichem Querschnitt ist bisher in strengerer Form nur für Drehkörper (Rotationskörper) behandelt worden, u. zw. insbesondere im Hinblick auf die Spannungserhöhungen, die durch den Einfluß von (plötzlichen oder allmählichen) Querschnittsübergängen bei Maschinenwellen (Voll- und Hohlwellen) hervorgerufen werden, ferner von Materialfehlern, Einschlüssen im Innern gedrillter Stäbe u. dgl. Bei Drehstäben mit langsam veränderlichen Querschnitten ist es noch angängig, die bekannte Lösung für den Kreisquerschnitt zu verwenden (bei der der Querschnitt als Ganzes verdreht, nicht aber verwölbt oder in sich verschoben wird) und das Maß ω der Verdrehung für die Längeneinheit des Stabes, und damit auch die Drillungssteifigkeit $K = \frac{M}{\omega}$ als Funktion der auf der Drehachse gemessenen Entfernung z zu betrachten[1]). Wenn nämlich $\bar{r} = \bar{r}(z)$ die Gleichung[2]) der (von einer Parallelen zur Achse wenig abweichenden) Meridiankurve C des Stabes, M das auf die Endquerschnitte einwirkende Torsionsmoment, G die Schubziffer bezeichnet, dann kann man angenähert setzen: Für das Torsionsmoment

$$M = \frac{\pi}{2} G \omega \bar{r}^4 = K \omega, \quad K \equiv K(z) = \frac{M}{\omega(z)} = \frac{G\pi}{2} [\bar{r}(z)]^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und für die größte Schubspannung am Rande jedes Querschnittes

$$\tau_{max} \equiv \tau_{max}(z) = G \omega \bar{r} = \frac{2M}{\omega \bar{r}^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Bei rascher Veränderlichkeit können jedoch bedeutend größere Spannungen auftreten, als sie sich durch diesen angenäherten Vorgang ergeben, und daher ist es für die Beurteilung solcher Fälle wichtig, eine genauere Theorie zu besitzen. Dies ist durch Betrachtungen und Ansätze geschehen, die erstmalig von A. Föppl[3]) gegeben wurden und nach denen bisher folgende Drehkörperformen untersucht wurden:

a) Zylinder (mit verschiedenen Randbedingungen an Stirn- und Mantelflächen) (A. Timpe),

b) zylindrische Wellen mit Querschnittübergängen und kreisförmigen Ausrundungen (A. Föppl, F. A. Willers),

c) zylindrische Wellen mit kreisförmigen Einkerbungen (F. A. Willers, L. Föppl),

d) zylindrische Platten (A. Timpe),

e) Drehkegel (A. Föppl),

f) Drehellipsoid und Hyperboloid (Halbraum), Drehparaboloid (E. Melan),

g) Kugelhohlraum u. dgl. (Larmor, Love, W. Arndt, L. Föppl).

1. Verschiedene Formen für den Ansatz des Problems. Sowie für den zylindrischen Körper kann man auch bei der »reinen Torsion« von Drehkörpern den Spannungszustand durch ein System von Schubspannungen darstellen; dabei besteht die äußere Belastung lediglich aus Drehmomenten, die an den Endquerschnitten oder am Mantel übertragen werden und selbst drehsymmetrisch verteilt sind. Die Meridiankurve $\bar{r} = \bar{r}(z)$ sei C, die von ihr, der Achse, und zweier (entsprechend weit voneinander entfernten) Endradien bezw. anderer passend gewählter Kurven eingeschlossene Fläche F. Mit M bezeichnen wir das auf die Endflächen einwirkende Torsionsmoment. (Abb. 1.)

---

[1]) Die Bezeichnungen sind nach Möglichkeit in Uebereinstimmung mit den in dem Berichte »Bisherige Lösungen des Torsionsproblems« (diese Zeitschr. I, S. 312 bis 328) verwendeten gewählt worden.

[2]) Randwerte sind durch Ueberstreichen angedeutet.

[3]) A. Föppl, Ueber die Torsion von runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser, Sitzungsber. d. math.-phys. Klasse der bayr. Ak. 35 (1905), S. 249 u. S. 504; Die Beanspruchung auf Verdrehen an einer Uebergangsstelle mit scharfer Abrundung, Z. d. V. d. Ing. 50 (1906), S. 1032.

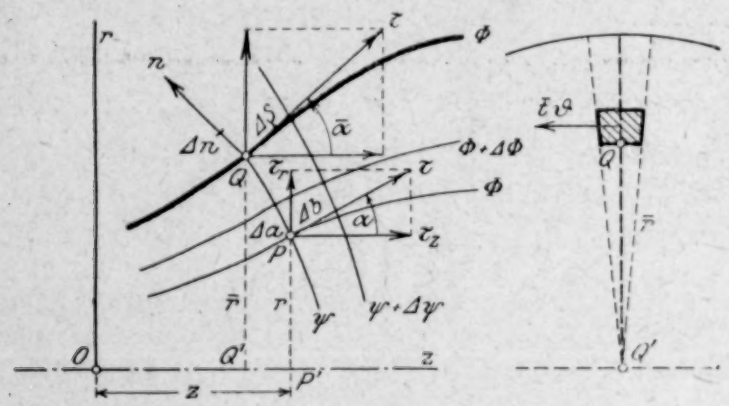


Abb. 1

Als Koordinaten kommen naturgemäß Zylinderkoordinaten (z, r, ϑ) in Betracht, wobei wegen der vorausgesetzten Drehsymmetrie alle Spannungen und Formänderungen von ϑ unabhängig werden. Werden die Spannungsgrößen auf ein Teilchen an der Stelle (z, r, ϑ) in diesen Koordinaten mit σ_z, σ_r, σ_ϑ, $\tau_{r\vartheta}$, $\tau_{\vartheta z}$, τ_{zr} und die entsprechenden Verzerrungsgrößen mit ε_z, ε_r, ε_ϑ, $\gamma_{r\vartheta}$, $\gamma_{\vartheta z}$, γ_{zr} bezeichnet, so sind davon für das Torsionsproblem nur die Größen $\tau_{\vartheta z} \equiv \tau_z$, $\tau_{r\vartheta} \equiv \tau$, bezw. $\gamma_{\vartheta z}$, $\gamma_{r\vartheta}$ beizubehalten und alle andern gleich Null zu setzen. Die beiden lassen sich dann durch die Verschiebung in tangentieller Richtung $u_\vartheta \equiv U(z, r)$ allein ausdrücken, woraus durch Verwertung des linearen Elastizitätsgesetzes die folgenden Beziehungen fließen[1] [2]):

$$\gamma_{\vartheta z} = U_z \qquad \gamma_{r\vartheta} = U_r - \frac{U}{r} = r\left(\frac{U}{r}\right)_r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

$$\tau_z \equiv \tau_{\vartheta z} = G\,\gamma_{\vartheta z} = G\,U_z \qquad \tau_r \equiv \tau_{r\vartheta} = G\,\gamma_{r\vartheta} = G\,r\left(\frac{U}{r}\right)_r \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Als einzige Gleichgewichtsbedingung bleibt übrig

$$\frac{\partial\,\tau_z}{\partial\,z} + \frac{\partial\,\tau_r}{\partial\,r} + \frac{2\,\tau_r}{r} \equiv \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial\,(r^2\tau_z)}{\partial\,z} + \frac{\partial\,(r^2\tau_r)}{\partial\,r}\right\} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Für die Aufstellung der Gleichungen brauchen wir ferner die Ausdrücke für die Drehungskomponenten, in die ebenfalls $u_\vartheta \equiv U$ allein eingeht[3])

$$2\,\omega_z = \frac{1}{r}(r\,U)_r, \quad 2\,\omega_r = -\,U_z, \quad (2\,\omega_\vartheta = 0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Je nach der Beschaffenheit des Problems ergeben sich nun folgende Formulierungen des Integrationsproblems[4]):

A) Der weniger häufig vorkommende Fall ist der mit gegebenen Oberflächenverschiebungen $\bar{U}$; hiefür werden die durch Elimination der Spannungen sich ergebenden Gleichungen herangezogen. Setzt man (4) in (5) ein, so folgt für U die Gleichung

$$\frac{1}{r^2}\left\{(r^2\,U_z)_z + r^3\left(\frac{U}{r}\right)_r\right\} = U_{zz} + U_{rr} + \frac{U_r}{r} - \frac{U}{r^2} = \frac{\partial\,(2\,\omega_z)}{\partial\,r} - \frac{\partial\,(2\,\omega_r)}{\partial z} = 0 \quad . \quad (7).$$

Ferner folgt aus (6) durch Elimination von U

$$\frac{\partial\,(2r\,\omega_z)}{\partial\,z} + \frac{\partial\,(2\,r\,\omega_r)}{\partial\,r} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

daher können $2\,\omega_z$ und $2\,\omega_r$ durch die partiellen Ableitungen zweier Funktionen φ und ψ von z und r in folgenden Formen angesetzt werden:

$$2\,\omega_z = \frac{1}{r}(r\,U)_r = \varphi_z = \frac{1}{r}\psi_r \qquad 2\,\omega_r = -\,U_z = \varphi_r = -\,\frac{1}{r}\psi_z \quad . \quad . \quad (9).$$

---

[1]) Wie in dem in [1]) genannten »Berichte« werden auch hier partielle Ableitungen der Funktionen U, φ, ψ, Φ, Ψ usw. durch Indices angedeutet; bei den σ, τ, ε und γ werden dieselben Indices zur Bezeichnung der Komponenten verwendet; ein Zweifel in der Bedeutung ist gleichwohl nicht möglich.

[2]) Der Unterschied gegen die in der Einleitung gekennzeichnete Lösung läuft darauf hinaus, daß dort u_ϑ in der besonderen Form $u_\vartheta = r\,\omega(z) = \frac{2\,M}{G\,\pi\,r^3}$ angesetzt wurde, während hier $u_\vartheta \equiv U(z, r)$ erst durch die Gestalt der Meridiankurve bestimmt wird.

[3]) Bezüglich der Ausdrücke für die Verzerrungs- und Drehungsgrößen in Zylinderkoordinaten vergl. A. E. H. Love, Theorie der Elastizität, deutsch von A. Timpe, Leipzig 1907, S. 66.

[4]) s. F. A. Willers, Die Torsion eines Rotationskörpers um seine Achse, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 55 (1907), S. 225, u. A. Timpe, Die Torsion von Umdrehungskörpern, Math. Ann. 71 (1911), S. 480.

Die Gleichungen, denen φ und ψ genügen, ergeben sich daraus:

$$\Delta\varphi \equiv D_1\varphi \equiv \varphi_{zz} + \varphi_{rr} + \frac{1}{r}\varphi_r = \frac{1}{r}[(r\varphi_z)_z + (r\varphi_r)_r] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

$$D_{-1}\psi \equiv \psi_{zz} + \psi_{rr} - \frac{1}{r}\psi_r = r\left[\left(\frac{\psi_z}{r}\right)_z + \left(\frac{\psi_r}{r}\right)_r\right] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Diese Gleichungen sind identisch mit den Gleichungen für das Potential φ und die (Stokessche) Stromfunktion ψ der achsensymmetrischen Strömungen einer reibungslosen Flüssigkeit, deren Teilgeschwindigkeiten nach Achse und Radius $2\,\omega_z$ und $2\,\omega_r$ sind; daher liefern alle für dieses Strömungsproblem bekannten Lösungen auch Lösungen des Torsionsproblems [1]).

Wenn der Randwert $\bar{U}$ bekannt ist, so kennt man nach (9) auch $\bar{\psi} = \bar{r}\,\bar{U}$ und das Integrationsproblem kann so ausgesprochen werden: Es ist eine Funktion ψ derart zu bestimmen, daß

(I. Problem) $\qquad D_{-1}\psi = 0$ in $F \qquad \bar{\psi} = \bar{r}\,\bar{U}$ auf C . . . . . (12).

Wenn ferner ds ein Bogenelement der Meridiankurve C und dn ein Element der Normalen ist, das zu ds so liegt wie Or zu Oz, so folgt aus (9)

$$\bar{r}\,\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial n}} = \bar{r}\,\bar{q}_n = -\overline{\frac{\partial(rU)}{\partial s}}.$$

Für die Funktion φ lauten daher die das Integrationsproblem kennzeichnenden Bedingungen so

(II. Problem) $\qquad \Delta\varphi \equiv D_1\varphi = 0$ in $F \qquad \bar{q}_n = -\frac{1}{\bar{r}}\overline{\frac{\partial(rU)}{\partial s}}$ auf C . . . . (13).

B) In dem praktisch wichtigeren Falle gegebener Oberflächenspannungen (wozu insbesondere auch der »spannungsfreie Mantel« gehört), verwendet man naturgemäß jene Gleichungen, in denen nur die Spannungen vorkommen. Eliminiert man U aus den Gleichungen (4), so erhält man die »Kompatibilitätsbedingung«

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\tau_z}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\tau_r}{r}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

die zusammen mit der Gleichung (5) zu folgenden Ansätzen für die Teilspannungen nach z und r führt:

$$\tau_z = -\frac{1}{r^2}\Phi_r = r\,\Psi_z \qquad \tau_r = \frac{1}{r^2}\Phi_z = r\,\Psi_r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

woraus für Φ und Ψ folgende Gleichungen fließen:

$$D_{-3}\Phi \equiv \left(\frac{1}{r^3}\Phi_r\right)_r + \left(\frac{1}{r^3}\Phi_z\right)_z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16),$$

$$D_3\Psi \equiv (r^3\Psi_r)_r + (r^3\Psi_z)_z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Da die Randbedingung bei nur in tangentieller Richtung angreifenden Kräften lautet

$$\bar{t}_\vartheta = \bar{\tau}_z\cos(z\,n) + \bar{\tau}_r\cos(r\,n) = \frac{1}{r^2}[\Phi_r\cos(r,s) + \bar{\Phi}_z\cos(z,s)] = \frac{1}{\bar{r}^2}\Phi_s,$$

so ist das Integrationsproblem bezw. Φ bestimmt durch:

(III. Problem) $\qquad D_{-3}\Phi = 0$ in $F \qquad \bar{\Phi}_s = \bar{r}^2\,\bar{t}_\vartheta$ auf C . . . . . (18).

Die Linien $\Phi = \text{konst}$ stellen die Spannungslinien dar, d. h. sie geben an jeder Stelle der Meridianebene die Richtung der gesamten Schubspannung an; zu diesen Spannungslinien gehört aus Symmetriegründen auch die Achse, für die wir $\Phi = 0$ festsetzen. Für spannungsfreien Mantel ($\bar{t}_\vartheta = 0$) wird die Randbedingung $\Phi = \text{konst} = \bar{\Phi}$.

---

[1]) R. A. Sampson, On Stokes Current Funktion, Phil. Trans (A.) 182 (1891) und die darin angegebene ältere Literatur. Ferner F. Prašil, Ueber Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen, Schweiz Bauz. 41 (1903) und dessen Buch: Technische Hydrodynamik, Berlin, Springer 1913. Endlich den Bericht von G. Greenhill, The uniaxial potential function (fonction de potentiel) and its orthogonal force function (fonction de force) contrasted, J. d. math. 8. Serie, t. IV (1921), S. 155, der eine große Anzahl von Lösungen des hydrodynamischen (und elektrodynamischen) Problems für verschiedene Körper enthält, die jedoch vorwiegend dem Interessenkreis des Physikers angehören.

Für das Torsionsmoment erhält man bei spannungsfreiem Rand den einfachen Ausdruck

$$M = 2\pi \int r^2 (\tau_z \, dr - \tau_r \, dz) = 2\pi \, \overline{\Phi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19),$$

wobei das Integral über irgend eine zu Φ orthogonale Kurve $\Psi = \text{konst}$ von der Achse bis zum Rande zu erstrecken ist.

Für die Funktion Ψ erhalten wir analog

$$\text{(IV. Problem)} \qquad D_3 \Psi = 0 \text{ in } F \qquad \frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial n} = \frac{1}{r} \bar{t}_\vartheta \text{ auf } C \quad \ldots\ldots \quad (20),$$

d. h. $\dfrac{\partial \overline{\Psi}}{\partial n} = 0$ bei spannungsfreiem Rand, wie wir im folgenden meist voraussetzen. Die Linien $\Psi = \text{konst}$ stellen die Linien gleicher Winkelverschiebung $\dfrac{U}{r}$ dar.

Die Scharen $\Phi = \text{konst}$ und $\Psi = \text{konst}$ bilden (ebenso wie φ und ψ) ein orthogonales Netz und wenn die auf ihnen zwischen zwei Kurven Ψ und $\Psi + \Delta \Psi$ bezw. Φ und $\Phi + \Delta \Phi$ gemessenen Strecken Δa und Δb sind, so ergibt sich für die Größe der Schubspannung an jeder Stelle nach (15)

$$\tau = \frac{\Delta \Phi}{r^2 \, \Delta a} = r \frac{\Delta \Psi}{\Delta b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21),$$

(d. h. natürlich die Grenzwerte dieser Ausdrücke), auf die F. A. Willers[1]) ein graphisches Verfahren aufgebaut hat (s. **6.**). Ferner merken wir an

$$U = r \Psi, \quad \psi = r U = r^2 \Psi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22).$$

c) A. Timpe[1]) hat noch einen anderen Ansatz gegeben, bei dem die Spannungskomponenten als dritte Ableitungen[2]) einer der Laplaceschen Gleichung $\Delta \xi = 0$ genügenden Funktion ξ erscheinen, der jedoch bisher weiter nicht verwertet wurde.

2. Einführung isometrischer Koordinaten. Wenn es möglich ist, durch den Ansatz $z = z + i r = f(\xi + i \eta) = f(\zeta)$ zwei konjugierte Funktionen $\xi(z, r)$ und $\eta(z, r)$ so zu bestimmen, daß die Meridiankurve des Drehkörpers aus einer Kurve $\xi = \text{konst}$ (oder $\eta = \text{konst}$) besteht oder sich aus Kurvenstücken $\xi = \text{konst}$ und $\eta = \text{konst}$ zusammensetzt, so empfiehlt es sich, ξ, η an Stelle von z, r als krummlinige Koordinaten einzuführen. Sei

$$\lambda = \lambda(\xi, \eta) = 1 : \left| f'(\zeta) \right|^2 = 1 : \left| \frac{d(z + i r)}{d(\xi + i \eta)} \right|^2,$$

dann erhalten wir (nach A. Timpe) folgende Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \tau_\xi &= r \sqrt{\lambda} \left(\frac{U}{r}\right)_\xi = -\frac{\sqrt{\lambda}}{r^2} \Phi_\eta = r \sqrt{\lambda} \, \Psi_\xi \\ \tau_\eta &= r \sqrt{\lambda} \left(\frac{U}{r}\right)_\eta = \quad \frac{\sqrt{\lambda}}{r^2} \Phi_\xi = r \sqrt{\lambda} \, \Psi_\eta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (23),$$

wobei Φ und Ψ den Gleichungen genügen

$$D_{-3} \Phi \equiv \left(\frac{1}{r^3} \Phi_\xi\right)_\xi + \left(\frac{1}{r^3} \Phi_\eta\right)_\eta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24),$$

bezw.

$$D_3 \Psi \equiv (r^3 \Psi_\xi)_\xi + (r^3 \Psi_\eta)_\eta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25),$$

die also gegenüber Koordinatentransformationen der genannten Art invariant sind.

Die Beziehung zwischen U und Ψ nach (22) bleibt ebenfalls unverändert bestehen. Für nicht-isometrische krummlinige Koordinaten lassen sich ähnliche Formeln aufstellen.

3. Elementare Lösungen in isometrischen Koordinaten. Die in endlicher Form bekannten Lösungen in isometrischen Koordinaten betreffen Meridianformen (mit

---

[1]) F. A. Willers, Die Torsion eines Rotationskörpers um seine Achse, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 55 (1907), S. 225, u. A. Timpe, Die Torsion von Umdrehungskörpern, Math. Ann. 71 (1911), S. 480.

[2]) Es sei hier darauf hingewiesen, daß sich für achsensymmetrische elastische Probleme, wie E. A. H. Love (Theorie der Elastizität, S. 317) gezeigt hat, die Spannungskomponenten durch dritte Ableitungen einer der Gleichungen $\Delta \Delta V = 0$ genügenden Spannungsfunktion V darstellen lassen; bei Love erscheint diese Darstellung etwas willkürlich, sie kann aber auch direkt erhalten werden, wie an anderer Stelle gezeigt werden soll.

spannungsfreien Rändern) und Belastungsverteilungen, die technisch jedoch nicht sehr bedeutungsvoll sind. Wenn die Begrenzung durch $\eta = \bar{\eta}$ gegeben ist, so sieht man sogleich, daß für alle Formen der Funktionen $f(\zeta)$ Lösungen dieser Art existieren, für welche das zugehörige r in der Gestalt $r = F(\xi)\, G(\eta)$ darstellbar ist, außerdem muß in der Kurvenschar $\eta =$ konst auch die Drehachse enthalten sein, die aus Symmetriegründen stets eine Spannungslinie ist. Auf diese Weise ergeben sich im wesentlichen nur die folgenden fünf Fälle:

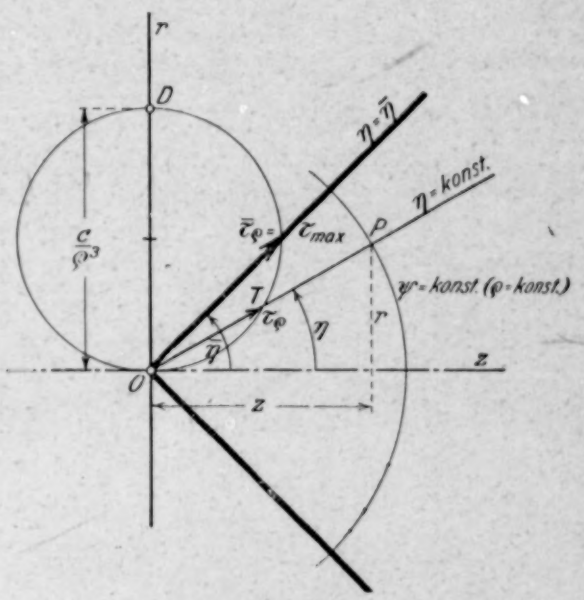


Abb. 2

a) Drehkegel[1]). Wir setzen in der Bezeichnung des vorigen Abschnittes

$$\xi + i\eta = l\,Z - l\,\bar{\varrho} = l\,\frac{\varrho}{\bar{\varrho}} + i\eta$$

$$\lambda = \frac{1}{z^2 + r^2} = \frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\bar{\varrho}^2}\, e^{-2\xi},$$

worin ϱ und η die gewöhnlichen Polarkoordinaten in der Meridianebene sind und $\bar{\varrho}$ eine beliebige Vergleichslänge ist; dann ist $\xi = l\,\frac{\varrho}{\bar{\varrho}}$ und $r = \varrho \sin\eta = \bar{\varrho}\, e^{\xi} \sin\eta$, $\eta = \bar{\eta}$ entspricht dem Mantel des Kegels. Von Gl. (24) bezw. (25) suchen wir solche Lösungen, die von η bezw. ξ allein abhängen und erhalten, wenn wir Φ so normieren, daß der Achse ($\eta = 0$) $\Phi = 0$ entspricht (siehe **1.**):

$$\Phi_\eta = -\,C \sin^3\eta, \quad \Phi = -\frac{C}{3}\,[2 - \cos\eta\,(2 + \sin^2\eta)], \quad \Psi_\xi = C\,e^{-3\xi} = \frac{C}{\varrho^3},$$

worin C eine Konstante bedeutet. Die Spannungslinien $\Phi =$ konst sind die Geraden $\eta =$ konst und die Teilspannungen nach ϱ und φ sind nach Gl. (23)

$$\tau_\varrho \equiv \tau_\xi = C\,\frac{1}{r^2\,\varrho} \sin^3\eta = C\,\frac{r}{\varrho^4} = C\,\frac{r}{(z^2 + r^2)^2} = \frac{C}{\varrho^3} \sin\eta, \quad \tau_\eta = 0 \quad . \quad . \quad (26).$$

Zeichnet man daher (Abb. 2) einen Kreis K mit dem Halbmesser $O\,D = \frac{C}{\varrho^3}$, so geben die Sehnen $O\,T$ die Schubspannungen τ_ϱ für alle Erzeugenden in Punkten im Abstande ϱ von O an. Das Torsionsmoment ist nach (19)

$$M = 2\pi\,\bar{\Phi} = -\,\frac{2\pi\,C}{3}\,[2 - \cos\bar{\eta}\,(2 + \sin^2\bar{\eta})] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27),$$

wodurch auch die Konstante C in (26) bestimmt ist.

b) Kugel. In ähnlicher Weise erhalten wir in denselben Koordinaten die Lösung für die Torsion der Kugel, natürlich wieder unter den besonderen Randbedingungen, die sich aus der Lösung selbst ergeben. Das soeben verwendete $\bar{\varrho}$, das zuvor nur aus Dimensionsgründen eingeführt wurde, sei hier der Halbmesser des äußeren Randes der gedrillten Kugel. Dann sind die entsprechenden Lösungen von (24) und (25)

$$\Phi_\xi = C\,e^{3\xi}, \quad \Phi = \frac{C}{3}\,e^{3\xi} = \frac{C}{3}\,\frac{\varrho^3}{\bar{\varrho}^3}, \quad \Psi_\eta = \frac{C}{\bar{\varrho}^3}\,\frac{1}{\sin^3\eta},$$

die Schubspannungen

$$\tau_\xi = 0, \quad \tau_\eta = C\,\frac{1}{r^2\,\varrho}\,e^{3\xi} = \frac{C}{\bar{\varrho}^3}\,\frac{\varrho^2}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

und endlich das Torsionsmoment

$$M = 2\pi\,\Phi = \frac{2\pi}{3}\,C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Dieses Torsionsmoment wird auf die Kugel übertragen durch zwei diametral einander gegenüber längs der z-Achse eingesteckte dünne Keile oder »Riffelachsen«, die

[1]) A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, V., 2. Auflage, Leipzig 1918, S. 186/87 die Gleichung (214) S. 187 gibt die Teilspannung parallel zur Drehachse an.

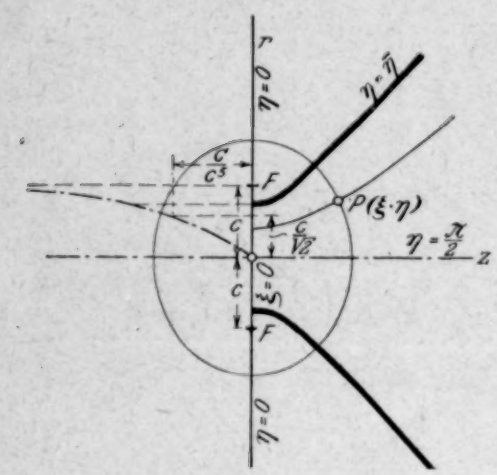


Abb. 3

also eine »linienförmige« Singularität bilden, wobei das Torsionsmoment gleichwohl endlich bleibt. Die Lösung für die Kugel mit nur 2 singulären Punkten an der Oberfläche ist, wie man sich leicht überzeugt, anf diese Weise nicht zu erhalten und ist nicht bekannt.

c) **Einschaliges Drehhyperboloid**[1]). Um die bisher verwendeten Bezeichnungen beibehalten zu können, setzen wir (Abb. 3)

$$z + i\,r = c\,\mathfrak{Sin}\,(\xi + i\,\eta)$$

also $z = c\,\mathfrak{Sin}\,\xi\cos\eta, \qquad r = c\,\mathfrak{Cof}\,\xi\sin\eta$

$\xi =$ konst entsprechen den Ellipsen, deren große Achsen in r liegen, $\eta =$ konst den hiezu konfokalen Hyperbeln. Es folgt

$$\frac{1}{\lambda} = c^2\,|\,\mathfrak{Cof}\,(\xi + i\,\eta)\,|^2 = c^2\,(\mathfrak{Cof}^2\,\xi - \sin^2\eta).$$

Suchen wir eine Lösung der Gleichung (24), die nur von η abhängt, so folgt, wenn für die Achse ($\eta = 0$) wieder $\Phi = 0$ folgen soll:

$$\Phi_\eta = -\,C\sin^3\eta, \qquad \Phi = -\,\frac{C}{3}\,[2 - \cos\eta\,(2 + \sin^2\eta)]$$

und ebenso das Ψ von (25), das nur von ξ abhängt:

$$\Psi_\xi = \frac{C}{\mathfrak{Cof}^3\,\xi}$$

Die Spannungslinien sind die Hyperbeln $\eta =$ konst und für die Teilspannungen ergeben sich die Ausdrücke

$$\tau_\xi = \frac{C}{c^3}\,\frac{\sin\eta}{\mathfrak{Cof}^2\,\xi\,\sqrt{\mathfrak{Cof}^2\,\xi - \sin^2\eta}}, \qquad \tau_\eta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

und für das Torsionsmoment wie zuvor

$$M = 2\,\pi\,\bar{\Phi} = -\,\frac{2\,\pi\,C}{3}\,[2 - \cos\bar{\eta}\,(2 + \sin^2\bar{\eta})] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Für den Kehlkreis $\xi = 0$ ergibt sich die Spannungsverteilung nach (28):

$$(\tau_\xi)_{\xi=0} = \frac{C}{c^3}\,\mathrm{tg}\,\eta = \frac{C}{c^3}\,\frac{r}{\sqrt{c^2 - r^2}}.$$

Für $r = \frac{c}{\sqrt{2}}$ ist $(\tau_\xi)_{\xi=0} = \frac{C}{c^3}$.

Wenn die Torsionsbelastung des Halbraumes $z > 0$ bis zum Rand der Kehlellipse reicht, so wird die Schubspannung am Rande unendlich, während das Torsionsmoment nach (29) einen endlichen Wert beibehält $\left(\bar{\eta} = \frac{\pi}{2}\,!\right)$. Für irgend ein anderes Drehhyperboloid $\bar{\eta}$ ist die Verteilung der Schubspannungen im Kehlkreis ebenfalls durch (30) gegeben, wobei r nur bis $\bar{r} = c\sin\bar{\eta}$ reicht. Der größte Wert der auftretenden Schubspannungen liegt stets am Rande des Kehlkreises.

d) Für das **Drehellipsoid** hat man zu nehmen:

$$z + i\,r = c\,\mathfrak{Cof}\,(\xi + i\,\eta), \qquad z = c\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta, \qquad r = c\,\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta,$$

$$\frac{1}{\lambda} = c^2\,(\mathfrak{Cof}^2\,\xi - \cos^2\eta).$$

Die hier in Betracht kommenden Lösungen von (24) und (25) lauten bezw.

$$\Phi_\xi = C\,\mathfrak{Sin}^3\,\xi, \qquad \Phi = \frac{C}{3}\,[\mathfrak{Cof}\,\xi\,(\mathfrak{Sin}^2\,\xi - 2) + 2], \qquad \Psi_\eta = \frac{C}{c^3\sin^3\eta},$$

sie ergeben die Schubspannungen

$$\tau_\xi = 0, \qquad \tau_\eta = \frac{C}{c^3}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\xi}{\sin^2\eta\,\sqrt{\mathfrak{Cof}^2\,\xi - \cos^2\eta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

---

[1]) E. Melan, Ein Beitrag zur Torsion von Rotationskörpern. Technische Blätter, Prag 1920, Nr. 48 und 49/50. Die Behandlung dieses Falles läßt sich bedeutend vereinfachen, wie es im Texte geschehen ist.

und das Torsionsmoment

$$M = 2\pi\overline{\Phi} = \frac{2\pi C}{3}[\mathfrak{Cof}\,\bar{\xi}\,(\mathfrak{Sin}^2\bar{\xi} - 2) + 2] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33),$$

wenn $\xi = \bar{\xi}$ die Randellipse vorstellt.

Für

$$\lim\, c = 0, \quad \lim_{\xi=\infty} c\,\mathfrak{Cof}\,\xi = \lim_{\xi=\infty} c\,\mathfrak{Sin}\,\xi = \varrho, \quad \lim \eta = \eta$$

ergibt sich, wie man leicht bestätigt, die in b) erhaltene Lösung für die Kugel wieder.

Die Belastung ist auf den Randhyperbeln $\eta = \bar{\eta}$ nach der durch Gl. (32) gegebenen Verteilung aufgebracht. Für $\eta = 0$ tritt sie in zwei Linienstücken auf, die beiderseits vom Rande bis zu den Brennpunkten reichen.

e) Drehparaboloid[1]). Setzt man endlich

$$z + ir = (\xi + i\eta)^2, \qquad z = \xi^2 - \eta^2, \qquad r = 2\xi\eta, \qquad \lambda = \frac{1}{4(\xi^2+\eta^2)}$$

und so sind die Kurven $\xi =$ konst. und $\eta =$ konst. zwei Scharen von Parabeln, deren gemeinsamer Brennpunkt im Ursprung liegt (Abb. 4). Die Lösung Φ von (24), die nur von η abhängt, lautet

$$\Phi_\eta = -C\eta^3, \qquad \Phi = -\frac{C}{4}\eta^4$$

und die von (25), die nur von ξ abhängt,

$$\Psi_\xi = \frac{C}{8\xi^3}.$$

Die Schubspannungen sind

$$\tau_\xi = \frac{C}{8}\,\frac{\bar{\eta}}{\xi^2\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \quad \tau_\eta = 0 \quad . \quad . \quad (34)$$

und das Torsionsmoment

$$M = 2\pi\overline{\Phi} = -\frac{\pi C}{2}\bar{\eta}^4 \quad . \quad . \quad . \quad (35).$$

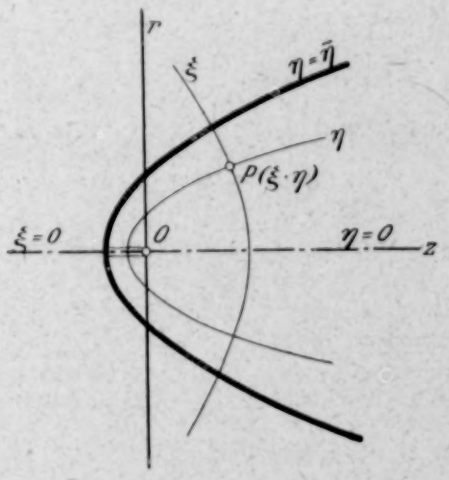


Abb. 4

Die Schubspannungen längs des ganzen Stückes BO der Parabel $\xi = 0$ werden unendlich nach dem in (34) festgesetzten Verteilungsgesetze, während ihr Moment den endlichen Wert (35) annimmt.

Für alle diese Fälle erhält man durch Differenzbildung unmittelbar die Lösungen für die zugehörigen Hohlkörper, sobald die Ränder der Höhlungen durch Kurven derselben Schar von Schubspannungslinien gebildet werden, der auch der äußere Rand angehört.

4. Lösungen für einseitig ins Unendliche reichende und geschlossene Hohlformen. Eine ausführliche Beschreibung von Fällen, die der technischen Praxis entsprechen sollen, ist von H. Arndt[2]) gegeben worden. Die dabei verwendete Methode beruht auf der Uebereinstimmung der Gl. (16) und (17) mit den Gleichungen für Strom- und Potentialfunktion einer achsensymmetrischen Strömung im fünfdimensionalen Raume (R_5); die Lösung wird aufgebaut aus passend gewählten Quellen bezw. Quellen und Senken, die auf der z-Achse angeordnet sind.

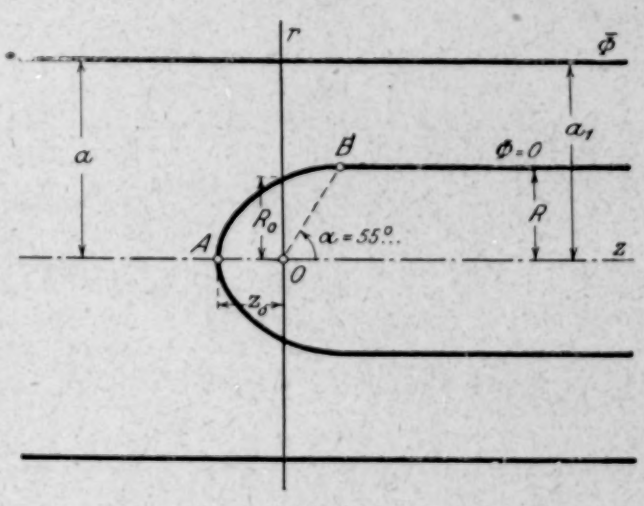


Abb. 5

a) Der Halbhohlraum nach Abb. 5 wird durch Ueberlagerung einer Punktquelle

[1]) Die Fälle b) und e) scheinen in der Literatur noch nicht behandelt worden zu sein.

[2]) W. Arndt, Die Torsion von Wellen mit achsensymmetrischen Bohrungen und Hohlräumen, Diss. Gött. 1916.

im Endlichen und einer gleichförmigen Strömung (Quelle im Unendlichen) gewonnen; sei R der größte Halbmesser (für $z = +\infty$) und $-z_0$ die Entfernung des Scheitels A von 0, dann gilt (wenn $\varrho = \sqrt{z^2 + r^2}$):

$$\Phi = C\left[-\frac{4r^4}{R^4} - \frac{z^3}{\varrho^3} + 3\frac{z}{\varrho} + 2\right], \qquad \Psi = C\left[3\frac{z}{z_0^4} - \frac{1}{\varrho^3}\right],$$

wobei $z_0 = {}^1/_2 \sqrt[4]{3 \cdot R}$ und C eine Konstante. Wenn ferner R_0 der dem Werte $z = 0$ entsprechende Querschnittshalbmesser ist, dann gilt $R = 1{,}19\, R_0$, $z_0 = 0{,}78\, R_0$. Der Rand des Hohlraumes ist durch $\Phi = 0$ dargestellt, die Kurven $\Phi =$ konst. sind die Spannungslinien. Als äußere Begrenzung der Hohlwelle diene $\Phi = \overline{\Phi}$. Die Schubspannungen sind

$$\tau_z = C\left[\frac{16\,r}{R^4} + \frac{3\,zr}{\varrho^5}\right], \qquad \tau_r = C\,\frac{3\,r^2}{\varrho^5} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36),$$

und die Gesamtspannung

$$\tau = \sqrt{\tau_z^2 + \tau_r^2} = \frac{16\,C}{R^4}\,r\sqrt{1 + \frac{3R^4}{8}\frac{z}{\varrho^5} + \frac{3}{256}\frac{R^8}{\varrho^8}}.$$

Für großes negatives z wird $\Phi = -\frac{4\,Cr^4}{R^4}$, also sind dort die Spannungslinien zylindrisch, wie es sein muß. Sei $r = a$ der Radius des Grenzzylinders, dann folgt

$$\overline{\Phi} = -\frac{4\,Ca^4}{R^4},$$

und das Torsionsmoment

$$M = 2\pi\overline{\Phi} = -\frac{8\pi\,Ca^4}{R^4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37).$$

Aus dem obigen Ausdruck für Φ findet man ferner, daß der äußere Halbmesser a_1 an der durchbohrten Seite (für $z = +\infty$) gegeben ist durch

$$a_1 = \sqrt[4]{a^4 + R^4} = a\sqrt[4]{1 + \left(\frac{R}{a}\right)^4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38),$$

was für nicht zu große $\frac{R}{a}$ kaum merkliche Verschiedenheit von a und a_1 ergibt.

Der größte Wert der auftretenden Schubspannung am Rande des Hohlraumes liegt an einer Stelle B (Abb. 5), für welche (unabhängig von den Abmessungen) $\alpha = 55^0\,1'\,14''$ ist. Dieses Maximum ist, wenn wir den Wert am Umfange der unausgebohrten Welle vom Halbmesser a (d. i. gleich dem Werte der ausgebohrten Welle für große positive z) mit τ_0 bezeichnen, wobei also $\tau_0 = \frac{2\,M}{\pi\,a^3}$, nach (37) (ohne Rücksicht auf das Vorzeichen)

$$\tau_{max} = 1{,}025\,\frac{R}{a}\,\tau_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39),$$

ist also ungefähr im Verhältnis $\frac{R}{a}$ kleiner als τ_0, womit die Unschädlichkeit des betrachteten Falles dargetan ist. Für größere Werte von $\frac{R}{a}$ ist die Lösung für einen Halbhohlraum in einer zylindrischen Welle gleichbleibenden Querschnittes nicht bekannt.

Aehnliche Kurven erhält man dadurch, daß man nicht einen einzelnen Quellpunkt betrachtet, sondern Quellstrecken, mit bestimmten Verteilungsgesetzen. Die Ergebnisse der anderen von W. Arndt durchgerechneten Fälle unterscheiden sich nicht erheblich von dem hier wiedergegebenen.

b) Für eine Quelle und Senke erhält man als Hohlraumumriß Ovale, deren Formen sich je nach der Entfernung von Quelle und Senke und dem Verhältnis der Ergiebigkeit zur Geschwindigkeit der überlagerten Parallelströmung in mannigfacher Weise verändern. Die beiden Hälften der flacheren, zigarrenähnlichen Formen unterscheiden sich, was Ort und Größe der auftretenden Schubspannungen betrifft, nicht merklich von dem in a) behandelten Halbhohlraum. Für die runderen, kugelähnlicheren Formen vergrößert sich die Größe der auftretenden größten Schubspannung am Innenrande bis um etwa 20 vH.

c) Die einfache Doppelquelle führt zu einem Kugelhohlraum. Das Maximum der Schubspannung am Rande der Höhlung tritt im Querschnitt durch die Doppelquelle auf und liefert den Wert

$$\tau_{max} = 1{,}25\,\frac{R}{a}\,\tau_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40),$$

wenn R den Radius der Kugel, a den Halbmesser des äußeren Begrenzungszylinders für große Werte von $|z|$ und τ_0 den Wert der Schubspannung am Rande für große $|z|$ bezeichnet.

5. Einzel-(Partikular)lösungen und Reihenansätze. Da die bekannten (sehr zahlreichen) Lösungen der achsensymmetrischen Strömungsaufgabe im R_3, d. h. der Gl. (10) und (11) unmittelbar für die praktisch wichtigere Klasse von Torsionsaufgaben für vorgegebene Körper mit vorgegebenen Oberflächenspannungen (insbesondere solchen mit spannungsfreien Mänteln) nicht verwertbar sind, hat A. Timpe[1]) dieses »direkte« Problem für eine Anzahl von Fällen in der Weise behandelt, daß er die Lösung, wenn sich die Drehbelastung des Mantels durch eine ganze rationale Funktion von z ausdrücken läßt, durch eine Reihe von Polynomen, oder, wenn sich die Drehbelastung durch eine Fourier-Entwicklung darstellen läßt, von trigonometrisch Besselschen Einzellösungen zusammensetzt; die Konstanten in den Reihen werden durch die Randbedingungen bestimmt bezw. diese Randbedingungen durch Fouriersche Integrale, die über solche Einzellösungen erstreckt sind, befriedigt. Von jeder Lösung der Gl. (11) kann man mittels der Gl. (22): $\Psi = \frac{\Psi}{r^2}$ eine Lösung von (17) gewinnen und daher auch das zugehörige Φ.

A. Timpe behandelt im einzelnen folgende Fälle: a) Unendlich langer Zylinder, der am Umfang des Querschnittes $z = 0$ durch das Moment M gedrillt und in den beiden unendlich fernen oder von $z = 0$ gleich weit entfernten Querschnitten je durch $-\frac{M}{2}$ gehalten wird; b) die in den Umfängen zweier beliebiger Querschnitte durch zwei entgegenwirkende Momente gedrillte Welle; c) die Torsion von Platten durch Momente, die auf die Grundflächen einwirken; diese Lösung wird auf das Problem eines Rades angewendet, mittels dessen ein Drehmoment auf eine damit verbundene Welle übertragen wird.

Es unterliegt auch keiner Schwierigkeit, die sogenannten allgemeinen Lösungen der Gl. (10) und (11) bezw. (16) und (17) anzugeben, durch deren Aufstellung jedoch für die Lösung bestimmt vorgegebener Fälle nicht viel gewonnen ist.

6. Näherungslösungen für technisch wichtige Fälle. a) Das wichtigste Ergebnis für die Anwendungen ist die Einsicht in das Maß der Spannungserhöhung durch Querschnittsübergänge mit verhältnismäßig kleinen Halbmessern an zylindrischen Wellen. Wenn auch die strenge Lösung für diesen Fall nicht bekannt ist, so ist es doch möglich, zu angenäherten Werten zu gelangen, wie zuerst A. Föppl[2]) gezeigt hat, deren Ergebnis sodann durch graphische Integration der Differentialgleichungen (16) und (17) verbessert wurde. (Abb. 6.)

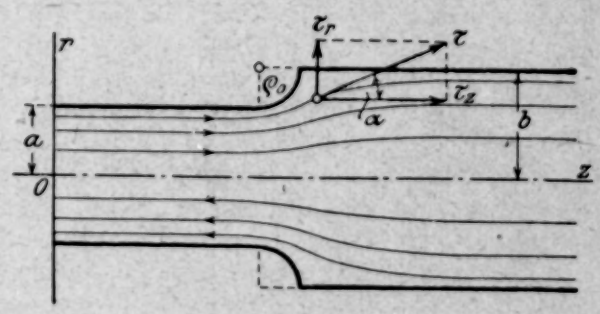


Abb. 6

A. Föppl erhält mit Hilfe des Stokesschen Satzes für den Spannungszuwachs $d\tau$, der einem Fortschreiten um das Stück dn in der Richtung der Normalen zur Spannungslinie $\Phi = \text{konst.}$ entspricht (Abb. 1), die Gleichung[3])

---

[1]) Siehe F. A. Willers, Die Torsion eines Rotationskörpers um seine Achse, Zeitschr. für Math. u. Phys. 55 (1907), S. 225 und A. Timpe, Die Torsion von Umdrehungskörpern, Math. Ann. 71 (1911), S. 480.

[2]) A. Föppl, Ueber die Torsion von runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser. Sitzungsber. d. math.-phys. Klasse der bayr. Ak. 35 (1905), S. 249 und S. 504. Die Beanspruchung auf Verdrehen an einer Uebergangsstelle mit scharfer Abrundung, Z. d. V. d. Ing. 50 (1906), S. 1032.

[3]) Wenn man die beiden Gl. (5) und (14) auf das den Spannungslinien $\Phi = \text{konst.}$ angepaßte (»natürliche«) Koordinatensystem bezieht, diese Gleichungen also auf Achsen transformiert, die in jedem Punkte mit Tangente und Normale von $\Phi = \text{konst.}$ zusammenfallen, erhält man unmittelbar die Gleichungen

$$\frac{\partial(r^2\tau)}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\tau}{r}\right) - \frac{1}{\varrho}\frac{\tau}{r} \equiv \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial \tau}{\partial n} - \frac{\tau \cos a}{r} - \frac{\tau}{\varrho}\right\} = 0,$$

von denen die erste wegen (21) von selbst erfüllt ist, während die zweite mit Gl. (40) übereinstimmt, die also nichts anderes als die Kompatibilitätsbedingung in den neuen Koordinaten ist. Für die numerischen Rechnungen werden die Spannungslinien im ganzen Verlaufe der Ausrundung als Kreise betrachtet, die Gl. (40) gilt aber für jede Stelle, in ihr ist nur die Krümmung an der betreffenden Stelle von Belang.

$$\frac{d\tau}{dn} = \frac{\tau \cos \alpha}{r} + \frac{\tau}{\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40),$$

worin α der Neigungswinkel der Tangente an die Φ Linie gegen die Drehachse z und ϱ der Krümmungshalbmesser dieser Linie an der betreffenden Stelle ist. An der Uebergangsstelle ist darin $\varrho = \varrho_0$ und $r \sim a$, dem äußeren Halbmesser der zylindrischen Welle, zu setzen. Für kleine ϱ_0 ist daher die Spannungszunahme am äußeren Umriß $\frac{d\tau}{dn}$ weit größer als im zylindrischen Teil der Welle; dadurch ist auch ein zahlenmäßiger Anhaltspunkt für die Größe dieser Spannungserhöhung gewonnen. An der Uebergangsstelle drängen sich die Spannungslinien enger zusammen, so daß in einer verhältnismäßig dünnen Schicht ein großer Teil des Torsionsmomentes übertragen wird, wodurch die inneren Schichten merklich entlastet werden; dadurch wurde Föppl zu der Vorstellung geführt, den Spannungszustand an der Uebergangsstelle zu vergleichen mit dem einer Hohlwelle, deren Wandstärke $= \eta \varrho_0$ gesetzt wird, wobei η wenig größer als 1 ist. Für $\eta = 1{,}5$ ergibt sich bei $\varrho_0 = 0{,}1\,a$ die Randspannung etwa 2,09 mal so groß als die einer Hohlwelle vom gleichen Halbmesser a.

Bei der graphischen Integration, die F. A. Willers nach einer von C. Runge gegebenen Methode ausgeführt hat, werden die Spannungslinien, zu denen die Achse und der Umriß des Drehkörpers gehören müssen, diesen möglichst angepaßt eingezeichnet und zwar so, daß sie »Schichten gleichen Torsionsmomentes« ergeben, d. h. zwischen je zwei benachbarten soll das gleiche Torsionsmoment übertragen werden. Dabei kann schon in ziemlich kleinen Entfernungen von der Uebergangsstelle die bekannte Lösung für den Kreiszylinder verwendet werden, für die die Spannungslinien die Parallelen zur Achse sind. An diese sind die Spannungslinien für die Uebergangsstelle passend anzuschließen und zu ihnen die orthogonalen Trajektorien zu ziehen. Durch graphisch ausgeführte Integrationen längs dieser wird dann mit Hilfe der Gl. (21) eine Korrektur der vorerst willkürlich eingezeichneten Spannungslinien vorgenommen, die insbesondere nach dem Rande an der Uebergangsstelle von Wichtigkeit ist, da aus dem Verlauf der Spannungslinien an der Uebergangsstelle mit Hilfe der Gl. (21) unmittelbar die dort eintretende Spannungserhöhung entnommen wird.

Für eine Welle mit einem aufgelagerten Bunde, wie sie sich z. B. bei Kammlagern finden, erhielt Willers für $\varrho_0 = 0{,}1\,a$ an der Uebergangsstelle als größten Wert etwa das 1,5- bis 1,6fache der Mantelspannung. Für einen Querschnittsübergang zwischen zwei zylindrischen Wellen durch eine Ausrundung in Form eines Viertelkreises mit $\varrho_0 = 0{,}1\,a$, wie sie auch Föppl angenommen, erhielt Willers als Größtwert der Spannung das 1,75fache der Mantelspannung, was einem $\eta \sim 1{,}9$ entspricht. Für den Fall plötzlicher Querschnittsänderung (ohne Uebergangskurve, also mit einspringender Ecke) erhielt Willers die Lösung durch einen Reihenansatz. In einspringenden Ecken wird die Spannung unendlich, in ausspringenden Null.

Dieser und einige ähnliche Fälle wurden von A. Wyszomirski[1]) mittels eines von Hele-Shaw angegebenen Stromlinienapparates auch experimentell untersucht, indem die Strömung einer dünnen Flüssigkeitsschicht (in einem Kanal zwischen zwei Glaswänden) beobachtet wurde, dessen Form mit dem Meridianschnitte des Körpers übereinstimmt. Zwischen beiden auf diese Weise miteinander in Verbindung gebrachten Problemen herrscht jedoch keineswegs eine tatsächliche Analogie, wozu auch noch kommt, daß der Einfluß der Zähigkeit der Flüssigkeit besonders an den Rändern, auf die es vor allem ankommt, von störendem Einfluß ist. Die erhaltenen Zahlenwerte sind für die vergleichbaren Fälle kleiner als die von Willers, die wegen der exakteren Methode als die gesicherteren bezeichnet werden müssen.

b) Die Spannungserhöhung in zylindrischen Stäben mit Einkerbungen ist von F. Willers nach der in a) skizzierten Methode und von L. Föppl[2]) durch eine Integraldarstellung mittels einer Partikularlösung der Gl. (16) und (17) gegeben worden, die einer ringförmigen Quelle um die Achse entspricht. Für den tiefsten Punkt der Kerbe ergibt sich bei einer kleinen, scharf eingeschnittenen Kerbe eine Spannungserhöhung auf das Doppelte der Mantelspannung.

---

[1]) S. A. Wyszomirski, Stromlinien und Spannungslinien, ein Versuch Probleme der Elastizitätslehre mit Hilfe hydraulischer Analogien experimentell zu lösen, Diss., Dresden 1914.

[2]) L. Föppl, Die Torsion runder Stäbe von veränderlichem Querschnitt, Sitzungsber. der math. phys. Klasse d. bayr. Akad. d. Wiss. 51 (1921).

c) Den gleichen Betrag finden J. Larmor und A. E. H. Love auch für die Spannungserhöhung durch einen nahe der Oberfläche liegenden kleinen Kugelhohlraum in einem gedrillten Stabe [1]).

d) Für dünnwandige Hohlkörper erhält man durch Einführung eines (über jeden senkrecht zum Rand geführten Schnitt) konstanten Mittelwertes der Schubspannung eine in vielen Fällen ausreichende Näherungslösung [2]). 143

KURZE AUSZÜGE

Mathematische Statistik.

Statistische Reihen. Eine Arbeit von Czuber (Über die Beurteilung statistischer Reihen auf ihren Zufallscharakter, Skandinavisk Aktuarietidskrift 1921, p. 65—96) stellt, wie eingangs betont wird, im wesentlichen eine Paraphrase zu v. Bortkiewicz's, Iterationen, Tschuproffs Arbeit über Stabilität der statistischen Reihe und eine Kritik einer Arbeit von Esscher über die Stabilitäts- und Korrelationsverhältnisse in der Sterblichkeit der schwedischen Bevölkerung 1886—1914 dar. Zunächst wird ein Calcul für die mathematische Erwartung aufgestellt. Die mathematische Erwartung einer Summe von zufälligen Größen ist gleich der Summe der mathematischen Erwartungen der Einzelgrößen. Dies gilt, gleichgültig, ob die Größen unabhängig sind oder nicht. Dagegen gilt der entsprechende Satz für die Multiplikation nur für unabhängige Größen. Der Vergleich zwischen dem Erwartungswert und dem empirisch gewonnenen Beobachtungswert gibt ein Maß dafür, inwieweit die betrachtete Materie sich den Zufallsgesetzen fügt. Dies führt zur Aufstellung des Divergenzkoeffizienten

$$Q^2 = \frac{\sum_1^n (x_\lambda - p\,s)^2}{npqs},$$

wobei x_λ die Zahl der Wiederholungen des günstigen Ergebnisses in einer Reihe mit s Versuchen, $p = 1 - q$ die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit und n die Zahl der Reihen bedeutet.

Der Unterschied der vorliegenden Darstellung gegenüber der von Lexis besteht darin, daß Lexis mit den relativen Häufigkeiten und mit empirisch bestimmten Wahrscheinlichkeiten rechnete. Der Gebrauch des Koeffizienten wird an einer Lotterieziehung illustriert. Es ergibt sich ein deutlicher Zufallscharakter. Dagegen führt eine Analyse der Würfelresultate von Wolf zu dem Schluß, daß ein systematischer Fehler in den Würfeln vorhanden sein muß. Der Begriff des Divergenzkoeffizienten wird dann entsprechend dem Poissonschen Schema für den Fall einer variierenden Grundwahrscheinlichkeit erweitert, was dazu führt, daß die Größen p, q, s einen Index bekommen. Dann wird der mittlere Fehler dieses Koeffizienten abgeleitet.

Etwas anders hat Tschuproff den Divergenz-Koeffizienten definiert. An einer Variabeln werden r Serien von je n Versuchen vorgenommen. Der Mittelwert der $i$ten Serie heiße $x_{i\,n}$, der aus allen Beobachtungen $x_{r\,n}$ ein beliebiges Resultat x_ν so ist

$$Q^2 = \frac{\frac{r}{r-1}\sum_1^n (x_{i,n} - x_{r,n})^2}{\frac{1}{r\,n-1}\sum_1^{nr} (x_\nu - x_{r,n})^2}.$$

Beide Definitionen stimmen um so genauer überein, je größer r. Dies wird durch eine längere algebraische Umformung gezeigt. Als Beispiel wird dann das Sterben in einer einjährigen Altersklasse während N Beobachtungsjahren von s unter Beobachtung stehenden Personen betrachtet. Hierfür wird die mathematische Erwartung des Quadrates der zufälligen Abweichung berechnet. Bezeichnet man mit ε_k die Totalabweichung einer Einzelbeobachtung sowohl herrührend von den zufälligen Störungen als von den Schwankungen der zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeit, so ergibt sich

$$\frac{1}{N}\,\mathfrak{E}\,(\Sigma\,\varepsilon^2) = \frac{p\,q}{s} + \frac{s-1}{s}\,\frac{\Sigma\,(p_k - p)^2}{N},$$

während sich bei Esscher eine falche Formel findet

Neuordnung der mathematischen Statistik. Unter diesem Titel zieht E. Blaschke (in der Skandinavisk Aktuarietidskrift p. 97 bis 133) aus der Kritik, die v. Mises an den Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung geübt hat, die für die mathematische Statistik notwendigen Konsequenzen. Der Endzweck der statistischen Forschung ist die Aufstellung von leicht handbaren Maßzahlen. Blaschke engt die Bedeutung der Wahrscheinlichkeits-

[1]) J. Larmor, The Influence of Flaws and Air-Cavities on the Strength of Materials. — A. E. Love, Analysis for Spherical Cavity, Phil. Mag. (Ser. 5 vol. 33, 1892) und Love, Theorie der Elastizität, S. 367.

[2]) A. und L. Föppl, Drang und Zwang, München 1920, II. Bd., S. 160.

theorie für die mathematische Statistik stark ein. Für die Bevölkerungsstatistik wird die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie im Wesentlichen verneint. Denn ihre Ergebnisse sind nicht Versuche mit konstanter Grundwahrscheinlichkeit, weil die Bevölkerung den bewußten Eingriffen der Gesellschaft unterliegt. Auch gibt es hier keine wiederholte Beobachtung desselben Gegenstandes. Bejaht wird die Wahrscheinlichkeitstheorie für die Versicherungsstatistik, da bei der Auswahl die Regellosigkeit erhalten ist. Immerhin ist auch diese Erwartungsbildung wegen des engen Zusammenhangs des beobachteten Materials mit der Bevölkerungsstatistik nur bedingt. Der Vorzug der Versicherungsstatistik beruht vor allem auf dem Mangel an systematischen Fehlern. Blaschke warnt vor einer Überschätzung des Lexisschen Dispersions-Kriteriums. Dieses gilt an sich für mathematische Wahrscheinlichkeiten. Gegen die Argumente, die aus der normalen Dispersion auf eine den betr. Ereignissen zugrunde liegende mathematische Wahrscheinlichkeit schließen wollen, konstruiert Blaschke 4 Fälle, wo das Kriterium von Lexis versagt. Den größten Erfolg hat die Wahrscheinlichkeitstheorie auf dem Gebiet der »von einer Ursache abhängigen statistischen Gesetze«, worunter Blaschke die Häufigkeitskurven versteht. Die dabei auftretenden Konstanten Präcisionsmaß, Medianwert, Mittelwert bedürfen keiner wahrscheinlichkeitstheoretischen Begründung, so daß die Lehre von den Frequenzkurven durch eine andere Auffassung über die Wahrscheinlichkeitstheorie nicht beeinflußt wird. Das gleiche gilt für Korrelations- und Ausgleichungstheorie. Die Heranziehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Verwandlung eines korrelativen in einen korrelationsfreien Zusammenhang, hat nur methodische Bedeutung. Natürlich sagt eine Korrelation nichts über den ursächlichen Zusammenhang aus. Die Ausgleichungstheorie wird durch die neueren Arbeiten über Kollektivlehre bereichert. Für die amtliche Statistik wünscht Blaschke, daß neben den Beobachtungswerten von nun an auch die mittleren und wahrscheinlichen Fehler publiziert werden.

Zum Vererbungsproblem. Paart man in einer zweigeschlechtlichen Anfangsgeneration mit den Eigenschaften a und $a+1$, deren Häufigkeiten p und q seien, jedes weibliche Organ mit jedem männlichen (also auch innerhalb desselben Individuums), und schreibt man einem Bastard das arithmetische Mittel der Eigenschaften der Eltern zu, so hat die Eigenschaft $a+\frac{\nu}{n}$ in der $m$ten Generation die Häufigkeit

$$\binom{n}{\nu} p^{n-\nu} q^{\nu}, \quad \text{wobei } n = 2^m.$$

Bei Mendel kommen nur die Nuancen a, $a+1/2$ und $a+1$ vor. Haben sie die Häufigkeiten p, r, q, so bleibt nach einem Satz von Hardy die Zusammensetzung der Population bei der obigen Paarungsmethode konstant. Davon ausgehend zeigt Herr K. G. Hagström (Ein erblichkeitstheoretisches Grenzproblem, Svenska Aktuarieföreninges Tidskrift, 1917, p. 164—176), daß auch eine Verteilung einer Generation auf n Klassen konstant ist, wenn deren Häufigkeiten den Termen der Entwicklung von $(p+q)^n$ proportional sind.

Fehlertheorie. Herr K. G. Hagström deutet in seinen »Bemerkungen zur Theorie der Beobachtungsfehler« (Svenska Aktuarieföreningens Tidskrift 1917, p. 67—70), die der Entwicklung der Fehlerfunktion zugrunde liegenden n Messungen als Punkt x in einen n dimensionalen Raum. Dann entspricht dem Wertsystem der Fehler ein variabler Punkt der auf einer Geraden durch x liegt. Ebenso wird die Ableitung des Gaussschen Fehlergesetzes mit Hilfe der Annahme des arithmetischen Mittels als wahrscheinlichster Wert geometrisch gedeutet.

Kritik der Korrelationstheorie. Die mathematische Statistik ist die Wissenschaft gewisser Schemata, welche den Phänomenen entsprechen sollen, die die praktische Statistik behandelt. Diese Schemata, vor allem das Urnenschema sind zu allgemein und zu abstrakt. Man sollte Schemata aufstellen, die gut passen, wie die Potentialtheorie für die theoretische Physik. Von diesem Standpunkt untersucht K. G. Hagström in zwei Arbeiten (»Der Begriff der statistischen Funktion« und »Bemerkungen zur Theorie der statistischen Funktion« Skandinavisk Aktuaretidskrift, 1919, p. 1—52 und 204—223) die Korrelationstheorie und greift sie außerordentlich stark an. Zunächst betrachtet er die älteren Arbeiten von Bravais und Galton. Er bezeichnet als Korrelationsfunktion eine positive Funktion $F(x, y)$, für die $\int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2} F(x,y)\,dx\,dy$ die Wahrscheinlichkeit angibt, daß x in das Intervall $a_1 a_2$ und y in das Intervall $b_1 b_2$ fällt. Von den dabei interessierenden Verteilungsfunktionen für die beiden Variabeln wird die in kleinen Intervallen konstante Funktion und die Gaußsche Fehlerfunktion betrachtet. Hat man zwei Variable x und y, welche von einer dritten Variablen τ derart abhängen, daß $F(x,\tau)$, $F(y,\tau)$ und die Verteilungsfunktion für τ Gaußsche Kurven sind, so läßt sich $F(x, y)$ auf die Form bringen

$$F(x,y) = \frac{\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}}{\pi} e^{-(\alpha x^2 - 2\beta xy + \gamma y^2)}$$

(normale Korrelationsfunktion). Die Äquiprobabilitätskurven sind Ellipsen. Der Korrelationskoeffizient wird definiert durch

$$r = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\,F(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 F(x,y)\,dx\,dy \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 F(x,y)\,dx\,dy}}$$

und wird zu $r = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}}$. Dann werden die Beziehungen zwischen den in $F(x, y)$, $F(x\tau)$, $F(y\tau)$ und der Verteilungsfunktion von τ auftretenden Konstanten gezeigt. Als speziellen Grenzfall bekommt man den Bravaisschen Fall, wenn nämlich $x = \Sigma \mu_r \tau_r$. Um eine Beobachtung nach diesem Schema zu untersuchen, muß man also die Annahme machen, daß die Korrelationsfunktion normal ist und daß x und y mit der Veränderlichen τ einen Zusammenhang von der oben geschilderten Art aufweisen. Beides sind ganz spezielle Hypothesen.

Auch der Fall

$$F(x, \tau) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 (x - \Sigma \mu_i \tau_i)^2}$$

$$F(y, \tau) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 (y - \Sigma \nu_i \tau_i)^2}$$

$$F(\tau_i) = \frac{c_2}{\sqrt{\pi}} e^{-c_i^2 \tau_i^2}$$

führt auf den Normalfall.

Der Verfasser polemisiert dann gegen die englische Schule, da ihr angeblich folgende falsche Sätze zugrunde liegen:

1. Wenn $r = 0$, so sind x und y unabhängig.

2. Wenn $r = 1$, so sind x und y einander proportional. Bei Pearson finden sich diese Sätze nicht. Bei Yule und Charlier findet sich Satz 2. Bezeichnet man die Tatsache, daß die Korrelationsfunktion $F(x\,y)$ zerlegbar ist in $p(x) . q(y)$ als Unabhängigkeit im gewöhnlichen Sinne, so zeigt der Autor die Unrichtigkeit einer Reihe von Sätzen, von welchen man nach dem Studium der Arbeiten der »Korrelationisten« vielleicht glauben könnte, daß sie bewiesen oder beweisbar wären.

Falsch sind folgende Sätze:

Wenn $r = 0$, so sind x und y von einander wenig abhängig, was bedeuten soll, daß $F(x, y)$ nicht vom Streifentypus mit sehr schmalen Streifen sein kann. Darunter ist zu verstehen, daß in der unmittelbaren Umgebung einer Kurve $f(x\,y) = 0$, das $F(x\,y)$ groß, sonst aber verschwindend klein ist. Einen sehr schmalen Streifen deutet man als einen funktionalen Zusammenhang der beobachteten Erscheinungen.

Wenn $r = 0$, so kann $F(x\,y)$ in $p(x) . q(y)$ zerlegt werden.

Auch für den Fall $r = 0$ wäre also tatsächlich ein Zusammenhang möglich. Und umgekehrt auch im Fall eines endlichen r wäre es möglich, daß die Korrelationsfunktion vom Streifentypus mit beinahe verschwindender Streifenbreite wäre.

Richtig ist: Wenn x und y im gewöhnlichen Sinne voneinander unabhängig sind, so ist $r = 0$. Die richtige Umkehrung lautet: Wenn $r \neq 0$, so sind x und y nicht im gewöhnlichen Sinne von einander unabhängig. **Ferner ist stets $|r| < 1$. Die Korrelationstheorie reduziert sich also auf folgendes:** 2 unabhängige Veränderliche erzeugen eine normale Korrelationsfunktion mit $r = 0$; findet man, daß $F(x, y)$ nicht vom normalen Typus oder vom normalen Typus mit $r \neq 0$, so ist ein Zusammenhang zu vermuten.

Stabilität und Korrelation von statistischen Reihen. Die Stabilität der Sterblichkeit in den verschiedenen Altersstufen wurde bisher hauptsächlich an versicherungsstatistischem Material untersucht. Es ergab sich in den meisten Altersstufen sehr große Stabilität. In den Meddelanden fran Lunds Astronomiska Observatorium, Serie II untersucht Fredrik Esscher die Sterblichkeiit der Gesamtbevölkerung in Schweden 1886—1914. Er kommt dabei zu ähnlichen Ergebnissen wie eine früher von Peek angestellte Untersuchung über die Sterblichkeit in den Niederlanden. Zunächst wird im Sinne der Dispersionstheorie als Maß für die Wirkung der störenden Kräfte das Quadrat des Divergenz-Koeffizienten verwendet, das richtig

$$Q^2 = 1 + \frac{(s-1)\ r_2}{p\,q}$$

lautet. Dabei bedeutet s die Zahl der beobachteten Personen, p den Durchschnitt der in N Versuchsreihen auftretenden Grund-Sterbewahrscheinlichkeiten, η_2 das Quadrat des mittleren Fehlers der Grundwahrscheinlichkeiten. Daneben wird als Stabilitätsmaß auch das Hundertfache des Störungskoeffizienten ρ gebraucht. Er drückt die Schwankungen der Serienwahrscheinlichkeiten in Prozenten der Grundwahrscheinlichkeit aus, so daß

$$100\,\varrho = \frac{100\sqrt{r_2}}{p}$$

(v. Bortkiewicz's relative wesentliche Schwankungskomponente).

Der Untersuchung liegt die Sterbenswahrscheinlichkeit in Schweden 1886—1914 getrennt nach dem Geschlecht für je fünfjährige Altersklassen zugrunde. Die beobachteten Sterbenswahrscheinlichkeiten wurden zunächst mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate durch Parabeln ausgeglichen, was Escher als „Elimination der säkularen Variation" bezeichnet. Hierbei wird ein originelles Verfahren angegeben, derart, daß das Hinzufügen eines neuen Gliedes an den bereits bestimmten Koeffizienten nichts ändert. Wenn man also sieht, daß eine vorgenommene Ausgleichung nicht genügt, so kann man nachher unter Beibehaltung der berechneten Koeffizienten neue Glieder berücksichtigen. Dann wird die Dispersion der ausgeglichenen Reihe auf die Bernoullische Dispersion und die Verbreitung der Grundwahrscheinlichkeit um die ausgeglichene Kurve zurückgeführt. Es genügt für die ganze Zeitspanne eine Parabel zweiten Grades, für die Teilperioden (bis 1900 und nach 1900) je eine einfache Gerade. Die Abnahme der Sterbenswahrscheinlichkeit war am stärksten für die Kinderjahre. Die Dispersionen sind für alle Altersgruppen übernormal. Wie aus den ρ-Wertes hervorgeht,

ist die Stabilität am niedrigsten bei den Jugendlichen, in den meisten Altersgruppen hat sie in der zweiten Hälfte der beobachteten Zeit zugenommen. Zwischen Stabilität und Korrrelation zweier Reihen besteht ein enger Zusammenhang. Es ist ein besonderes Verdienst der Esscherschen Arbeit, daß sie durch eine eingehende Korrelationsuntersuchung die Stabilitätsuntersuchung ergänzt.

Die Schwankungen machen es wahrscheinlich, daß die Sterbenswahrscheinlichkeiten durch äußere Faktoren beeinflußt wurden. Durch eine Korrelationsuntersuchung wurde nun ermittelt, inwieweit diese Faktoren den verschiedenen Altersgruppen gemeinsam waren. Der aufgestellte Koeffizient ist analog mit Bortkiewicz's Syndromiekoeffizient, berücksichtigt jedoch die verschiedenen Beobachtungszahlen der Reihen nicht. Unterscheidet man fünfjährige Altersgruppen und drei Zeitgruppen, so sieht man aus dem Vergleich mit den möglichen Maximalwerten, daß die Faktoren, die den Verlauf der Sterblichkeit beeinflußten, zum größten Teil den verschiedenen Altersstufen einer Gruppe gemeinsam sind. Auch zwischen den Sterblichkeitsziffern der beiden Geschlechter ist eine außerordentlich starke Korrelation vorhanden. Der Korrelationskoeffizient beträgt für die ganze Beobachtungszeit $r = 0{,}972$. Die störenden Kräfte, die die Sterbenswahrscheinlichkeiten in den verschiedenen Altersstufen einer fünfjährigen Gruppe, in entsprechenden männlichen und weiblichen fünfjährigen Gruppen und in naheliegenden Gruppen desselben Geschlechts beeinflussen, hängen durch starke positive Korrelation zusammen, ebenso die störenden Kräfte innerhalb weit voneinander entfernter Altersstufen.

Berlin. E. I. Gumbel. 165

KLEINE MITTEILUNGEN

Das Schaukelpendel. Wenn eine Schaukel ohne äußeren Anstoß in Betrieb gehalten oder gesetzt werden soll, so muß die auf der Schaukel befindliche Person, wie man aus der Erfahrung weiß, ihren Schwerpunkt in einer (oder wirkungsvoller in beiden) Endlagen senken und beim Durchgehen durch die Mittellage heben. Faßt man die Schaukel samt Schaukler als ein Pendel auf, dessen Drehpunkt mit dem Aufhängepunkt der Schaukel zusammenfällt, so kann man auch sagen, die Energie der Pendelbewegung werde durch die Bewegungen des Schauklers relativ zur Schaukel in dem eben angegebenen Sinne ständig vermehrt.

Über die Art des Energieübergangs vom Schaukler an das Pendel erhält man Aufschluß, wenn man die Bewegung nach der vereinfachten Annahme der Abb. 1 untersucht:

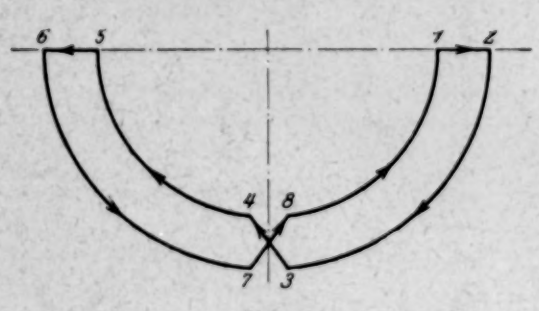


Abb. 1

Man setzt voraus, die Schaukel habe einen Gesamtausschlag von 180° und der Schaukler führe die Senkung seines Schwerpunkt in den Endlagen und die Hebung in der Mittellage so rasch aus, daß die tangentiale Bewegung gegenüber der radialen vernachlässigt werden kann. Der Schwerpunkt durcheilt also nacheinander die Lagen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Wenn man Lager- und Luftreibung vernachlässigt, wird der Anordnung von außen keine Energie zugeführt. Die Energiewanderung ΔE der Pendelbewegung während einer vollen Schwingung ist demnach gleich der Arbeit, die der Schaukler bei seinen Bewegungen leistet. Die Bewegungen von 1 nach 2 und von 5 nach 6 erfolgen ohne Energieumsetzung, da die Bewegung des Schwerpunkts senkrecht zu der einzigen an ihm angreifenden Kraft, der Schwerkraft G, erfolgt. DieMasse m muß allerdings im Punkte 1 (bezw. 5) beschleunigt werden; die dazu aufgewandte Energie wird aber wieder zurückgewonnen bei der nachfolgenden Verzögerung im Punkte 2 (bezw. 7). Die Entfernung zwischen den Punkten 1 und 2 (bezw. 5 und 6) ist mit Δr, der Pendelhalbmesser mit r bezeichnet. Beim Durchgehen durch die Mittellage greifen am Pendel die Schwerkraft G und die Zentrifugalkraft $Z = \frac{mv^2}{r}$ an, die beide der Bewegung von 3 nach 4 bezw. von 7 nach 8 entgegengesetzt gerichtet sind. Da diese Arbeit während einer vollen Pendelschwingung zweimal geleistet wird, ist:

$$\left.\begin{aligned} \Delta E &= 2\,\Delta r\,(G+Z) = 2\,\Delta r\left(mg + \frac{mv^2}{r}\right), \\ &= 2\,\Delta r\,mg\,(1+2) = 6\,\Delta r\,mg \\ &\text{wegen } v = \sqrt{2gr} \end{aligned}\right\} \quad (1).$$

Wenn der Pendelausschlag nicht 180° sondern 2α ist (Abb. 2), so ist, wie man sofort übersieht,

$$\left.\begin{aligned} \Delta E &= 2\,\Delta r\,mg\,(1-\cos\alpha) + 2\,\frac{mv^2}{r}\,\Delta r, \\ &\text{wobei } v^2 = 2gr\,(1-\cos\alpha), \text{ also} \\ \Delta E &= 2\,\Delta r\,mg\,(1-\cos\alpha)\,(1+2) \\ &= 6\,\Delta r\,mg\,(1-\cos\alpha) \end{aligned}\right\} \quad (2),$$

also auch hier entfällt ein Drittel der gesamten Energieänderung auf die Arbeit gegen die Schwerkraft und zwei Drittel auf

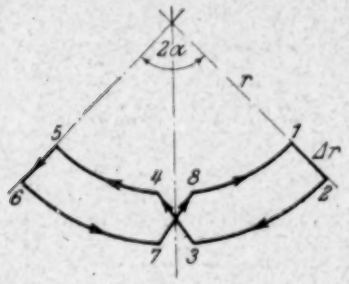


Abb. 2

Arbeit, die gegen die Zentrifugalkraft geleistet wird.

Hat man ein physikalisches Pendel, das in A in Schneiden gelagert ist, und auf dem sich der Schaukler oberhalb A befindet, so kann der Schaukler das Pendel durch Heben seines Schwerpunkts in den äußeren Lagen und durch Senken in der Mittellage in Schwung halten. Schwerkraft und Zentrifugalkraft sind in diesem Falle entgegengesetzt gerichtet und es ist:

$$\left.\begin{aligned} \Delta E &= 2\,\Delta r\,mg\,(1-\cos\alpha)\,(2-1) \\ &= 2\,\Delta r\,mg\,(1-\cos\alpha) \end{aligned}\right\} \quad (3).$$

Das Schaukelpendel gewinnt technisches Interesse, wenn man den Mann auf der Schaukel durch eine schwingende Masse ersetzt. Der Schaukler hebt während einer vollen Schaukelschwingung seinen Schwerpunkt zweimal und senkt ihn zweimal. Man kann den Schaukler ersetzen durch eine Schwingungsanordnung, deren Schwingungsdauer doppelt so groß ist wie die Dauer der Pendelschwingung, also eine Anordnung, bei der die Masse ebenfalls während einer vollen Pendelschwingung zweimal gehoben und zweimal gesenkt wird. Eine Anordnung dieser Art ist in Abb. 3 dargestellt. Eine Pendelstange p ist in A drehbar gelagert und trägt den Festpunkt B, an dem eine Feder f gehalten ist. An f hängt die Masse m, die sich längs der Pendelstange auf und ab bewegen kann. Die Feder f ist so bemessen, daß die Eigenschwingungzahl der Anordnung m, f doppelt so groß ist wie die Eigenschwingungszahl des Pendels.

Den Muskelkräften, die der Schaukler beim Heben und Senken seines Gewichtes mit der Periode der doppelten Schwingungszahl der Schaukel ausübt, muß beim Schaukelpendel der Abb. 3 ein periodischer Antrieb entsprechen, der von p auf m im Rhythmus der Eigenschwingungszahl der Anordnung m, f ausgeübt wird. Wenn dieser Antrieb so wirkt, daß m in den beiden Endlagen eine Bewegung von A weg und in der Mittellage nach A zu ausführt, so ist der Schaukelvorgang getreulich nachgeahmt und das Schaukelpendel wird sich selbst in Gang halten. Bevor diese erzwungene Bewegung behandelt wird, wollen wir die Bewegung untersuchen, die ein sich selbst überlassenes schwingendes Schaukelpendel der in Abb. 3 dargestellten Art ausführt.

Das Schaukelpendel ohne äußeren Antrieb. Es wird angenommen, die Masse des Pendels p sei groß gegen m, die von f dagegen vernachläßigbar klein gegen m. Es sei ferner m reibungsfrei längs der Pendelstange geführt. Wenn die reduzierte Pendellänge mit l_r bezeichnet wird, lautet die Gleichung für den Schwingungsausschlag:

$$C = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l_r}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l_r}}\,t\right) \quad (4).$$

Die Dauer einer vollen Pendelschwingung ist demnach:

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}.$$

Die Schwingungsdauer von m, f ist also:

$$T_m = \frac{1}{2}\,T_p = \pi\sqrt{\frac{l_r}{g}} \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Daraus kann die Spannkraft c, die bei der Durchbiegung der Feder f um 1 cm auftritt, berechnet werden:

$$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}; \qquad c = \frac{4\,m\,g}{l_r} \quad \ldots \quad (6).$$

Man denkt sich nun den Beobachter auf dem Pendel sitzend und untersucht die Bewegung der Masse m relativ zu p. Als Zusatzkräfte müssen bei der Relativbewegung die Zentrifugalkraft $Z = m\,r\,w^2$ und die Corioliskraft $C = m\,w\,\frac{dx}{dt}$ beigefügt werden, wenn w die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit der Pendelschwingung bezeichnet. Die Richtung der Corioliskraft fällt mit der Bahntangente, die der Zentrifugalkraft mit dem Halbmesser zusammen. Da die Bewegungsgleichung in radialer Richtung — x-Richtung in Abb. 4 — aufgestellt werden soll, tritt die Corioliskraft in der nachfolgenden Gleichung nicht in Erscheinung, während die Zentrifugalkraft in voller Größe einzusetzen ist.

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = Z - cx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

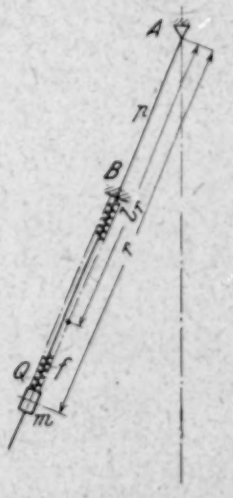


Abb. 3

Abb. 4

Es wird ferner vorausgesetzt, daß x vernachlässigbar klein ist gegen r, so daß der Abstand der Masse m vom Pendeldrehpunkt A als zeitlich unveränderlich angesehen werden kann.

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= mrw^2 - \frac{4\,mg}{l_r}x \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= rw^2 - \frac{4\,g}{l_r}x \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8).$$

Aus Gl. (4) folgt ferner:

$$w = \frac{d\varphi}{dt}; \qquad \varphi = \varphi_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l_r}}\,t.$$

$$w = \varphi_0\sqrt{\frac{g}{l_r}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l_r}}\,t\right) \quad \ldots \quad (9),$$

wobei die Voraussetzung gemacht ist, daß sich das Pendel zur Zeit $t = 0$ in einer äußersten Lage — also $w_0 = 0$ befindet. Der größte Pendelausschlag ist mit φ_0 bezeichnet. Die Verbindung der Gleichungen 8 und 9 liefert:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{r}{l_r}g\varphi_0^2\sin^2\left(\sqrt{\frac{g}{l_r}}\,t\right) - \frac{4\,g}{l_r}x \quad (10).$$

Zur weiteren Behandlung dieser Gleichung wird das zweite Glied in eine Fouriersche Reihe aufgelöst. Man erhält im Intervall $\sqrt{\frac{g}{l_r}}\,t = 0$ bis $\sqrt{\frac{g}{l_r}}\,t = 2\pi$ unter Weglassung der Glieder von höherer Ordnung:

$$\sin^2\left(\sqrt{\frac{g}{l_r}}\,t\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(2\sqrt{\frac{g}{l_r}}\,t\right) \quad (11).$$

Dies eingesetzt in Gl. (10) liefert die Differentialgleichung des Systems:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g\varphi_0^2 r}{2\,l_r} - \frac{g\varphi_0^2 r}{2\,l_r}\cos\left(\sqrt{\frac{4\,g}{l_r}}\,t\right) - \frac{4\,g}{l_r}x \quad (12).$$

Wenn man die Betrachtung über eine volle Pendelschwingung hinaus ausdehnt, muß man beachten, daß zwar die Änderung des größten Ausschlags $\Delta\varphi_0$ während einer Pendelschwingung bei kleinem m vernachläßigbar klein ist gegen φ^0, daß aber diese kleinen Änderungen von φ_0 sich addieren und daß schließlich ihre Summe nicht mehr gegen φ_0 vernachlässigt werden darf. Die Gleichung (12) ist deshalb nur als Annäherung für die Bewegung während einer Schwingung aufzufassen.

Das 3. Glied der Gleich. (12) ist eine Kraft von der Periodendauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{4\,g}}$. Wenn dieses Glied aus der Gleich. (12) fortgelassen wird, so erhält man die Gleichung für die Eigenschwingung der Anordnung m, f ohne Zentrifugalkraft, also nach Gleich. (5) eine Schwingung von der gleichen Periode $T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{4\,g}}$. Die durch Gleich. (12) wiedergegebene Bewegung ist demnach eine Schwingung auf die im Rythmus der Eigenschwingungszahl eine periodische Kraft einwirkt. Eine solche Erscheinung nennt man eine Resonanzschwingung, mit der bei fehlender Dämpfung ein stetiges Anwachsen der größten Ausschläge von m verbunden ist.

Da die Gesamtenergie des Schaukelpendels, auf das von außen keine antreibende oder bremsende Kraft einwirken soll, zeitlich gleich bleibt, muß der Ausschlag des Pendels in dem Maße abnehmen, wie der Ausschlag der Masse zunimmt. Die Energie geht von der Pendelbewegung an die Schwingung der Masse auf dem Pendel stetig über. Da die periodische Kraft auf m in der Mittellage nach unten einwirkt, macht die freischwingende Masse auf dem Schaukelpendel eine Bewegung, die der des Schauklers auf der Schaukel entgegengesetzt gerichtet ist: In den Endlagen bewegt sich die Masse dem Drehpunkt zu und in der Mittellage vom Drehpunkt fort; die Wirkung ist ebenfalls derjenigen entgegengesetzt, die bei einer angetriebenen Schaukel beobachtet wird. Der Pendelausschlag nimmt ständig ab.

Das Zusammenwirken der beiden Schwingungen kann an einer Ausführung nach Abb. 5 untersucht werden, wenn man die Stromzuführung (deren Zweck im nächsten Abschnitt besprochen wird), unterbricht: Man bindet zuerst die Masse m in der Führung d fest; man beobachtet dann, daß das Pendel, das in einer Schneide e mit geringer Reibung gelagert ist, lange Zeit zum Ausschwingen nötig hat. Darauf läßt man $m$frei schwingen und hat. Darauf läßt man m frei schwingen und stellt fest, daß die Ausschläge von m rasch zu- und infolgedessen die Ausschläge des Pendels rasch abnehmen. Um zu verhüten, daß die Masse schon nach wenigen Pendelschwingungen an den Begrenzungen in den Endlagen — also bei d — anstößt, kann man die Reibung in den Führungen so stark vergrößern, daß der Pendelausschlag nur bis zu einer beschränkten Größe anwächst. Die der Pendelschwingung entzogene Energie wird dann in Reibung auf dem Pendel vernichtet. Man hat die einfachste — aber allerdings eine wenig wirkungsvolle — Vorrichtung, mit der man lästige Schwingungsbewegungen (z. B. die Schlingerbewegung auf Schiffen) dämpfen kann. Auf dem zu dämpfenden Pendel, also etwa auf dem Schiff, wird eine in senkrechter Richtung frei schwingende Masse m eingebaut, deren Eigenschwingungszahl gleich dem Doppelten der Schiffsschwingungszahl ist. Durch entsprechendes Festziehen der Führungslager d werden die Ausschläge von m auf das gewünschte Maß gebracht. Die Energie der Schlingerbewegung wird durch Reibung innerhalb des schwingenden Körpers (Schiffes) vernichtet. Auf dem gleichen Prinzip beruhen die in der Praxis üblichen Dämpfungen der Schiffsschlingerbewegungen, der Schlicksche Schiffskreisel und der Frahmsche Schlingertank. In beiden Fällen wird, wie beim Schaukelpendel, die Schlingerenergie durch Reibungskräfte innerhalb des Schiffes aufgezehrt. Die Anordnung nach Abb. 5 habe ich mit Vorteil als Demonstrationsmodell für Dämpfungen von Schiffsschlingerbewegungen in meiner Vorlesung über technische Schwingungslehre benützen können.

Das Schaukelpendel mit Antrieb der Schwungmasse. Das Schaukelpendel

kann mit elektrischem Antrieb versehen werden und sich selbst in Schwingung halten. Eine Anordnung dieser Art ist in Abb. 5 dargestellt. Die Schwungmasse besteht hier aus einem Eisenkern m, der an der Feder f hängt und der in die Magnetspule b gezogen wird, sobald der Stromkreis an der Kontaktstelle h geschlossen wird. Das Schließen des Stromkreises erfolgt durch ein federndes Kontaktstück in den beiden Endlagen des Pendels. Die Eigenschwingungszahl der Anordnung m, f ist gleich dem Doppelten der Pendelschwingungszahl. Die Masse m wird in den Endlagen durch die magnetische Kraft im Rythmus der Eigenschwingungszahl nach unten gezogen und sie federt infolge der Federkraft in der Mittellage wieder nach oben zurück. Die Masse führt gleiche Bewegungen aus wie der Schaukler auf der Schaukel, und das Pendel wird durch diese Bewegungen in Gang gehalten.

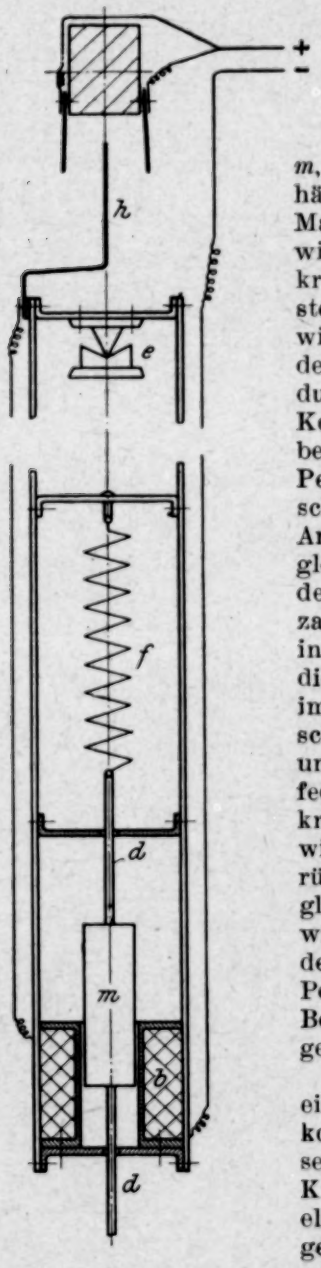


Abb 5

Die Anordnung ist eine zwar sehr unvollkommene, aber auch sehr einfache elektrische Kraftmaschine, in die elektrischer Strom eingeleitet und in der kinetische Energie gewonnen wird. Der Wirkungsgrad war bei den bisherigen Ausführungsformen gering, da durch den Strom eine Schwingung erzwungen werden muß, die der natürlichen Schwingung der Masse ohne Strom entgegengesetzt gerichtet ist, wie die Betrachtung im vorausgehenden Abschnitt zeigte. Die Anordnung kann aber mit Erfolg vor allem dort benutzt werden, wo der Wirkungsgrad eine untergeordnete Rolle spielt, z. B. als Antrieb eines Pendels, mit dem unterbrochener Gleichstrom von ganz bestimmter und gleichbleibender Periodendauer erzeugt werden kann. Sie kann ferner als Antrieb eines Sekundenpendels und zur Betätigung der Zeitmarkierung bei Zeitindikatoren Verwendung finden.

Braunschweig. O. Föppl. 109

Die Hermannschen Schablonen zur harmonischen Analyse. Vor etwa 30 Jahren veröffentlichte der Königsberger Physiologe und Mathematiker L. Hermann im 47. Bande von Pflügers Archiv für gesamte Physiologie (1890, S. 45 ff.) ein Verfahren zur harmonischen Analyse, das erst heute ins technische Büro eindringt: denn ein Ingenieur hat selten Gelegenheit, das Archiv für die gesamte Physiologie des Menschen und der Tiere zu lesen; und wenn ein Physiologe oder gar Philologe die merkwürdigen Zeichen:

$$\int_0^{nh} \quad \text{oder} \quad \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}$$

in einem Aufsatze erblickt, so blättert er schnell weiter.

Dabei ist das Verfahren, auf das mich Herr Prof. Panconcelli-Calzia freundlichst aufmerksam gemacht hat, äußerst praktisch: es arbeitet mit einem Minimum an Rechnungsvorgängen, vermeidet Vorzeichen-Überlegungen und ist für jedermann verständlich. Die elegante Lösung schließt Fehler auch bei geringerer Aufmerksamkeit vollkommen aus. Die Schablonen arbeiten ebenso mechanisch wie ein Analysator. Sie können dazu beitragen, daß man im technischen Büro weit mehr als bisher die harmonische Analyse durch billige Hilfskräfte vornehmen läßt.

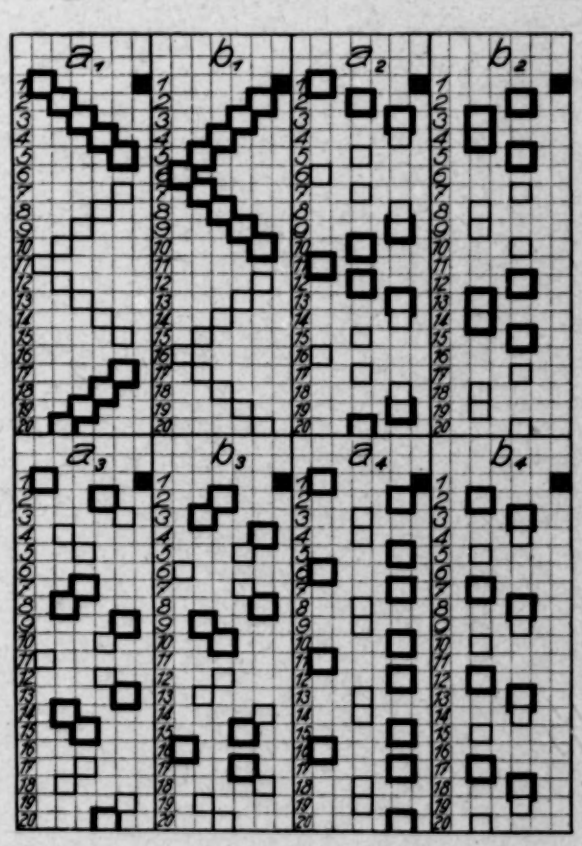


Abb. 1. Vorlagen zu den Schablonen 1–4.

Kurze Skizze des Verfahrens[1]).

Zunächt möchte ich an Hand von 5 Abbildungen das Verfahren ganz kurz beschreiben.

a) Das Handwerkszeug.

α) Man zeichnet ein Linienblatt für die Tabelle A (s. Abb. 4 u. Abb. 5, Blatt 2).

β) Nach Abb. 1 bis 3 (Vorlagen zu den Schablonen) werden auf gutem Pauspapier in der Größe des Linienblattes die Schablonen:

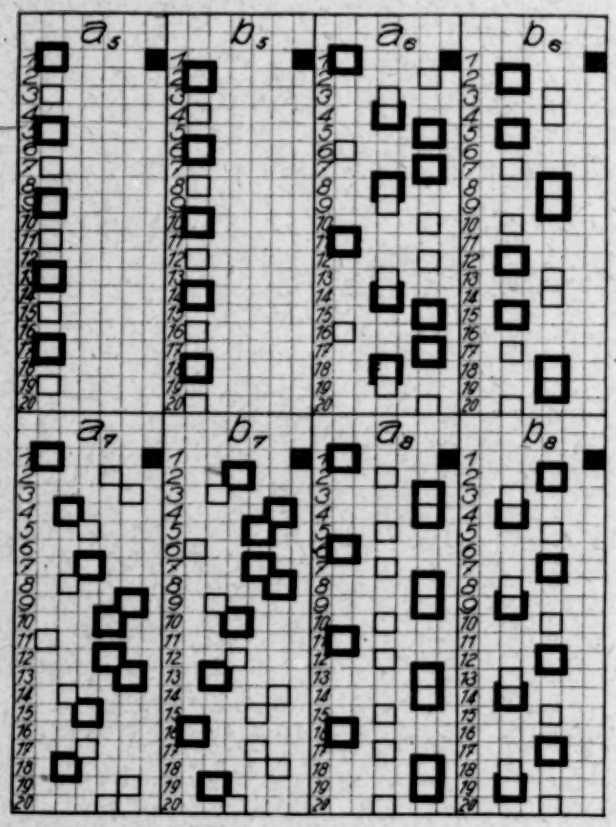


Abb. 2. Vorlagen zu den Schablonen 5–8.

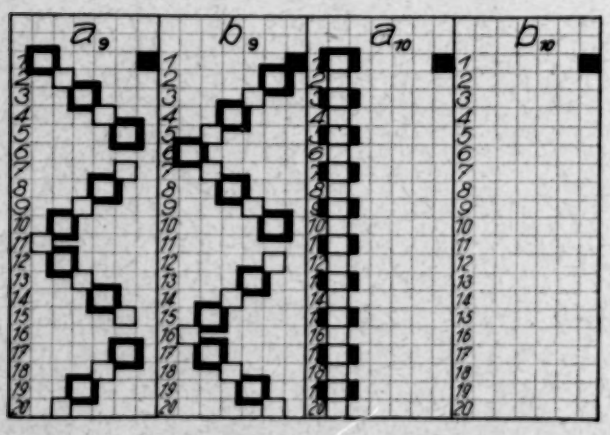


Abb. 3. Vorlagen zu den Schablonen 9 und 10.

[1]) Vergl: W. Lohmann harmonische Analyse zum Selbstunterricht (8 Tafeln, 32 Seiten). Verlag: Fischers Medizinische Buchhandlung, Berlin W.

a_1 b_1
a_2 b_2
⋮ ⋮
a_{10} b_{10}

hergestellt und zu einem Buch zusammengeheftet.

b) Die Arbeit des Ingenieurs.

α) Die Abszissenachse wird so gezogen, daß sie möglichst dicht unter der Kurve liegt.

β) 20 äquidistante Ordinaten einer Periode der Kurve werden gemessen und ihre Längen in die erste Spalte der Tabelle A neben die dort stehenden Ziffern von 1 bis 20 hingeschrieben (s. Abb. 5, Blatt 1 und 2).

c) Die Arbeit der Hilfskraft.

α) Die Tabelle A wird vorschriftsmäßig ausgefüllt. Die in Spalte No. 1 befindlichen Längen der Ordinaten werden

in Spalte No. 2 mit 0,95 multipliziert
» » » 3 » 0,81 »
» » » 4 » 0,59 »
» » » 5 » 0,31 »

Spalte No. 6 bleibt frei, ebenso die Zeilen No. 1, 6, 11 und 16 (s. Abb. 5, Blatt 2).

β) Zur Bestimmung irgend eines Koeffizienten $a_1\, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{10}, b_{10}$ legt man die betreffende Schablone auf die Tabelle A. Die Schablone hat fette und magere (oder blaue und rote) Fenster, in welchen die erforderlichen Zahlen sichtbar werden.

Man subtrahiert die Summe der mageren Fenster von der Summe der fetten Fenster und dividiert diese Differenz durch 10.

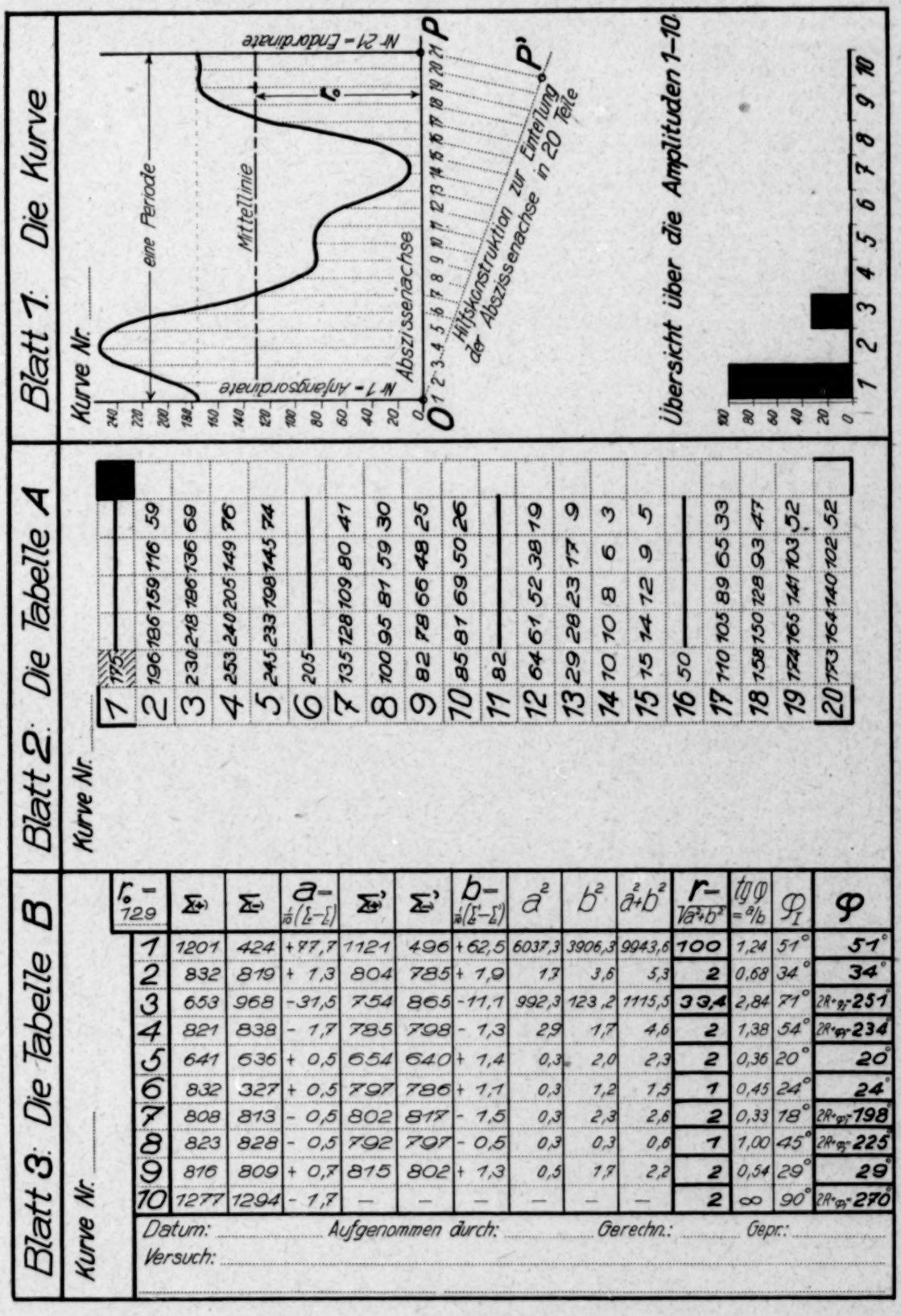
Dann hat man den gesuchten Koeffizienten.

Kurze Erläuterung des Verfahrens.

Bezeichnet man die zur Verwendung kommenden Ordinaten der zu untersuchenden Kurve mit y_1 bis y_{20}, die zugehörigen Abszissen im Bogenmaß gemessen mit α_1 bis α_{20}, so daß

	0°	18°	36°	54°	72°	90°
	1	095	181	059	031	0
1						
2						
3						
18						
19						
20						

Abb. 4. Muster zum Linienblatt.



1	1201	424	+87,7	1121	496	+62,5	6037,3	3906,3	9943,6	100	1,24	51°	51°
2	832	819	+ 1,3	804	785	+ 1,9	1,7	3,6	5,3	2	0,68	34°	34°
3	653	968	-31,5	754	865	-11,1	992,3	123,2	1115,5	33,4	2,84	71°	2R+φ₇=251°
4	821	838	- 1,7	785	798	- 1,3	2,9	1,7	4,6	2	1,38	54°	2R+φ₇=234°
5	641	636	+ 0,5	654	640	+ 1,4	0,3	2,0	2,3	2	0,36	20°	20°
6	832	327	+ 0,5	797	786	+ 1,1	0,3	1,2	1,5	1	0,45	24°	24°
7	808	813	- 0,5	802	817	- 1,5	0,3	2,3	2,6	2	0,33	18°	2R+φ₇=198°
8	823	828	- 0,5	792	797	- 0,5	0,3	0,3	0,6	1	1,00	45°	2R+φ₇=225°
9	816	809	+ 0,7	815	802	+ 1,3	0,5	1,7	2,2	2	0,54	29°	29°
10	1277	1294	- 1,7	—	—	—	—	—	—	2	∞	90°	2R+φ₇=270°

Abb. 5

jedem Intervall der Abszissenachse die Größe $2\pi : 20$ oder $\pi : 10$ entspricht, so sind die gesuchten Beiwerte der harmonischen Reihe

$$a_m = \frac{1}{10}\,(y_1 \cos m\alpha_1 + \ldots . \; y_{20} \cos m\alpha_{20})$$

$$b_m = \frac{1}{10}\,(y_1 \sin m\alpha_1 + \ldots . \; y_{20} \sin m\alpha_{20}).$$

Nun treten bei einer Teilung des Kreisumfanges in 20 gleiche Teile die Winkel 18^0, 36^0, 54^0, 72^0 und als ihre zwei- bis zehnfachen Vergrößerungen nur solche Winkel auf, die sich von einem Vielfachen von 180^0 wieder nur um 18, 36, 54 oder 72^0 unterscheiden. Die vier in c) a) angeführten Zahlen haben die Bedeutung:

$0{,}95 = \sin 72^0 = \cos 18^0 = \sin 108^0 = -\cos 162^0 \ldots$
$0{,}81 = \sin 54^0 = \cos 36^0 = \sin 126^0 = -\cos 144^0 \ldots$
$0{,}59 = \sin 36^0 = \cos 54^0 = \sin 144^0 = -\cos 126^0 \ldots$
$0{,}31 = \sin 18^0 = \cos 72^0 = \sin 162^0 = -\cos 108^0 \ldots$

Will man also die Ausdrücke a_m und b_m bilden (für $m = 1$ bis 10), so hat man nur die betreffenden y-Werte mit je einer dieser Zahlen zu multiplizieren, bei der Zusammenfügung die Vorzeichen zu beachten und dann durch 10 zu dividieren. Die „fetten und mageren Fenster" der Schablonen leisten in einfachster Weise die Aufteilung der Faktoren und Vorzeichen auf die 20 Ordinaten.

Selbstverständlich lassen sich Schablonen für beliebig viele Ordinaten herstellen. Ich habe einen Satz von Schablonen für die ersten 18 Harmonischen (für 36 Ordinaten, sowie für 72 Ordinaten) hergestellt, und Frl. M. Hetsch, Vulcan-Werke, Hamburg, hat dazu (zur schnellen Herstellung der »Tabelle A«) eine Multiplikationstafel, enthaltend 17000 Produkte durch die Rechenmaschine gedreht. Daß die Vulcan-Werke die Schablonen so großzügig verwenden, beweist, daß sie praktisch sind; denn die Vulcan-Werke sind kein Institut für angewandte Mathematik, sondern wollen Dividende verteilen.

Hamburg. W. Lohmann. 110

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr.-Ing. H. **GRÖBER,** Die Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges. Berlin 1921, Verlag von Julius Springer. 271 S. und 78 Textfiguren.

Der erste Teil des Buches enthält die Berechnung zeitlich veränderlicher und zeitlich konstanter Temperaturfelder auf Grund der Fourierschen Theorie der Wärmeleitung in festen Körpern (ebene Platte, Kreiszylinder, Kugel, einseitig und allseitig unbegrenzter Körper). Bei der Zusammenstellung der mathematischen Ansätze schreibt der Verfasser (S. 6): »Die nächstliegende Annahme über die Intensität der Wärmeströmung ist die, den Wärmefluß der ersten Potenz des Temperaturgefälles proportional zu setzen und in der Tat ist diese Annahme bereits von Biot und Fourier gemacht worden. Die Wahl des Exponenten Eins ist nicht gerade willkürlich zu nennen, denn schon diese beiden Forscher haben versucht, sie theoretisch zu begründen; aber ihre Berechtigung hat sich doch erst dadurch erwiesen, daß alle Folgerungen aus ihr mit der Erfahrung übereinstimmen«. Nein — die klassische Theorie der Wärmeleitung gründet sich nicht auf die »nächstliegende Annahme«, sondern auf die beobachtbare Tatsache, daß die Ausgleichgeschwindigkeit (kleiner) Temperaturdifferenzen diesen Differenzen selbst proportional ist. Durch diese sichere Grundlage ist die Theorie der Wärmeleitung vor den meisten anderen Theorien der mathematischen Physik ausgezeichnet und insbesondere von vornherein der Sorge überhoben, ihren Berechtigungsnachweis erst nachträglich an Hand neuer Erfahrung erbringen zu müssen. Nähere Ausführungen hierzu lese man nach in dem Buche von E. Mach: Die Prinzipien der Wärmelehre (Leipzig 1896), das auch jedem Ingenieur empfohlen sei, dem an klaren, unbeirrbaren Grundanschauungen gelegen ist.

Die erforderlichen mathematischen Hilfsmittel (Entwicklungen nach trigonometrischen und Besselschen Funktionen, Fouriersche Integrale) werden an typischen Aufgaben über Wärmeleitung plausibel gemacht. Die eigentliche Technik dieser Entwicklungen bei graphischen oder tabellarischen Ausgangsdaten erledigt der Verfasser durch einen Hinweis auf die »Hütte«: ich fürchte mit dem Erfolg, daß man auf dem technischen Bureau alle Berechnungen des Verfassers als viel zu langwierig ablehnen wird. Wenn man in der Praxis die Vereinigung empirisch-technischer und mathematisch-physikalischer Methoden fördern will, muß man unermüdlich sein in der Demonstration der Methoden der praktischen Analysis; also hier mindestens erwähnen: Das sehr brauchbare Verfahren von Hermann zur harmonischen Analyse (vergl. Vox, Zentralblatt f. exper. Phonetik, 1921); den verhältnismäßig wohlfeilen Analysator von O. Mader (vergl. Inserat von Gebr. Stärzl, diese Zeitschr. 1921, Heft 4). Als Abschluß des ersten Teiles seines Buches bringt der Verfasser das Ähnlichkeitsprinzip, benutzt es aber an dieser Stelle nur als Erklärung dafür, daß die Resultate über Wärmeleitung in festen Körpern sich durch Funktionen gewisser dimensionsloser Parameter übersichtlich zusammenfassen lassen. Ein Buch für die Praxis, das mehr sein will als ein verflachter Abdruck eines Buches für theoretische Physiker, muß meiner Meinung nach Aufgaben bringen, die folgenden Gesichtspunkt beherzigen: Der berufstätige Ingenieur ist meistens nicht in der glücklichen Lage, bei Voranschlägen auf Laboratoriumsversuche zurückgreifen zu können. Für ihn ist Vergleichsobjekt eine ähnliche, bewährte Ausführung, die auf andere Verhältnisse und Anforderungen umdimensioniert werden muß. Dabei kann ihm das Ähnlichkeitsprinzip ein sicherer Führer sein — wenn er sich an Beispielen genügend geübt hat, die Natur richtig zu zerschneiden und wieder zusammenzubauen.

Im zweiten Teile seines Buches behandelt der Verfasser Wärmeleitung und -übergang in Flüssigkeiten und Gasen. Nach einer ausführlichen Ableitung der Differentialgleichungen für Reibungsströmungen und für das Temperaturfeld in diesen werden Wärmeleitungsprobleme für geordnete Strömungen in geraden und gekrümmten Rohren verschiedener Querschnittsformen unter weitgehender Verwendung von Ähnlichkeitsbetrachtungen durchgerechnet. Die Darstellung schließt sich an die diesbe-

züglichen Arbeiten von Nusselt an. Als Ergänzung zu den sehr kurz gehaltenen Andeutungen über turbulente Strömungen sei verwiesen auf die Arbeit von Latzko (diese Zeitschr. Bd. 1, S. 268). Der letzte Abschnitt ist der »freien Abkühlung« eines Körpers gewidmet. Der Verfasser meint damit die stationäre Wärmeabfuhr von einem festen Körper, der wärmer ist als seine im ganzen ruhende gasförmige Umgebung und der auf konstanter Temperatur erhalten wird.

Das Buch stellt einen zu begrüßenden Beitrag dar, den Weg zur weiteren Vertiefung technischer Berechnungsmethoden zu ebnen und kann jedem Wärmeingenieur empfohlen werden. Sein praktischer Wert wird sehr gesteigert durch zahlreiche Kurven und Tabellen, aus denen dank konsequenter Anwendung des Ähnlichkeitsprinzips die Lösungen vieler Aufgaben ohne Rechnung abgegriffen werden können. Ich habe die mitgeteilten Tabellen nachgerechnet und numerisch einwandfrei gefunden. 137

Warnemünde, Dezember 1921.

E. Pohlhausen.

H. G. **BADER,** Dr.-Ing., Grundlagen der Flugtechnik. Entwerfen und Berechnen von Flugzeugen. Mit 47 Figuren im Text. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1920. VIII + 194 S.

Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, alle Rechnungsvorgänge, die bei Untersuchung eines Flugzeuges auftreten, mit Ausschluß der reinen Festigkeitsberechnungen, darzulegen. Das Buch wendet sich in erster Linie an Flugzeugkonstrukteure, die über den Aufbau und die wesentlichen Teile des Flugzeugs genau Bescheid wissen und die mathematischen Hilfsmittel, wie sie etwa der Ausbildung eines Ingenieurs an einer technischen Hochschule entsprechen, mit Sicherheit beherrschen. Die Ausführungen beginnen naturgemäß mit der Berechnung des Widerstandes und Auftriebs von Tragflächen und gelangen von hier aus unter Heranziehung der notwendigen Überlegungen über Luftschrauben und Motoren zur Berechnung der Flugleistungen, die dann eingehend erörtert werden. Hierauf folgt die Theorie des sogenannten Momenten-Ausgleichs, nämlich die Berechnung der Schwerpunktsverhältnisse und der Höhensteuerung, sodann eine ausführliche Darstellung der Längs- und Querbewegungen eines Flugzeuges aufgrund der dynamischen Gleichungen. Nach einem kurzen Abschnitt über Anlauf und Landung gipfelt das Buch in einem sorgfältig durchgeführten »Muster einer Flugzeugberechnung«, das alle in dem Buch vorgetragenen Rechnungsergebnisse verwertet und dem noch eine besondere Zusammenfassung des ganzen Inhalts angefügt ist.

Das Ziel, das dem Verfasser vorgeschwebt hat, ist ein sehr hohes und bei dem gegenwärtigen Stand der flugtechnischen Mechanik kaum erreichbares. Liegen doch in den einzelnen Teilfragen, z. B. in der hydrodynamischen Theorie des Auftriebs oder in der allgemeinen Dynamik der Flugzeugbewegungen, vom Standpunkt der praktischen Anwendung aus gesehen, kaum mehr als erste Ansätze vor. Niemand wird dem Verfasser die Anerkennung mutigen Beginnens versagen, der alle diese Ansätze soweit durchzuarbeiten unternahm, bis sich aus ihnen unmittelbar praktisch verwertbare Ergebnisse gewinnen lassen. Daß ihm in allen Fällen gelungen sei, dieses Ziel auch nur annähernd zu erreichen, wird er selbst nicht annehmen. Auch hat er gewiß mit Bewußtsein die äußerst knappe formelmäßige Darstellung gewählt, die dem Konstrukteur den Gebrauch des Buches nicht leicht machen wird; wohl deshalb, um den Umfang des Buches nicht allzu groß werden zu lassen. Es kann aber hier nicht unerwähnt bleiben, daß in vielen Punkten, namentlich in mathematischer Hinsicht, Unzulänglänglichkeiten in Erscheinung treten, die durch die angeführten, in den Verhältnissen begründeten Schwierigkeiten nicht genügend zu entschuldigen sind. So ist etwa, um ein Beispiel zu erwähnen, der Grundgedanke der hydrodynamischen Auftriebsberechnung gleich zu Beginn ziemlich ungenau wiedergegeben. Ähnlich verhält es sich mit der Darstellung der Grundlagen der Flugzeugdynamik im 5. Kapitel. Noch mehr staunt der Leser über den in der Einleitung stehenden, mehrfach unrichtigen Satz, der auf die Behandlung der Stabilitätsfragen hinweist, daß »Gleichungen höheren als dritten Grades exakt nicht lösbar seien« und das, was dann dazu näher ausgeführt wird.

Diese Ausstellungen sollen aber nicht den Eindruck verwischen, daß das ganze Buch eine sehr dankenswerte und originelle Leistung bedeutet. Es gibt jedenfalls weder in der deutschen noch in der ausländischen Literatur der Flugtechnik ein Werk, das sich so allseitig mit den verschiedenen, zum Teil recht schwierigen und, wie schon erwähnt, noch sehr unentwickelten Theorien der einzelnen Flugzeugprobleme beschäftigt. Sowohl der Praktiker, der mit der Vorbereitung oder Konstruktion neuer Flugzeugtypen beschäftigt ist, wie der Forscher, der in experimenteller oder theoretischer Richtung die vorhandenen Ansätze weiter entwickeln will, wird mit Vorteil die in dem Buch gebotene Darstellung benutzen.

Mises. 161

L. **GEUSEN,** Die Eisenkonstruktionen, ein Lehrbuch für Schule und Zeichentisch, nebst einem Anhang mit Zahlentafeln zum Gebrauch beim Berechnen und Entwerfen eiserner Bauwerke. Dritte verbesserte Auflage, Berlin, Springer 1921, 282 S.

Das Buch bespricht in engem Rahmen die wesentlichsten Verwendungsarten des Eisenbaues. Der Stoff ist in drei Abschnitte unterteilt, die der Reihe nach die Konstruktionsgrundlagen, die Hochbaukonstruktionen und den Brückenbau behandeln. Vor Eingehen auf die konstruk-

tive Ausbildung wird immer erst das Rechnungsverfahren vorausgeschickt, wobei sich der Verfasser auf elementare Hilfsmittel beschränkt. Das Hauptgewicht wird — und das ist eben ein Vorzug des Buches — auf die sorgfältige zeichnerische Durchbildung der Konstruktionselemente gelegt, wodurch es zweifellos jedem ermöglicht wird, sich auch bei Konstruktionen zurecht zu finden, die der ganzen Anlage nach nicht unmittelbar untersucht werden konnten.

In den Konstruktionsgrundlagen, d. i. in den allgemeinen Erörterungen, die nahezu die Hälfte des Buches bilden, werden die bei Bauten benutzten Eisensorten, die Verbindungsmittel (Niete und Schrauben), vollwandige Balkenträger und Dreigelenkbogen betrachtet. Den Fachwerkträgern geht eine Untersuchung über den Aufbau von ebenen und Raumfachwerken voraus, die recht zweckmäßig sein wird. Die Unterscheidung des Verfassers in »reine« Fachwerke, bei denen die Stäbe gelenkig aneinander geschlossen sind und in »gemischte«, bei denen einzelne oder auch alle Knotenpunkte biegungsfest ausgebildet sind, wäre aber nicht erforderlich. Ein Fachwerk ist ein System von Stäben, die gelenkig miteinander verbunden sind; bei steifen Anschlüssen nennt man das Gebilde ein steifes Fachwerk bzw. ein Rahmentragwerk. Es soll hier auch darauf hingewiesen werden, daß ein einfaches, elementares Kriterium der Stabilität von ebenen Führungsringen der Raumfachwerke im sogenannten »Plan der gedrehten Geschwindigkeiten« zur Verfügung steht. An diese mehr theoretischen Ausführungen schließ sich die Konstruktion verschiedenartiger Knotenpunkte, sowie der Lager. Endlich kommt das wichtigste Konstruktionsglied, die Säule. Eingeschossige, sowie durch mehrere Stockwerke hindurchgehende Säulen aus Gußeisen und Flußeisen werden eingehend behandelt.

Im zweiten Abschnitt, der den Hochbaukonstruktionen gewidmet ist, werden Berechnung und Konstruktion von Decken, Dächern, Fachwerkwänden und Treppen gezeigt. Von den Bindern konnte nur das Polonceausystem Aufnahme finden, dessen Verwendung auch in Holz—Eisen erläutert wird; alle anderen Bauteile sind genau dargestellt.

Der letzte Abschnitt behandelt Eisenbahn- und Straßenbrücken. Die Berechnung und Konstruktion der Elemente, nämlich der Fahrbahntafel, bzw. auch der Fahrbahndecke, der Längsträger, Querträger, des Wind- und Querverbandes, der Konsolen und Lager, wird gründlich untersucht. Bezüglich der Hauptträger mußte wieder eine Einschränkung auf Balkenbrücken vorgenommen werden.

In einem Anhang befinden sich Zahlentafeln mit Angaben über Eigengewichte, Belastungen, die zulässige Inanspruchnahme, Trägheitsmomente von Normalprofilen und Stehblechen usw., die für den rechnenden Ingenieur von Vorteil sind.

Es ist selbstverständlich, daß das gesamte Gebiet der Eisenkonstruktionen hier nicht erschöpfend vorgeführt werden konnte. Man muß aber zugestehen, daß der Verfasser bei der Stoffauswahl überaus geschickt vorgegangen ist. Schön ausgeführte Figuren unterstützen in recht günstiger Weise. Das Buch, das nach der Art seiner Darstellung für mittlere technische Schulen geeignet ist, kann auch den Studierenden Technischer Hochschulen, sowie dem ausführenden Eisenkonstruktionsingenieur bestens empfohlen werden.

J. Ratzersdorfer. 159

Dr. LUDWIG **BIEBERBACH,** o. ö. Prof. an der Friedrich-Wilhelms-Universität in Berlin. Lehrbuch der Funktionentheorie, Band I. Elemente der Funktionentheorie. Mit 80 Figuren im Text. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1921. VI + 314 S.

Bei der großen Bedeutung, welche die Theorie der Funktionen komplexen Argumentes für die angewandte Mathematik hat — ich erinnere an ihre direkte Bedeutung für die Hydromechanik, die Elastizitätstheorie u. a., an ihre indirekte, aber nicht weniger wichtige für das tiefere Verständnis der meisten Methoden, die irgendwelche Differentialgleichungen zu behandeln gestatten — werden sich die Leser dieser Zeitschrift gewiß für ein neues Lehrbuch der Funktionentheorie interessieren, dessen erster Band hiermit angezeigt sei.

Das Buch ist von einem reinen Mathematiker für reine Mathematiker geschrieben. Das bedeutet negativ den Fortfall aller Anwendungen, positiv die Verpflichtung: »den Leser vollständig über die wesentlichen Züge der Theorie aufzuklären und sie ihn verstehen zu lehren«. Hat der Verfasser dieses selbstgesteckte Ziel erreicht? Ehe wir die Frage beantworten, müssen wir folgende Aufklärung geben. Die Funktionentheorie befindet sich heute in einer lebhaften Entwicklung. Einmal zeigt sie eine starke Triebkraft nach außen; die Menge der neuen Entdeckungen ist schon nurmehr schwer zu übersehen. Dann aber befindet sie sich innerlich in einer Krise: Der Gegensatz der alten anschaulichen Riemann-Cauchyschen Funktionentheorie und der neueren strengen arithmetischen Weierstraßschen Theorie muß ausgekämpft und zu einer höheren Einheit geführt werden. Beiden Umständen mußte der Verfasser gerecht werden, wenn er sein Ziel erreichen wollte.

Was den zweiten Gesichtspunkt angeht, so glaube ich, sagen zu dürfen, daß das Buch wirklich eine glückliche Synthese Riemann-Cauchyscher und Weierstraßscher Methoden und Gedanken darstellt. Beide werden da angewandt, wo sie am Platze sind und stützen sich gegenseitig, so daß ein nach heutigen Begriffen strenger Aufbau der Funktionentheorie erreicht wird. Bemerkenswert ist, daß dabei schwierige, tiefliegende Sätze aus der Theorie der Punktmengen nicht angewendet werden, z. B. der Jordansche Kurvensatz. Der Verfasser kommt mit relativ einfachen Hülfsmitteln aus. Der Gang ist ein durchaus

anschaulicher, die alten geometrischen Gedanken stehen im Vordergrund. Aber die Anschauung dient zwar als Leitseil der Vorstellungen, doch nicht als Ersatz für mathematische Schlüsse. Dieser Umstand macht das Buch streng und doch der Vorstellungskraft zugänglich. Eine in dieser Richtung liegende Besonderheit des Buches ist z. B. folgende: $\ln z = \int \frac{dz}{z}$ wird rein arithmetisch gründlich studiert, die Resultate werden dann geometrisch formuliert (z. B. mit ihrer Hilfe S. 79 der Begriff des n-fachen Umlaufes erklärt). Damit nun kann man die Cauchysche Integralformel streng beweisen, ohne auf die Anschauung zurückgreifen zu müssen. Durch die konforme Abbildung $w = \ln(\zeta - z)$ wird aus $\int \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$ das leicht übersehbare $\int f(z + e^w)\,dw$. Die Cauchysche Formel behält so auch in einer srengen Theorie ihre zentrale Stelle. Neu und sicher ein Fortschritt ist auch die Einführung des Begriffes der singulären Stelle in § 4 des 8. Kapitels, auf das überhaupt hinzuweisen ist. Hier zeigen die Weierstraßschen Methoden der Potenzreihe und der analytischen Fortsetzung ihre ausschlaggebende Bedeutung. Sie begründen erst die geometrischen Anschauungen, von denen man früher ausging. Wie in alten Büchern laufen auch in diesem neuen geometrische Anschauung und Analysis Hand in Hand; nur war früher die Geometrie Beweisgrund, jetzt ist sie Veranschaulichung, die selbst der Begründung bedarf. Die Beweislast fällt einzig der Arithmetik und Analysis zu.

Was den anderen Punkt, die Vollständigkeit im Hinblick auf die heutige Ausdehnung der Funktionentheorie angeht, so wird man erst endgültig urteilen können, wenn das ganze Werk fertig vorliegt. Aber ich glaube immerhin so viel sagen zu können, daß die heute meist gebrauchten Hilfsmittel schon alle im ersten Bande enthalten sind. Ich nannte oben die Cauchysche Intregralformel, die mit dem zugehörigen Komplex von Betrachtungen im Mittelpunkt steht; ich nannte schon die Weierstraßsche Theorie der Potenzreihen und der analytischen Fortsetzung. Der Begriff des Gebietes und der Riemannschen Fläche wird in der obengeschilderten arithmetischen, doch stets vom Geometrischen begleiteten Weise für den Anfang ausreichend entwickelt. Man findet weiter außer den bekannten elementaren Funktionen einen kurzen Abriß der elliptischen Funktionen und Integrale sowie der Γ-Funktion. An wichtigen Sätzen nenne ich den Abelschen Grenzwertsatz, den Satz von Rouché, den Weierstraßschen und den Vitalischen Doppelreihensatz, den Weierstraßschen Vorbereitungssatz, seinen Produktentwicklungssatz sowie die Sätze von Mittag-Leffler und Runge. An Einzelheiten, die sich gerade der praktische Rechner gerne notieren wird, weil er sie nicht überall in Lehrbüchern der Funktionentheorie findet, bemerke ich die Theorie der Bernouillischen Zahlen, die Partialbruch- und Produktzerlegung von $\frac{1}{\cos z}$ und $\frac{1}{\sin z}$, die Auflösung der Keplerschen Gleichung, die Eulersche Summenformel, die Stirlingsche Formel. Das Buch bereitet also recht wohl auf das Spezialstudium der Funktionentheorie vor und enthält weiter eine Reihe nützlicher Einzelheiten, die Leser dieser Zeitschrift gern nachschlagen werden, zumal ein ausführliches Inhaltsverzeichnis sowie ein Sachregister die Orientierung erleichtert.

Die Leser dieser Zeitschrift werden aber gerne noch eine weitere Frage beantwortet wissen. Kann man das Buch lesen? »Dabei soll es faßlich sein, also möglichst wenig Vorkenntnisse voraussetzen« verlangt der Verfasser von seinem Buche. In der Tat wird wenig zum Verständnis des Buches vorausgesetzt. Es genügen vollständig die Vorkenntnisse, die man sich etwa in einer einleitenden Vorlesung über Differential- und Integralrechnung erwerben kann. Die Theorie der komplexen Zahlen wird von Anfang an entwickelt, das Prinzip der Intervallschachtelung sowie das allgemeine Konvergenzprinzip kurz dargestellt, sogar der Begriff des Häufungswertes erklärt, Insofern genügt also das Buch der selbstgestellten Forderung an Faßlichkeit. Aber damit erschöpft sich wohl der Begriff der Faßlichkeit nicht und das Wörtchen »also« in obigem Zitat ist das erste, das ich in dem Buch zu bekämpfen habe. Zur Faßlichkeit gehört wohl auch noch eine klare, übersichtliche, den Leser anregende Darstellungsweise. Ich kann nun aber auch nach dieser Seite die oben gestellte Frage nach der Lesbarkeit des Buches mit Freude bejahen. Schon die hervorgehobene Parallelität von Anschauung und arithmetischer Begründung erleichtert das Verständnis; hat die letztere die Vorhand in der Beweisführung, so bekommt die erstere vom Verfasser den gebührenden Vorrang in der Darstellung von Sinn und Zusammenhang der Sätze. Auch die älteren, unzulänglichen Beweise werden kurz gestreift, was immerhin zur Erweckung und Anregung der Vorstellungskraft nützlich ist. Besonders angenehm habe ich es empfunden, daß die abstrakten Kapitel keine Häufungsstellen im Endlichen haben; hat sich der Leser durch ein solches, das meist nur wenige Seiten umfaßt, durchgearbeitet, so belohnt ihn eine reiche Ausbeute an konkreten Resultaten, eleganten analytischen oder geometrischen Formulierungen. Der Verfasser versteht es, den Leser nicht zu ermüden. Und auch das scheint mir eine sehr gute Eigenschaft dieses schönen, warm zu empfehlenden Buches zu sein.

Darf ich außer dem »also« noch einen kleinen Kiesel nennen, an dem ich mich gestoßen habe? Der Verfasser verschmäht das schöne Weierstraßsche Zeichen für die p-Funktion. (Oder hat der Drucker des Buches es ebensowenig wie der Drucker dieser Zeitschrift?) Bei der Knappheit an verwendbaren Buchstaben sollte man für jede brauchbare Neu-

erfindung dankbar sein und sie ja benutzen! Wie viel besser wäre es, wir hätten für i, π, e ebenfalls stilisierte Zeichen! Möge also das Buch Bieberbachs, das sicher in vielen Händen zu finden sein wird, nicht der Anlaß zum Vergessen des p-Zeichens sein! Es wäre schade darum.

Berlin, den 11. Februar 1922.

Hamel. 160

NACHRICHTEN

Versammlung in Leipzig September 1922. In der Zeit vom 18. bis 24. September ds. Js. findet in Leipzig die 87. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte, zugleich die Hundertjahrfeier der Gesellschaft statt. Nach den im Vorjahre in Jena gefaßten Beschlüssen (vergl. diese Zeitschrift Band 1, 1921, S. 420) soll im Rahmen dieser Versammlung und zwar in der Abteilung 1 (Mathematik, angewandte Mathematik, Geodäsie und Astronomie; in Gemeinschaft mit der deutschen Mathematikervereinigung) und Abteilung 3 (Technische Physik und Elektrotechnik; in Gemeinschaft mit der Gesellschaft für technische Physik) das Fachgebiet der angewandten Mathematik und Mechanik in ausgiebiger Weise vertreten werden. Die deutsche Mathematikervereinigung stellt den Freitag, 22. September, den angewandten Mathematikern zur Verfügung. Anmeldungen zu Vorträgen nehmen Prof. Prandtl, Göttingen, Prof. Reissner, Charlottenburg und der Herausgeber entgegen. Da Ende Juni die Tagesordnung der Versammlung in Druck gelegt werden soll, ist recht baldige Anmeldung erforderlich.

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Berechnung der Schubspannungen im gebogenen Balken. Zum Aufsatz des Hrn. Neményi, Bd. 1, 1921, S. 89—96 erlaube ich mir folgendes zu bemerken.

Bei der Berechnung der Schubspannungen im gebogenen Balken wende ich seit langer Zeit eine Methode an[1]), die derjenigen des Hrn. P. Neményi ähnlich ist. Wenn ich die Bezeichnungen von P. Neményi nehme, so lassen sich die Schubspannungen folgendermaßen darstellen

$$\tau_{ys} = -\frac{\partial F}{\partial x} - C(m+1)\,y^2 + f(x);\quad \tau_{xs} = \frac{\partial F}{\partial y} \quad (1),$$

wo $f(x)$ eine noch zu bestimmende Funktion von x allein ist. Die Kompatibilitätsbedingungen in Betracht genommen, erhalten wir für die Spannungsfunktion F nachstehende partielle Differentialgleichungen

$$\Delta^2 F = -2\,Cx + f'(x) + D \quad \ldots \quad (2).$$

Wo D eine Konstante bezeichnet, die so zu bestimmen ist, daß das entsprechende Torsionsmoment gleich Null wird. Im Falle eines in bezug auf die y-Axe symmetrischen Querschnittes wird

$$D = 0$$

Die Randbedingung läßt sich dann in solcher Form darstellen

$$\frac{\partial F}{\partial s} = [-C(m+1)\,y^2 + f(x)]\frac{\partial x}{\partial s} \quad \ldots \quad (3).$$

Besonders einfach läßt sich die Aufgabe in dem Falle lösen, daß man die rechte Seite der Gleichung (3) durch geeignete Auswahl der Funktion $f(x)$ gleich Null machen kann. Dann wird am Rande $F = \text{const}$. und wir haben die Aufgabe über das Gleichgewicht einer gleichmäßig gespannten am Rande befestigten Membrane zu lösen, auf die ein verteilter, durch die rechte Seite der Gleichung (2) dargestellter Druck wirkt.

Im Falle eines elliptischen Querschnittes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

nehmen wir an

$$f(x) = (m+1)\;Cb^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Dementsprechend wird die Gleichung (2)

$$\Delta^2 F = -2C(m+1)\,x\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{m+1}\right)$$

Die Funktion F wird durch die Gleichgewichtsfläche einer Membran dargestellt, die am Rande befestigt und der Wirkung des verteilten Druckes $2C(m+1)\,x\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{m+1}\right)$ unterworfen ist.

Ähnliches Resultat bekommen wir auch im Falle eines rechteckigen Querschnittes $x = \pm a$, $y = \pm b$, wenn wir für $f(x)$ eine Konstante $C(m+1)\,b^2$ nehmen.

Sehr einfach kann man die Aufgabe auch im Falle des Grashofschen Querschnittes erledigen.

Im Falle des Querschnittes, der von zwei Geraden $x = \pm a$ und von dem Kreise $x^2 + y^2 - r^2 = 0$; $[r > a]$ begrenzt ist, nehmen wir

$$f(x) = C(m+1)\,(r^2 - x^2).$$

In allen diesen Fällen wird die Aufgabe auf die Aufsuchung der Gleichgewichtsform einer am Rande befestigen, dem verteilten Drucke unterworfenen Membran zurückgeführt. Diese kann man am einfachsten durch die Anwen-

[1]) Siehe Berichte des Wegebauinstitutes, Petersburg 1913 und mein Lehrbuch der Elastizitätstheorie, Bd. I, Petersburg 1914. Einige Aufgaben sind auch in meinem Artikel, der in Proc. of Lond. Math. Soc. erscheinen wird, gelöst.

dung der wohlbekannten Rayleigh-Ritz-Methode lösen.

Wir wollen F in der Form

$$F = a_0 + a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots\ldots$$

annehmen, wo $\psi_1, \psi_2, \ldots$. die Randbedingungen befriedigende Funktionen sind und die Koeffizienten $a_0, a_1\ a_2, \ldots$ so zu wählen sind, daß das Integral

$$\iint \left\{ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right] + F\left[-2Cx + f'(x) + D\right] \right\} dx\,dy$$

ein Minimum wird.

Auf solche Weise haben wir zum Beispiel im Falle eines Rechteckes die komplizierten Ausdrücke für die Spannungskomponenten τ_{xz} und τ_{yz} durch einfache Nährungsformeln ersetzt. Dabei haben wir gezeigt, daß die bekannte S. Venantsche Tabelle für die Komponente τ_{yz} im Zentrum eines rechteckigen Querschnittes Fehler enthält, die bei $\frac{a}{b} = 4$ cirka 16% betragen.

Agram, den 13. Juli 1921.

S. Timoschenko. 103

Erwiderung. Die in russischer Sprache erschienenen, auf das Biegungsproblem bezüglichen Schriften von Hrn. Timoschenko waren mir zur Zeit der Veröffentlichung meiner Arbeit unbekannt, ebenso auch der in Druck befindliche englische Aufsatz, so daß ich die Timoschenkoschen Untersuchungen nicht berücksichtigen konnte. — Die russischen Schriften sind mir, auch nachdem ich aus obenstehender Zuschrift des Hrn. Timoschenko Kenntnis von ihnen erhalten habe, unzugänglich geblieben; sobald der englische Aufsatz erscheint, beabsichtige ich die praktische Brauchbarkeit und Leistungsfähigkeit der Timoschenkoschen Ansätze mit der meiner Ansätze F_I und F_{II} an Hand von Beispielen vergleichend zu untersuchen. — Vorläufig beschränke ich mich auf die Bemerkung, daß auch die Timoschenkosche Spannungsfunktion ein Sonderfall meiner allgemeinen Spannungsfunktion F ist und daß sich das Ritzsche Verfahren auch bei der Zugrundelegung meiner Ansätze zweckmäßig zur Lösung heranziehen läßt.

Stettin. P. Neményi. 103a.

Zur Einführung einer einheitlichen Vektorschreibweise.

1. Allgemeine Vorbemerkungen.

Zu den Band 1, 1921, Seite 421 bis 422 veröffentlichten Vorschlägen des AEF (Ausschuß für Einheiten und Formelzeichen) für die Vereinheitlichung der Vektorbezeichnungen seien mir als dem Mitglied zweier früherer Kommissionen für denselben Zweck die folgenden Bemerkungen gestattet. Die erste Kommission wurde, wie ich kurz bemerken will, auf Grund eines Referates von mir[1]) 1903 von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung eingesetzt. Sie ist daran gescheitert, daß von bestimmter Seite die Graßmannsche Auffassung, die die Operationen vom Gesichtspunkt ihrer Invarianz gegen affine Transformationen betrachtet, als die allein logisch zulässige erklärt und die Vektor-Analysis der Physiker allen Gegenvorstellungen zum Trotz für innerlich verfehlt erklärt wurde[2]). Die zweite Kommission war eine internationale, sie wurde auf dem Mathematikerkongreß in Rom eingesetzt und hatte in Cambridge eine vorbereitende Sitzung; der Krieg verhinderte dann ihre Weiterarbeit, die allerdings infolge der Stellungnahme der Italiener auch unter keinem günstigen Stern gestanden hatte[3]).

Es ist unter allen Umständen verdienstvoll, daß der AEF jetzt die besonders für den Unterricht recht wichtige Angelegenheit aufgegriffen hat. Allerdings kann das, was er festsetzen will, voraussichtlich nichts Endgültiges sein, denn mit der Zeit muß hier doch die internationale Regelung kommen. Dieser Umstand muß uns umso mehr veranlassen, schon jetzt die Angelegenheit mit möglichster Gründlichkeit durchzuarbeiten und ein System zu wählen, das auf spätere internationale Annahme Aussicht hat. Auch wäre zu überlegen, ob man sich nicht jetzt schon der Mitarbeit der befreundeten Neutralen versichern soll. Auf Herrn J. A. Schouten in Delft Holland), einen der ersten Kenner des in Rede stehenden Gebietes, möchte ich besonders hingewiesen haben[4]).

Bei der einzuführenden Schreibweise wird man, wenn schon die Vereinbarungen sich zweckmäßigerweise auf die wichtigsten, überall vorkommenden Dinge beschränken werden, doch sehr darauf bedacht sein müssen, daß man der Verfeinerung und der Fortbildung der Vektoranalysis, sei es nach Seite der Affinor(Tensor)-Analysis, sei es nach der der vierdimensionalen Vektoranalysis (Relativitätstheorie) durch die getroffenen Festsetzungen keine Schwierigkeiten in den Weg legt. Ich erwähne, daß ich in der Relativitätstheorie

[1]) Ueber eine einheitliche Bezeichnungsweise der Vektorenrechnung im technischen und physikalischen Unterricht. Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 1904, S. 36.

[2]) Vergl. R. Mehmke, Vergleiche zwischen der Vektor-Analysis amerikanischer Richtung und derjenigen deutsch-italienischer Richtung, Jahresbericht der deutsch. Math. Vereinigung 1904, S. 217; ferner Entgegnung hierauf von L. Prandtl: Ueber die physikalische Richtung in der Vektoranalysis, ebenda S. 436.

[3]) Marcolongo und Burali-Forti, Per l'unificatione delle notationi vettoriali, Circolo Math. di Palermo XXIII—XXVI 1907/08; Diskussion darüber in L'Enseignement mathématique 1909; vergl. auch das Buch derselben Verfasser: Omografie vettorali, Turin 1909.

[4]) Hr. Schouten hat inzwischen in einer Zuschrift Stellung genommen, die demnächst veröffentlicht werden soll. Anm. d. Herausg.

nicht sachverständig genug bin und daß deshalb meine folgenden Ausführungen von diesem Gesichtspunkte aus vielleicht angreifbar sein könnten. Im übrigen arbeitet die moderne Relativitätstheorie mit einer von der Vektorrechnung ziemlich verschiedenen Symbolik, so daß die Rücksichtnahme auf sie in unserer derzeitigen Erwägungen wohl noch wird außer acht gelassen werden können. Daß die Affinorrechnung in der vom AEF vorgeschlagenen Bezeichnung möglich ist, hat das hübsche Buch von J. Spielrein[1]) gezeigt.

2. Der Gegenvorschlag und seine Begründung.

Gewohnheiten spielen bei allen Bezeichnungsfragen eine große Rolle, man macht sich schwer von ihnen los. Wenn ich im folgenden für die Gibbssche Bezeichnung eintrete, so bitte ich mir nicht die Gewöhnung, die mich zu dieser Stellungnahme führe, als Gegenargument vorhalten zu wollen. Ich habe die Vektorrechnung als Student in der Maxwell-Föpplschen Bezeichnungsweise gelernt und bin dann auf dem Umweg über eine (nicht veröffentlichte) Klammerschreibweise 1903 unter dem Eindruck des Wilsonschen Buches[2]) zu der Gibbsschen Bezeichnung gekommen und habe seither an diesem Standpunkt festgehalten, weil ich diese Bezeichnungsweise in der Tat für die bestdurchdachte halte. Es kommt mir dabei nicht auf die besonderen Symbole an, sondern auf den Grundsatz, daß die Produkte von zwei Vektoren durch ein Zeichen zwischen den Vektoren bezeichnet werden[3]). Die Gibbsschen Symbole empfehlen sich aber durch ihre Internationalität[4]).

Zunächst spricht hierfür ein mehr äußerlicher, aber nicht unwichtiger Grund. Für den Unterricht muß man verlangen, daß jedes an die Tafel geschriebene Zeichen von einem passenden Wort begleitet wird. In Göttingen wird das skalare Produkt $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ „a mit b", das Vektorprodukt $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ „a an b" gesprochen. Wie man bei der AEF-Schreibweise[5]) des Vektorproduktes $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$ diese Forderung mit der der Kürze des Ausdrucks vereinigen soll, weiß ich nicht, denn »eckige Klammer auf, a b, eckige Klammer zu« ist sehr unbefriedigend, und auch der Ersatz »Vektorprodukt a b" ist nicht ganz erfreulich, da die bei längeren Formeln nicht immer eindeutige Stellung der Schlußklammer keinen lautlichen Ausdruck findet. Ich stelle gegenüber:

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$$

„a an b plus a an c gleich
a an b plus c in Klammern"

und $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}] = [\mathfrak{a}\,(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})]$

„Vektorprodukt a b plus Vektorprodukt a c gleich Vektorprodukt a, b plus c in Klammern".

Weiter ist die Kürze, wie sie sich in der Ausdrucksweise »die Divergenz $\nabla\cdot$ (Nabla mit) und die Rotation[1]) $\nabla\times$ (Nabla an)« kund gibt in der AEF-Schreibart auf keine Weise nachzuahmen.

Wichtiger scheint mir aber der Gesichtspunkt des inneren Aufbaues zu sein, wobei es mir notwendig erscheint, die vollständige Lehre einschließlich des Affinors in den Vordergrund zu stellen; denn wo es sich um innere Folgerichtigkeit handelt, müssen die Ansprüche der fortgeschrittenen Hörer voranstehen.

Daß der Affinor bei Gibbs ohne Zeichen zwischen den beiden Vektoren geschrieben wird und das skalare und Vektorprodukt mit einem Zeichen, ist sehr folgerichtig. Wenn die beiden dreigliedrigen Ausdrücke

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{i}\,a_x + \mathfrak{j}\,a_y + \mathfrak{k}\,a_z$$

und

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{i}\,b_x + \mathfrak{j}\,b_y + \mathfrak{k}\,b_z$$

nach den Regeln der Klammerrechnung ausmultipliziert werden, so ergibt sich der neungliedrige Ausdruck

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{i}\mathfrak{i}\,a_x b_x + \mathfrak{i}\mathfrak{j}\,a_x b_y + \ldots + \mathfrak{k}\mathfrak{k}\,a_z b_z.$$

Zunächst ist nur anzumerken, daß die Einheitsprodukte $\mathfrak{i}\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i}\mathfrak{j}$, $\mathfrak{j}\mathfrak{i}$.... sämtlich als unabhängig anzusehen sind, solange nicht durch ein besonderes Zeichen eine bestimmte Verabredung getroffen wird. Daß der Neunerausdruck eine geometrisch-invariante Bedeutung hat, nämlich in seiner Eigenschaft als Affinor, kann man in der Einleitung andeuten, bewiesen wird es natürlich erst später bei der Lehre von den dreifachen Produkten.

Durch die besondere Verabredung

$$\mathfrak{i}\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\mathfrak{j} = \mathfrak{k}\mathfrak{k} = 1; \quad \mathfrak{i}\mathfrak{j} = \mathfrak{j}\mathfrak{i} = 0 \text{ usw.},$$

die mit dem Punkt bezeichnet wird, erhält man das skalare Produkt, durch die Verabredung

$$\mathfrak{i}\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\mathfrak{j} = \mathfrak{k}\mathfrak{k} = 0; \quad \mathfrak{i}\mathfrak{j} = -\,\mathfrak{j}\mathfrak{i} = \mathfrak{k} \text{ usw.},$$

die mit dem Kreuz bezeichnet wird, das Vektorprodukt.

Der symbolische Vektor ∇ ohne Zwischenzeichen vor irgend einer Größe bedeutet Raum-

---

[1]) J. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung, Stuttgart 1916.

[2]) E. B. Wilson: J. W. Gibbs, Vektoranalysis, New York 1901.

[3]) Mit einer Ausnahme, von der noch zu sprechen sein wird.

[4]) Daß die Italiener dieselbe Bezeichnung für das skalare Produkt gebrauchen, die Gibbs für das Vektorprodukt verwendet, ist zwar ärgerlich, kann aber wohl für uns kein Grund sein, die Gibbssche Bezeichnung deshalb abzulehnen.

[5]) Der Kürze halber sei mir diese Benennung gestattet, obschon die Schreibweise selbst älter ist und von einer Anzahl Autoren bereits benutzt wird.

[1]) Die in den AEF-Vorschlägen angegebene Sprechweise »Rotor« für rot scheint mir nicht empfehlenswert. Mit dem Rotor (sprachlich richtiger Rotator!) wäre gegebenenfalls der axiale Vektor (also z. B Drehmoment $\mathfrak{M}$, Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$) im Gegensatz zum polaren Vektor als dem Vektor schlechthin zu bezeichnen. Man kann dann Sätze wie die folgenden bilden: »Die Rotation eines Vektors ist ein Rotor, die Rotation eines Rotors ist ein Vektor«, usw. Daß die beiden Eigenschaften des Vektorfeldes, Divergenz (Quellung) und Rotation (Drehung) das gleiche sprachliche Geschlecht haben, ist aus sprachlichen Gründen erwünscht.

differentiation schlechtweg. Daß die Ableitung eines Skalarfeldes ein Vektor, die eines Vektors ein Affinor, die eines Affinors eine gerichtete Größe dritter Stufe ist usw., stimmt formal vollkommen mit den Bezeichnungen $\nabla\varphi$, $\nabla\mathfrak{v}$, $\nabla\Phi$ usw. Der Skalar und der Vektor des Affinors $\nabla\mathfrak{v}$ sind dann $\nabla\cdot\mathfrak{v}$ (Divergenz) und $\nabla\times\mathfrak{v}$ (Rotation). Das zur Verschiebung $d\mathfrak{r}$ gehörige Differential wird in jedem Falle durch $d\mathfrak{r}\cdot\nabla$ vor der Feldgröße erhalten, also

$$d\varphi = d\mathfrak{r}\cdot\nabla\varphi; \quad d\mathfrak{v} = d\mathfrak{r}\cdot\nabla\mathfrak{v};$$
$$d\Phi = d\mathfrak{r}\cdot\nabla\Phi.$$

Wenn man den vorstehenden Text in die Sprache der AEF-Bezeichnungen übersetzen will, so wird man feststellen, daß das keineswegs glatt möglich ist. Es rächt sich dabei in sehr fühlbarer Weise, daß in dieser Bezeichnung für das skalare Produkt von zwei Vektoren dieselbe Form gewählt wie für das Produkt eines Vektors mit einem Skalar. Man wird nämlich bei der Einführung des Operators ∇ hier zur Aufstellung folgender Sätze geführt: »Das Zeichen ∇ vor einem Skalar liefert den Gradient, vor einem Vektor liefert es die Divergenz, vor einem Affinor die vektorielle Ableitung«. Die ∇-Ableitung erzeugt also mit einem Skalar und mit einem Affinor einen Vektor, mit einem Vektor dagegen einen Skalar, eine gegenüber dem folgerichtetigen Gibbsschen Aufbau wenig erfreulich anmutende Regel.

Für das Produkt aus dem skalaren Produkt von zwei Vektoren und einem dritten Vektor läßt der AEF zwei Schreibweisen zu: $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\,\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}$. Für die Affinorrechnung ist nur die zweite Schreibweise brauchbar, da die erstere den Affinor $\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}$ zerschneiden und den fortzulassenden Vektor $\mathfrak{a}$ nicht freigeben würde; es würde sich daher auf alle Fälle empfehlen, die Klammerschreibweise fallen zu lassen [1]).

Bei Umformungen kommt der Fall vor, daß das skalare Produkt in dem obigen dreifachen Produkt durch einen einfachen Skalar ersetzt werden soll, z. B. $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = n$, oder $= 2$. Folgerichtig würde man daher verlangen, daß dieses Produkt dann $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c} = n\cdot\mathfrak{c}$ bezw. $2\cdot\mathfrak{c}$ geschrieben wird. Bei Durchführung dieser Regel für alle Produkte eines Skalars mit einem Vektor würde auch die oben dargelegte Regelwirtschaft aufhören, da der Gradient jetzt $\nabla\cdot\varphi$ schrieben werden müßte und so in einer Reihe mit der Affinorableitung des Vektorfeldes $\nabla\cdot\mathfrak{v}$ stehen würde. Allerdings würde man sich mit dieser Festsetzung mit den üblichen Schreibregeln der Algebra etwas in Widerspruch setzen. Dem gegenüber scheint es richtiger, die Algebra so zu lassen, wie sie ist, und dafür, damit ein folgerichtiges System entsteht, das Gibbssche Verfahren anzunehmen.

Göttingen. L. Prandtl. 148

[1]) Auch die alte Schreibweise ($\mathfrak{a}$ grad) $\mathfrak{v}$ anstatt $\mathfrak{a}\cdot\nabla\mathfrak{v}$ bei Gibbs sollte fallen gelassen werden, da $\nabla\mathfrak{v}$ als Ableitung von $\mathfrak{v}$ (Affinor) den engeren Begriff bildet.

* * *

Für sehr vorteilhaft halte ich die Freiheiten und erwarte, daß auf diese Art leichter im Laufe der Zeit zu einer vollständigen Einigung zu gelangen sein wird, als auf dem Weg der Festsetzung einer einzigen Schreibweise. Übrigens scheint es mir nicht ausgeschlossen, daß sich gewisse Freiheiten auch noch im Dauerzustand erhalten werden.

Zu 1. In späterer Zeit, wenn die Vektorenrechnung sich allgemein durchgesetzt hat, wird es vielleicht (wenigstens in gewissen Gebieten) möglich sein, auf die äußerliche Kennzeichnung der Bezeichnungen für Vektoren (deutsche Buchstaben, Querstriche usw.) ganz zu verzichten und die Alphabete gänzlich freizugeben.

Zu Zusatz 2. In der Streckenrechnung könnte man wohl mit AB ohne weiteres Zeichen auslangen.

Zu 2. Die Anwendung der Bezeichnung A für $|\mathfrak{A}|$ sollte im Text (wenigstens generell) anzukündigen sein.

Zu 3. Die Bezeichnung $\mathfrak{A}^0$ fällt stark aus aus dem Rahmen der üblichen Schreibweise heraus. In vielen Fällen dürfte $\frac{\mathfrak{A}}{|\mathfrak{A}|}$ genügen. In meinen Vorlesungen wende ich (übrigens auch bei komplexen Zellen) das von Kronecker (z. B. Einfache und vielfache Integrale S. 173) für reelle Größen eingeführte Zeichen sign $\mathfrak{A}$ (gelesen Signum $\mathfrak{A}$) an und möchte dieses zur Beratung stellen.

Zu 6. Hier wäre ich sehr dafür, das Gibbsische $\times$ als Lizenz zuzulassen. Ich möchte sogar meinen, daß diesem die Zukunft gehört, wenn es auch jetzt noch wenig verwendet wird (weswegen ich sogar in meinen Elementen der höheren Mathematik [ ] verwendet habe, obwohl ich $\times$ bei weitem vorgezogen hätte und auch in den Vorlesungen gebrauche).

Zu 11. Nach meinen Erfahrungen scheint sich die Einführung eines eigenen Zeichens $\mathfrak{A}_S$ nicht recht zu lohnen.

Zu den Erläuterungen zu 6. Die Schreibweise $[\bar{a}\,\bar{b}]$ opfert einen ganz wesentlichen Vorzug der Bezeichnung von Résal und Heun, nämlich die bequeme Bezeichnung $\overline{ab}$.

Zu den Erläuterungen zu 11. Der angeführte Unterschied verdient die ausdrücklichste Hervorhebung.

Brünn. L. Schrutka. 149

* * *

Mein Bedenken richtet sich in erster Linie gegen die in 6 vorgeschlagene Verwendung der eckigen Klammern für das Vektorprodukt. Von allen mir bekannten Arten der Bezeichnung ist mir diese stets als die einzig unbrauchbare erschienen. Der Umstand, daß die Encyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften diese unglückliche Wahl getroffen hat, sollte keinen Grund bieten, sie zu perpetuieren.

Schon bei dreifachen oder vierfachen Produkten wird die Schreibweise ganz unüber-

sichtlich; der in dem Zusatz »zu 5« als notwendig anerkannte Verzicht auf den Gebrauch der eckigen Klammern zu jedem anderen Zweck ist ein lästiger Zwang. Aus diesen äußeren, sowie aus inneren Gründen halte ich die von Anderen aufgestellte Forderung für berechtigt, man müsse für das vektorielle Produkt ein Operationszeichen, nicht aber ein Funktionszeichen (als welches die Klammer doch angesehen werden kann) benutzen. Warum nicht das von Burali-Forti und Marcolongo vorgeschlagene Zeichen $\wedge$ übernehmen? Es schreibt sich leicht und rasch, fällt sofort ins Auge, und wenn man (wie ich es seit Jahren im Unterricht tue) dafür das Wort »Dach« gebraucht, welches den Vorzug hat, einsilbig zu sein, so wird auch der mündliche Vortrag sehr erleichtert. Wie man sagt: »drei mal fünf«, so sagt man:

»$\mathfrak{A}$ Dach $\mathfrak{B}$« für $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} = [\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]$.

Die in 5 vorgeschlagene Bezeichnung des skalaren Produktes gibt zu solchen Bedenken keinen Anlaß. Benutzt man aber statt ihrer das liegende Kreuz $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ (sprich: »$\mathfrak{A}$ Kreuz $\mathfrak{B}$« — ebenfalls einsilbig!) so hat man den Vorteil, daß skalare Faktoren, wie $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ nicht durch Klammern oder durch den Punkt abgetrennt zu werden brauchen: $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$ ist nicht mißzuverstehen.

Der Punkt bleibt alsdann für andere Zwecke noch frei, sei es zur Bezeichnung der Zahlenmultiplikation, sei es für das Produkt zweier Quaternionen, dessen Verwendung sich manchmal inmitten von vektoriellen Rechnungen empfiehlt.

Das dreifache Produkt $\mathfrak{A}\,[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}] = [\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]\,\mathfrak{C}$ einfach durch $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$ zu bezeichnen, ist zwar unanfechtbar; doch scheint es mir, bei der großen Wichtigkeit dieses Ausdrucks, erwünscht, ein Symbol dafür zu haben, als welches die eckige Klammer dienen könnte, wenn sie nicht für das vektorielle Produkt verwendet wird:

$$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \times \mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C} = [\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}].$$

Sehr erfreulich ist die in dem Zusatz »zu 11« (allerdings mit einem Druckfehler in der Zeile 8) formulierte Unterscheidung, ohne welche die unangenehmsten Konfusionen zu befürchten sind.

Karlsruhe. C. Boehm. 151

(Redaktionsschluß 30. April 1922.)

Berichtigung

zum Aufsatz: Ueber die Biegung durchlaufender Platten und der rechteckigen Platte mit freien Rändern, Bd 2, S. 1 1922.

S. 3, Gl. 2 u. 4. Statt $(m^2a^2 + n^2b^2)^2$ ist zu setzen $(m^2b^2 + n^2a^2)^2$.

S. 15, Gl. 47. In der Summe ist für $\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi a}{b} + \frac{m\pi a}{b}$ im Zähler zu schreiben $\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi a}{b} - \frac{m\pi a}{b}$.

S. 16, Gl. 56. Vor dem zweiten Glied im Zähler ist das + Zeichen in −, vor dem dritten Glied im Zähler ist das − Zeichen in + abzuändern.

S. 16, Gl. 57. Statt $\frac{3+\nu}{1+\nu}$ ist zu setzen $\frac{3+\nu}{1-\nu}$.

S. 17, Gl. 58. Statt $\cos\frac{m\pi x}{b}$ ist zu setzen $\cos\frac{m\pi x}{a}$.

S. 17, Gl. 65. Das Vorzeichen vor dem Ausdruck ist in + abzuändern.

S. 22, Gl. 92. Nach q_x''' bezw. nach q_y'' fehlt das = Zeichen. Nádai.

Zur Beachtung!

1) Wir bitten dringendst um sorgfältigste Ueberwachung des Eingangs der von uns bezogenen Zeitschriften. Etwaige Unregelmäßigkeiten, wie das Ausbleiben einzelner Hefte, bitten wir **unverzüglich** dem Bestellpostamt zu melden und auf Abstellung der Fehler oder Nachlieferung nicht empfangener Hefte zu bestehen. Die Postämter sind zur Entgegennahme und Erledigung der Beschwerden **verpflichtet.** Erst wenn keine Abhilfe eintritt oder die Nachlieferung endgültig unterbleibt, bitten wir uns zu benachrichtigen.

2) Von dem Wohnungswechsel bitten wir stets sofort das Postamt des alten Wohnsitzes zu verständigen und bei diesem die Umleitung der Zeitschriften an das Postamt des neuen Wohnsitzes förmlich zu beantragen. Diesem Antrag sind 4 Mk. für jede Zeitschrift beizufügen. Unterbleibt die Zahlung, so werden die Anträge nicht erledigt und die Post stellt die Lieferung der Zeitschrift ein. — Von dem Wohnungswechsel ist außerdem noch der Verlag zwecks Berichtigung seiner Bezieher-Kartei unmittelbar zu verständigen.

3) Es kommt neuerdings häufiger vor, daß die Mitglieder des V. d. I. und sonstigen Bezieher unserer Zeitschriften, soweit diese durch den Postzeitungsdienst geliefert werden, einzelne Hefte doppelt erhalten. Wir bitten alle Bezieher dringend, Doppelsendungen, auf die ein Anspruch nicht besteht, wie überhaupt alle Sendungen, die über den berechtigten Anspruch hinausgehen, dem Postbeamten sofort wieder mitzugeben, mit dem Auftrage, dafür zu sorgen, daß die Hefte den richtigen Empfängern zugestellt werden. Die Post ist zur Zurücknahme dieser Hefte verpflichtet; wenn Doppelsendungen häufiger vorkommen, dann bitten wir, uns verständigen zu wollen.

VERLAG DES VEREINES DEUTSCHER INGENIEURE.

Verantwortlich für die Schriftleitung Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43.
Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

Bd. 2 **Ende Juni 1922** **Heft 3**

Inhalt:

	Seite
Hauptaufsätze. K. Wieghardt: Ueber den Balken auf nachgiebiger Unterlage	165
C. Weber: Ueber die Spannungserhöhung durch kreisrunde Löcher in einem gezogenen Bleche	185
H. Alt: Untersuchungen über Wälzhebelmechanismen	187
P. Riebesell: Ueber die Korrelationsmethode	195
P. Schreiber: Ueber die Verwendbarkeit der Logarithmenpapiere bei der Integration der Differentialgleichungen $y' = f(x, y)$	200
Zusammenfassende Berichte. W. Hoff: Der Segelflug und die Rhön-Segelflug-Wettbewerbe	207
Kurze Auszüge. Baumechanik	218
Elektrotechnik	220
Kleine Mitteilungen. Nemény i: Verhalten reziproker Kräftepläne bei Zerlegung des Fachwerkes	222
Buchbesprechungen. Geiringer: Die Gedankenwelt der Mathematik — Scheffers: Lehrbuch der darstellenden Geometrie — Fischer: Einführung in die darstellende Geometrie	224
Nachrichten	226
Zuschriften an den Herausgeber	227

HAUPTAUFSÄTZE

Über den Balken auf nachgiebiger Unterlage.

Von **K. WIEGHARDT** in Dresden.

Für den Balken auf nachgiebiger Unterlage — das wichtigste Beispiel ist die Eisenbahnschwelle — hat H. Zimmermann, indem er entsprechende Ansätze verschiedener Vorgänger berichtigte, ergänzte und zusammenfaßte, eine Theorie ausgearbeitet [1]), welche ziemlich rationell ist, keinen erheblichen mathematischen Apparat erfordert und sich demgemäß bei den Bauingenieuren großer Geltung erfreut. Von dieser soll ihr durch die vorliegende Abhandlung nichts genommen werden, obwohl die Abhandlung ihr Entstehen einem gewissen, ziemlich offenkundigen Mangel der Zimmermannschen Theorie verdankt. Denn so klar auch der Mangel zutage liegt, ebenso klar ist, daß seine Behebung sich praktisch kaum verlohnt. Die Unterlage nämlich, auf der unser Balken ruht, aus Erdreich, zusammengestopften Kieselsteinen u. dergl. bestehend, wird sich immer nur schwer und, namentlich was die zeitliche Konstanz ihrer Eigenschaften angeht, nur wenig zuverlässig definieren lassen. Jede Theorie wird hier also stark idealisieren müssen und so wird der Praktiker von vornherein überzeugt sein, daß die Ergebnisse einer Theorie, die prinzipiell besser ist als die Zimmermannsche, trotzdem mit der Wirklichkeit nicht besser übereinstimmen werden, daß er also von ihrer Anwendung nichts hätte als die Mühe, einen vermutlich größeren mathematischen Apparat beherrschen zu lernen. Der Theoretiker indessen, der um jeden Preis prinzipielle Aufklärung wünscht, wird sich durch die größere Kompliziertheit einer verbesserten Theorie nicht davon abschrecken lassen, sie aufzustellen und zu entwickeln. Und er wird schließlich auch bis zur Durchrechnung bestimmter Zahlenbeispiele schreiten — sogar dann, wenn die erforderlichen Zahlenrechnungen ungewöhnlich mühsam sein sollten, um nur den Vergleich mit der alten Theorie möglichst vielseitig durchführen zu können.

Im vorliegenden Falle liegen nun die Dinge im einzelnen so: Zwischen dem »Bettungsdruck« $p(x)$ und der »Einsenkung« $w(x)$ nimmt Zimmermann, darin ganz seinen Vorgängern folgend, den einfachen Zusammenhang

$$w(x) = \text{konst. } p(x)$$

[1]) H. Zimmermann, Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues. Berlin 1888.

an, was, wie in **2** näher ausgeführt wird, prinzipiell mangelhaft ist. Vielmehr hat man einen Zusammenhang wie

$$w(x) = \text{konst.} \int_{-a}^{+a} p(\xi)\, K(|x-\xi|)\, d\xi$$

zu wählen und bekommt dadurch, da zwar K, aber nicht p von vornherein bekannt ist, mit sogenannten »Integralgleichungen erster Art« zu tun. Zwischen den Funktionen w und p besteht nun noch ein — gleich näher zu erörternder — zweiter Zusammenhang, durch den zusammen mit bezw. der einen oder andern der obigen Gleichungen beide Funktionen bestimmt sind. Indessen zeigt sich, daß ihre wirkliche Ermittlung bei allgemeiner Wahl des »Kerns« K auf ganz uferlose Rechnereien führt, wie die Auflösung unendlicher Gleichungsysteme, deren Koeffizienten selbst erst mühsam berechnet werden müssen u. dergl. Nur wenn man für K eine ganz bestimmte — und im übrigen zulässige, plausible — Wahl trifft, wird die ganze Theorie verhältnismäßig einfach. Dabei spielen die »Eigenfunktionen« und »Eigenwerte« dieses Kerns entscheidend mit.

Was den schon erwähnten zweiten Zusammenhang zwischen $p(x)$ und $w(x)$ angeht, so ist dieser bei Zimmermann einfach die in der technischen Literatur so genannte »Differentialgleichung der elastischen Linie«:

$$\frac{d^4 w}{d x^4} = \text{konst.}\, [p_0(x) - p(x)],$$

wo $p_0(x)$ die Belastung des Balkens kennzeichnet. Mit dieser Gleichung, die im allgemeinen jedenfalls nur näherungsweise richtig ist, setzen wir uns in **4** auseinander, aber schon hier ist zu erwähnen, daß ihre Beibehaltung neben der obigen Integralgleichung nur dann möglich ist, wenn man sich zu der Annahme entschließt, der Bettungsdruck $p(x)$ arte an den Balkenenden in »konzentrierte Drucke« aus, weil man nämlich sonst mehr Randbedingungen zu befriedigen hätte, als man willkürliche Integrationskonstante zur Verfügung hat. Dieser Sachverhalt aber kann, wegen der nur bedingten Zuverlässigkeit der obigen Differentialgleichung, die Annahme einer so starken Singularität der Funktion $p(x)$, wie sie die Ausartung in konzentrierte Drucke bedeutet, nicht genügend rechtfertigen. Vielmehr ist eine befriedigende Aufklärung hier nur dadurch zu erwarten, daß diese Differentialgleichung zugunsten eines genaueren, aus der mathematischen Elastizitätstheorie zu entnehmenden Zusammenhanges aufgegeben wird. Mit Hilfe der bekannten Theorie der Airyschen Spannungsfunktion ergibt sich nun, daß man p_0, p, w durch gewisse unendliche Reihen Fourierscher Art darstellen kann in der Weise, daß, wenn — bei Beschränkung auf in x gerade Funktionen —

$$p_0(x) = \sum_\omega a_{0\omega} \cos\, \omega \pi x/a \quad \text{und} \quad p(x) = \sum_\omega a_\omega \cos\, \omega \pi x/a$$

gesetzt wird, alsdann

$$w(x) = \sum_\omega (\alpha_\omega a_{0\omega} + \beta_\omega a_\omega + \gamma_\omega) \cos\, \omega \pi x/a$$

ist, wo die α, β, γ nicht mehr von den a_0 und a abhängen.

Es stellt sich dann heraus, daß die stärkste Singularität, die auftreten kann, ein schwaches Unendlichwerden von $p(x)$ an den Balkenenden ist, daß aber konzentrierte Drucke nicht vorkommen, es sei denn, daß man den besonderen Fall des absolut starren Balkens behandelt, der ja aber nur als Grenzfall der Wirklichkeit in Betracht kommt. Die Beibehaltung der obigen Differentialgleichung in der neuen Theorie würde also bedeuten, daß man sich mit einer vergröberten Darstellung der Verhältnisse begnügt.

Endlich sei noch erwähnt, daß wir uns bei der schließlichen Durchführung der Theorie im einzelnen entschlossen haben, für die Belastung des Balkens eine ganz besondere Wahl zu treffen, nämlich $p_0(x) = \text{konst.}$ Eine prinzipielle Vereinfachung ist zwar dadurch nicht zu erzielen; aber einmal wird das Formelschreibwerk erheblich abgekürzt, sodann werden die Zahlenrechnungen verhältnismäßig einfach und endlich weichen gerade in diesem Falle die Ergebnisse der neuen Theorie von denen der alten besonders charakteristisch ab. Während Zimmermann findet, daß bei gleichmäßiger Belastung auch Bettungsdruck und Einsenkung konstant sind, finden wir, daß der Bettungsdruck von der Balkenmitte aus nach den Enden hin zunächst ab- und dann stark zunimmt, während die Einsenkung von der Mitte aus nach den Enden hin fortwährend abnimmt.

1. Die Zimmermannsche Theorie. Der Balken von der Länge $2a$, dem Elastizitätsmodul E und dem maßgebenden (konstanten) Querschnittsträgheitsmomente J ruhe, zunächst unbelastet, der ganzen Länge nach auf einer elastisch nachgiebigen Unterlage, Abb. 1. Belasten wir nun die obere Begrenzungsfläche des Balkens mit $p_0(x)$ pro Längeneinheit[1]) und die Kopfenden $x = \pm a$ mit beliebigen Biegungsmomenten $\mathfrak{M}_r$, $\mathfrak{M}_l$ und Schubkräften Q_r, Q_l — wir nennen sie im folgenden kurz die vorgeschriebenen Randmomente und Randkräfte — so wird sich, nach anfänglich eingetretenen Schwingungen, schließlich ein Gleichgewichtszustand herausbilden. Dabei wird der Balken eine Durchbiegung erfahren haben, die wir, nach unten positiv gerechnet, $w_d(x)$ nennen wollen, Abb. 2, während wir die Einsenkung der Unterlage an derselben Stelle mit $w_e(x)$ bezeichnen. Ueberall dort nun, wo sich auch jetzt noch Balken und Unterlage berühren, wo also $w_d(x) = w_e(x)$ ist, wird zwischen beiden ein gegenseitiger Druck pro Längeneinheit, der Bettungsdruck $p(x)$, übertragen werden, der natürlich dort, wo etwa keine gegenseitige Berührung mehr ist $(w_e(x) > w_d(x))$, verschwindet. Das Problem ist nun, bei beliebig vorgegebener Belastung die drei Funktionen $p(x)$, $w_d(x)$ und $w_e(x)$ zu finden. Dabei wird man zweckmäßig noch zwischen der »inneren« Einsenkung w_{ei} (für $|x| \leqq a$) und der »äußeren« w_{ea} (für $|x| \geqq a$) unterscheiden.

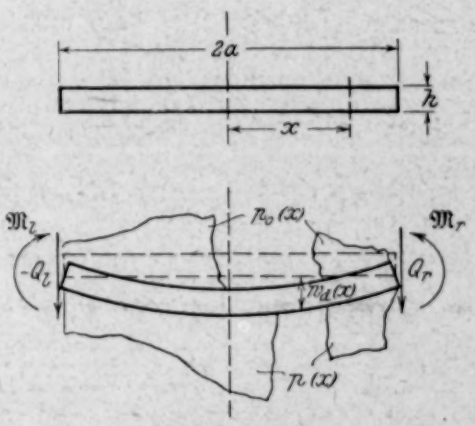


Abb. 1 und 2

Wir wollen nun der Einfachheit wegen von vornherein annehmen, daß in allen von uns später betrachteten Fällen eine Trennung des Balkens von der Unterlage tatsächlich nirgends stattfindet; wir brauchen dann zwischen der inneren Einsenkung und der Durchbiegung nicht mehr scharf zu unterscheiden, sparen demgemäß die Indizes e und d und handeln im folgenden nur noch von der inneren Einsenkung $w_i(x)$, der äußeren Einsenkung $w_a(x)$ und — gelegentlich — auch zusammenfassend von der Einsenkung $w(x)$ schlechthin. Das Problem ist nunmehr, bei gegebenen

$$p_0(x),\ \mathfrak{M}_r,\ \mathfrak{M}_l,\ Q_r,\ Q_l$$

die Funktionen $p(x)$ und $w(x)$ zu ermitteln.

Die beiden Beziehungen, die man offenbar hierzu nötig hat, werden die physikalische Natur bezw. des Balkens und der Unterlage zum Ausdruck bringen. Was zunächst den Balken angeht, so übernimmt Zimmermann den in der technischen Literatur allgemein üblichen Zusammenhang zwischen Durchbiegung und Biegungsmoment $\mathfrak{M}(x)$ eines elastisch-isotropen, nur wenig gekrümmten Stabes, nämlich

$$EJ\frac{d^2 w_i}{dx^2} = -\mathfrak{M}(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

aus dem sich dann, wenn man die bekannten Gleichgewichtsbedingungen

$$Q(x) = \frac{d\mathfrak{M}}{dx},\quad p(x) - p_0(x) = \frac{dQ}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

hinzunimmt, die sogenannte »Differentialgleichung der elastischen Linie«

$$EJ\frac{d^4 w_i}{dx^4} = p_0(x) - p(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

ergibt nebst der Beziehung:

$$Q(x) = -EJ\frac{d^3 w_i}{dx^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4);$$

was aber die Unterlage angeht, so nimmt er an, daß an jeder Stelle x Bettungsdruck und Einsenkung einander proportional sind:

$$w_i(x) = \frac{p(x)}{C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

---

[1]) In praktischen Fällen, z. B. bei der Eisenbahnschwelle, denkt man sich die Belastung gern als aus einer endlichen Anzahl endlicher Kräfte bestehend, die an einzelnen Stellen des Balkens angreifen. Es wird dann an diesen Stellen die »Belastung pro Längeneinheit« unendlich groß und im übrigen Null, d. h. in diesem Falle ist $p_0(x)$ kein geeignetes Darstellungsmittel. In der vorliegenden Abhandlung wird an Belastungen gedacht, bei denen $p_0(x)$ regulär ist.

Die Konstante C, die »Bettungsziffer«, charakterisiert dabei die Unterlage, insofern als ein großer Wert von C eine harte, ein kleiner eine weiche Unterlage bedeutet.

Durch Kombination der Ansätze (3) und (5) bekommt man dann für w_i oder p eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung 4. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$\frac{d^4 w_i}{dx^4} + \frac{1}{CEJ} w_i(x) = \frac{p_0(x)}{EJ} \quad \text{oder} \quad \frac{d^4 p}{dx^4} + \frac{1}{CEJ} p(x) = \frac{p_0(x)}{CEJ} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Ihr allgemeines Integral enthält vier willkürliche Konstante, die sich eindeutig aus den aus (2) und (4) entspringenden 4 Randbedingungen:

$$EJ\left(\frac{d^2 w_i}{dx^2}\right)_{x=a} = -\mathfrak{M}_r,\ EJ\left(\frac{d^2 w_i}{dx^2}\right)_{x=-a} = -\mathfrak{M}_l,\ EJ\left(\frac{d^3 w_i}{dx^3}\right)_{x=a} = -Q_r,\ EJ\left(\frac{d^3 w_i}{dx^3}\right)_{x=-a} = -Q_l \,. \quad (7)$$

ergeben. Die äußere Einsenkung ist immer Null:

$$w_a(x) = 0.$$

Sind z. B. die Randkräfte und -momente Null und ist im übrigen der Balken gleichmäßig belastet: $p_0(x) = \text{konst.} = p_0$, so bekommt man einfach

$$w_i(x) = \frac{p_0}{C} = \text{konst.}, \quad p(x) = p_0 = \text{konst.}, \quad w_a(x) = 0$$

als Lösung, vgl. Abb. 3.

2. Kritik des Ansatzes (5). Dieser Ansatz ist prinzipiell mangelhaft nicht etwa, weil er zwischen Bettungsdruck und Einsenkung Proportionalität festsetzt, sondern deshalb, weil er die Annahme in sich schließt, daß ein irgendwo auf die Unterlage ausgeübter Druck nur an dieser Stelle eine Einsenkung erzeugt, während doch in Wirklichkeit nur ein mehr oder weniger allmähliches Abnehmen der Einsenkung von der gedrückten Stelle aus in Betracht kommen kann[1]), Abb. 4. Umgekehrt kann dann die Einsenkung an der Stelle x nicht nur vom Bettungsdruck an dieser Stelle abhängen, vielmehr wird sie von allen Bettungsdrucken abhängen, die überhaupt vorhanden sind. Wir haben also den Ansatz (5)

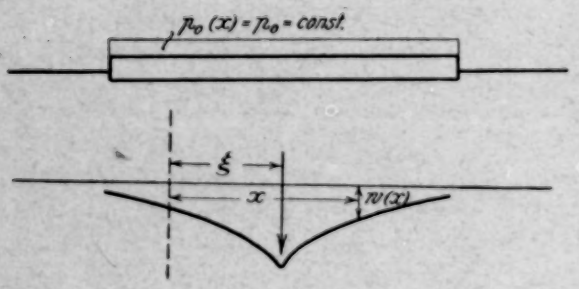


Abb. 3 und 4

durch den folgenden zu ersetzen:

$$w(x) = c \int_{-a}^{+a} p(\xi)\, K(|x-\xi|)\, d\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

wo K jedenfalls eine solche Funktion der gegenseitigen Entfernung der Stellen x und ξ, nämlich $r = |x-\xi|$, ist, die ihren größten Wert für $x = \xi$ hat und für wachsendes r entweder schon im Endlichen, jedenfalls aber im Unendlichen verschwindet, Abb. 4. Die Konstante c ist ein Analogon zu der Zimmermannschen Bettungszifer C, nur bedeutet ein großes c eine weiche, ein kleines eine harte Unterlage.

Wie soll man nun die Funktion $K(r)$ wählen? Wäre die Unterlage etwa der elastisch-isotrope Halbraum, so wäre diese Wahl überhaupt nicht frei, sondern K durch die Elastizitätslehre völlig bestimmbar[2]), aber diese Annahme ist natürlich zu gewagt.

---

[1]) Zimmermanns (a. a. O., S. 1 Fußnote) Meinung, die Gleichung (5) sei bei kleinen Formänderungen immer zulässig, ist also nur insofern zutreffend, als sie die Annahme der Proportionalität zwischen Bettungsdruck und Einsenkung in sich schließt. Diese steht aber auch in unserm Ansatze (8): eine Ver-n-fachung von $p(\xi)$ hat auch eine Ver-n-fachung von $w(x)$ zur Folge.

[2]) Unterliegt ein Stück der Oberfläche des elastisch-isotropen Halbraumes der Flächendruckverteilung $p'(\xi\eta)$, so erfährt dadurch der Punkt xy der Oberfläche bekanntlich (siehe etwa A. E. H. Lowe, Lehrbuch der Elastizität; deutsch von A. Timpe, Leipzig und Berlin 1907, S. 226) die Einsenkung:

$$w(xy) = \frac{m^2-1}{m^2 \pi E} \iint \frac{p'(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}},$$

wo m in üblicher Weise den reziproken Wert der Poissonschen Konstanten bedeutet (m = sog. »Verhältnis von Längenausdehnung zur Querkontraktion«). Ist das Stück nun ein Rechteck, dessen zur Y-Achse parallele Seite 2ε klein ist im Vergleich zu der zur X-Achse parallelen Seite $2a$, so wird es näherungsweise erlaubt sein, die Veränderlichkeit von p' mit η zu vernachlässigen. Man kann dann die

Eher könnte man daran denken, $K(r)$ direkt aus Versuchen zu ermitteln. Es ist interessant, daß hier tatsächlich einige vorläufige Zahlen vorliegen als Ergebnis eines Versuches, den A. Föppl im Hofe seines Laboratoriums angestellt hat[1]). Aus ihnen geht jedenfalls hervor, daß $K(r)$ mit wachsendem r viel stärker abnimmt, als es beim elastisch-isotropen Halbraum der Fall wäre. Ja man könnte von hier aus auf den Gedanken kommen, $K(r)$ als Exponentialfunktion:

$$K(|x-\xi|) = e^{-k|x-\xi|} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

anzusetzen. Indessen soll, wenn wir dies nachher wirklich tun, nicht verschwiegen werden, daß der eigentliche Grund für diese Wahl doch ein anderer ist: Nur bei dieser Wahl nämlich ist die neue Theorie einigermaßen bequem zu entwickeln und bis zur praktischen Möglichkeit, Zahlenbeispiele auszurechnen, durchzuführen.

Nachdem wir so die eine Grundgleichung der alten Theorie (5) aufgegeben haben, wollen wir die andere, die Differentialgleichung der elastischen Linie, einstweilen noch beizubehalten versuchen (**4**). Dabei werden wir freilich auf Schwierigkeiten stoßen und deshalb weiterhin (**5**) auch diese Gleichung noch fallen lassen. Zunächst aber wollen wir zwei Grenzfälle untersuchen, bei denen es ganz einerlei ist, ob wir dies tun oder nicht.

3. Der absolut biegsame und der absolut starre Balken. Besonders einfach gestaltet sich die Ermittlung von Bettungsdruck und Einsenkung im Falle des absolut biegsamen Balkens ($E = 0$). Hier wird, auf Grund der Gl. (3), ebenso wie bei Benutzung irgend eines feineren Ansatzes:

$$p_0(x) = p(x)$$

(die Randkräfte und Randmomente können natürlich nur zu Null vorgeschrieben werden). Die Ermittlung der Einsenkung verlangt dann nur noch die Ausführung der Quadratur:

$$w(x) = c \int_{-a}^{+a} p_0(\xi)\, K(|x-\xi|)\, d\xi.$$

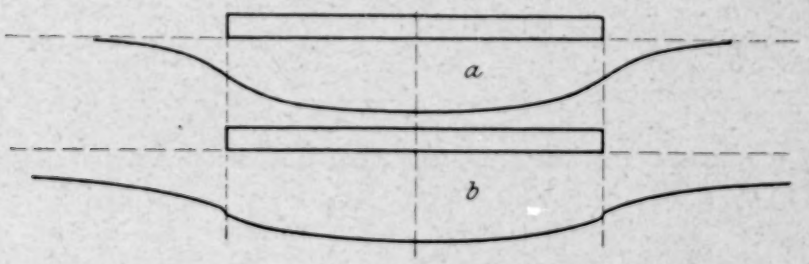


Abb. 5

Die Abb. 5 und folgende Formeln schildern den Verlauf von $w(x)$ bei verschiedener Wahl der Funktion K für den Fall der gleichmäßigen Belastung: $p_0(x) = \text{konst.} = p_0$.

a) Es ist für $K = e^{-k|x-\xi|}$:

$$w_i(x) = \frac{c\,p_0}{k}\left(2 - e^{-k(a+x)} - e^{-k(a-x)}\right), \qquad w_a(x) = \frac{c\,p_0}{k}\left(e^{ka} - e^{-ka}\right) e^{-k|x|} \quad (10);$$

Integration nach η ausführen und bekommt bei gleichzeitigem Uebergang vom Flächendruck p' zum Druck pro Längeneinheit $p = 2\varepsilon p'$:

$$w(xy) = \frac{m^2-1}{m^2 \pi E}\,\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-a}^{+a} p(\xi)\log\frac{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\varepsilon)^2}-(y-\varepsilon)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\varepsilon)^2}-(y+\varepsilon)}\,d\xi.$$

Unter der Einsenkung des Balkens an der Stelle x wäre dann der Mittelwert

$$w(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} w(xy)\,dy$$

zu verstehen. Nimmt man statt dessen einfacher den Wert von $w(xy)$ für $y = 0$, so bekommt man:

$$w(x) = \frac{m^2-1}{m^2 \pi E}\,\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-a}^{+a} p(\xi)\log\left(\frac{2\varepsilon}{\sqrt{(x-\xi)^2+\varepsilon^2}-\varepsilon}\right)d\xi.$$

[1]) A. Föppl: Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. III, Festigkeitslehre, Leipzig und Berlin 1909. S. 228 ff.

b) es ist für $K = \log\left(1 + \frac{k}{|x-\xi|}\right)$:

$$w_i(x) = cp_0\,[(k+a+x)\log(k+a+x) + (k+a-x)\log(k+a-x) - (a+x)\log(a+x) - (a-x)\log(a-x) - 2k\log k]$$

$$w_a(x) = cp_0\,[(k+x+a)\log(k+x+a) - (k+x-a)\log(k+x-a) - (x+a)\log(x+a) + (x-a)\log(x-a)] \text{ für } x \geqq a$$

Während in der alten Theorie die Einsenkung an den Balkenenden sich sprungweise ändert (vergl. Abb. 3), ist sie in der neuen durchaus stetig. Im Falle a) weist sie an den Balkenenden überhaupt nichts Singuläres auf, im Falle b) hat sie dort eine vertikale Berührende, was damit zusammenhängt, daß im einen Falle $K(o)$ endlich, im andern unendlich groß ist.

Im entgegengesetzten Falle des absolut starren Balkens ($E = \infty$) handelt es sich dagegen um ein schwieriges Problem. Zwar ist, eben wegen der Starrheit des Balkens, die innere Einsenkung einfach eine lineare Funktion, ja, wenn wir uns auf symmetrische Belastung beschränken, sogar eine Konstante:

$$w_i(x) = \text{konst.} = w_0,$$

aber jetzt hat man die unbekannte Funktion $p(x)$ aus der Gl. (8) bei gegebener Funktion $w_i(x) = w_0$ zu ermitteln, man hat also eine Integralgleichung erster Art aufzulösen, was keineswegs leicht ist und jedenfalls nur bei besonderer Wahl von K, des »Kerns« der Integralgleichung, praktisch möglich sein wird. Vor allem ist wichtig zu wissen, daß die Integralgleichung überhaupt nicht immer dann, wenn $w_i(x)$ eine reguläre, singularitätenfreie Funktion ist, eine ebensolche Funktion $p(x)$ als Lösung besitzt! So muß z. B., wenn wir als Kern unsere Exponentialfunktion (9) wählen, $w_i(x)$ ganz bestimmten Randbedingungen genügen (siehe **4.**), wenn $p(x)$ regulär sein soll. Diese Randbedingungen befriedigt nun die Funktion $w_i(x) = \text{konst.}$ nicht und so muß unser $p(x)$ Singularitäten enthalten. Welcher Art diese sind und wie überhaupt $p(x)$ herauskommt, zeigt folgende Betrachtung:

Aus der Gl. (11) folgt zunächst, daß p nicht etwa konstant sein kann; denn wäre etwa $p(x) = \text{konst.} = p_1$, so wäre nach dieser Gleichung die innere Einsenkung:

$$w_i'(x) = \frac{cp_1}{k}\,(2 - e^{-k(a+x)} - e^{-k(a-x)}),$$

also nicht konstant. Nun sind aber die die Konstanz von w_i verhindernden Glieder Exponentionalfunktionen und lassen sich deshalb durch zwei an den Balkenenden wirkende konzentrierte Drucke $D = \frac{p_1}{k}$ wegschaffen, denn diesen beiden Drucken für sich genommen würde ja die innere Einsenkung

$$w_i''(x) = \frac{cp_1}{k}\left(e^{-k(a+x)} + e^{-k(a-x)}\right)$$

entsprechen, so daß also bei der Ueberlagerung der gleichmäßigen Druckverteilung p_1 mit diesen konzentrierten Drucken tatsächlich die konstante innere Einsenkung

$$w_i(x) = \frac{2cp_1}{k}$$

herauskommt. Berücksichtigt man noch, daß wegen des Balkengleichgewichtes

$$2ap_1 + 2D = P + 2Q$$

sein muß, wo abkürzend

$$\int_{+a}^{+a} p_0(x)\,dx = P$$

gesetzt ist, während Q die am rechten Balkenende vorgeschriebene Schubkraft bedeutet (am linken ist sie wegen der Symmetrie der Belastung $-Q$), so gelangt man zu folgendem Ergebnis:

Wenn ein in beschriebener Weise mit P und $2Q$ belasteter **starrer** Balken in die durch

$$K = e^{-k|x-\xi|}$$

charakterisierte elastische Unterlage eingedrückt wird, so setzt sich der Bettungsdruck zusammen aus der gleichmäßigen Druckverteilung

$$p_1(x) = \frac{k(P+2Q)}{2(1+ak)}$$

und den beiden gleichen konzentrierten Drucken D an den beiden Balkenenden:

$$D = \frac{P + 2Q}{2(1 + ak)};$$

die Einsenkung wird durch die Ausdrücke:

$$w_i(x) = \text{konst.} = \frac{c(P + 2Q)}{1 + ak}, \quad w_a(x) = \frac{c(P + 2Q)}{1 + ak} e^{-k(x-a)} \text{ für } x \geqq a$$

dargestellt. Zwei an den Balkenenden etwa noch vorgeschriebene (wegen der Symmetrie gleiche) Biegungsmomente sind ohne jeden Einfluß auf das Ergebnis, wie von vornherein plausibel ist. Die Einsenkungskurve ist zwar überall stetig, hat aber an den Balkenenden Knicke, Abb. 6.

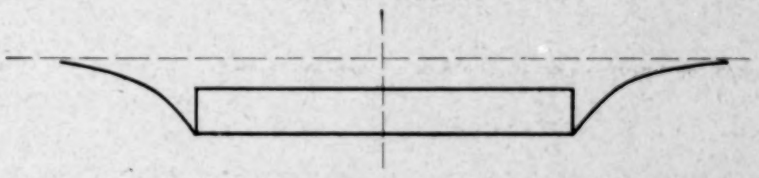


Abb. 6

Es wäre interessant, wenn man unsere Aufgabe auch für den elastisch-isotropen Halbraum als Unterlage lösen könnte, also unter Benutzung des Kerns in der Fußnote 2 (S. 168, letzte Gleichung). Wie es scheint, ist die Lösung leider unbekannt. Dagegen kennt man hier die Lösung für den Fall, daß es sich nicht um einen Balken handelt, sondern um einen Kreiszylinder, Abb. 7. Auch hier werden natürlich alle Funktionen nur von einer Veränderlichen abhängen, dem Horizontalabstande r von der Drehachse des Zylinders. Ist a der Halbmesser, m der reziproke Wert der sogenannten Poissonschen Konstanten für das Zylindermaterial (m = »Längsdehnung : Querkontraktion«), so ist nach H. Weber[1]):

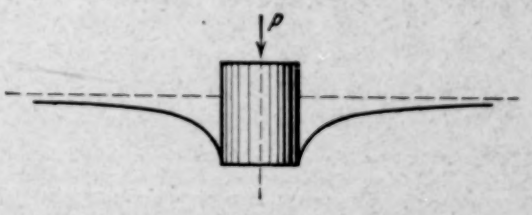


Abb. 7

$$p(r) = \frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}}, \quad w_i(r) = \text{konst.} = \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{P}{2aE}, \quad w_a(r) = \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{P}{2aE} \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{a}{r}.$$

Auch hier ist also der Bettungsdruck am Rande singulär, insofern er dort unendlich groß wird, aber das bedeutet keinen konzentrierten Druck, denn die Funktion

$$f(r) = \int_0^r \varrho\, p(\varrho)\, d\varrho$$

ist auch an der Stelle $r = a$ stetig, während bei unserm Balken die Funktion

$$f(x) = \int_0^x p(z)\, dz$$

bei $x = a$ plötzlich den endlichen Zuwachs D erfährt.

4. Der elastische Balken; vorläufige Beibehaltung der Differentialgleichung (3). Beim elastischen Balken wird das mathematische Problem noch verwickelter; es handelt sich jetzt darum, $w_i(x)$ und $p(x)$ aus (3) und (8) zu ermitteln. Der unmittelbare Versuch, zwischen diesen Gleichungen eine der beiden gesuchten Funktionen zu eliminieren, etwa $p(x)$, führt zu einer »Integrodifferentialgleichung«, mit der nichts rechtes anzufangen ist. Besser wird es sein, die Integralgleichung (8) durch eine Differentialgleichung zwischen $p(x)$ und $w_i(x)$ — nebst gewissen Randbedingungen für $w_i(x)$ — zu ersetzen, was nach D. Hilbert[2]) jedenfalls dann möglich ist, wenn der Kern der Integralgleichung sich als Greensche Funktion eines sich selbst adjungierten Differentialausdrucks zweiter Ordnung auffassen läßt. Um aber hier die Bekanntschaft mit Hilberts Theorie der linearen Integralgleichungen nicht voraussetzen zu müssen, wollen

---

[1]) H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik (nach Riemanns Vorlesungen), Braunschweig 1901, Bd. 2, S. 196 bis 202.

[2]) D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig und Berlin 1912, S. 39 ff.

wir zunächst diese Ergebnisse ableiten, ohne diese Theorie zu benutzen, was ganz leicht ist, wenn wir als Kern wieder die Exponentialfunktion (9) wählen.

Nehmen wir an, $p(x)$ arte nirgends in konzentrierte Drucke aus, so bekommen wir durch direkte Differentiation von $w(x)$ folgende Formeln:

$$\frac{dw_i}{dx} = -ck\int_{-a}^{x} p(\xi)\, e^{-k(x-\xi)}\, d\xi + ck\int_{x}^{a} p(\xi)\, e^{-k(\xi-x)}\, d\xi \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$\frac{d^2 w_i}{dx^2} = ck^2\int_{-a}^{+a} p(\xi)\, e^{-k|x-\xi|}\, d\xi - 2ck\, p(x)$$

$$\frac{dw_a}{dx} = -ck\int_{-a}^{+a} p(\xi)\, e^{-k(x-\xi)}\, d\xi \text{ für } x \geqq a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$\frac{dw_a}{dx} = +ck\int_{-a}^{+a} p(\xi)\, e^{-k(\xi-x)}\, d\xi \text{ für } x \leqq -a.$$

Die Elimination der Integrale aus diesen Gleichungen führt zu folgenden Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 w_i}{dx^2} - k^2 w_i(x) = -2ck\, p(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$\frac{dw_a}{dx} = -k\, w_a(x) \text{ für } x \geqq a \quad \text{und} \quad \frac{dw_a}{dx} = k\, w_a(x) \text{ für } x \leqq -a$$

Die äußeren Einsenkungskurven sind demnach immer Zweige von Exponentialkurven:

$$w_a(x) = \text{konst.}\, e^{-k|x|}.$$

Während nun die Einsenkungskurve selbst an den Balkenenden sich immer stetig verhält, gilt dasselbe für ihren ersten Differentialquotienten nur dann, wenn $p(x)$ an den Enden nicht in konzentrierte Drucke ausartet, denn aus (11) und (12) ergibt sich die Stetigkeit solange, als

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-a}^{-(a-\varepsilon)} p(z)\, dz = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a-\varepsilon}^{a} p(z)\, dz = 0$$

ist, oder, was dasselbe ist, solange sich die Funktion

$$f(x) = \int^{x} p(z)\, dz$$

auch für $x = \pm a$ stetig verhält. Dazu ist, wie schon früher bemerkt wurde (3), keineswegs nötig, daß $p(\pm a)$ endlich bleibt.

Solange wir also konzentrierte Drucke ausschließen, bestehen für die innere Einsenkung die Randbedingungen:

$$\left(\frac{d\, w_i(x)}{dx}\right)_{x=a} = -k\, w_i(a), \quad \left(\frac{d\, w_i(x)}{dx}\right)_{x=-a} = k\, w_i(-a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Um noch zu erkennen, daß sich aus der Integralgleichung (8) außer der Differentialgleichung (13) und den Randbedingungen (14) nicht noch weitere Bedingungen für $w_i(x)$ und $p(x)$ ergeben, setzen wir $p(x)$, wie es aus (13) folgt, in die Integralgleichung ein und eliminieren daraus durch wiederholte partielle Integration die Differentialquotienten von $w_i(x)$. Dann bekommen wir:

$$w_i(x) = w_i(x) + \frac{e^{-k(a+x)}}{2k}\left[\left(\frac{d\, w_i}{dx}\right)_{x=-a} - k\, w_i(-a)\right] - \frac{e^{-k(a-x)}}{2k}\left[\left(\frac{d\, w_i}{dx}\right)_{x=a} + k\, w_i(a)\right],$$

also eine Identität, falls die Randbedingungen erfüllt sind. Es ist also tatsächlich das Bestehen der Integralgleichung (8) äquivalent mit der Differentialgleichung (13) und den Randbedingungen (14), falls $p(x)$ nirgends in konzentrierte Drucke ausartet [1]).

---

[1]) Nach Hilbert (a. a. O., S. 39 bis 47) hätte sich die Untersuchung so gestaltet: Wir betrachten den sich selbst adjungierten Differentialausdruck zweiter Ordnung:

$$L(u) = \frac{1}{2c}\left(\frac{1}{k}\frac{d^2 u}{dx^2} - k\, u(x)\right).$$

Nunmehr können wir leicht aus den Differentialgleichungen (3) und (13) $p(x)$ eliminieren und behalten dann für $w_i(x)$ die gewöhnliche lineare Differentialgleichung 4. Ordnung übrig:

$$E J \frac{d^4 w_i}{dx^4} - \frac{1}{2kc} \frac{d^2 w_i}{dx^2} + \frac{k}{2c} w_i(x) = p_0(x).$$

Ihre allgemeine Lösung enthält vier willkürliche Konstante, denen aber sechs Randbedingungen gegenüberstehen, nämlich außer den soeben abgeleiteten (14) noch jene vier, die den vorgeschriebenen Randkräften und -momenten entsprechen (7).

Wie erklärt sich diese Unstimmigkeit und wie ist sie zu beheben?

Wir haben gesehen, daß bei der Ableitung der obigen Randbedingungen die Annahme wesentlich war, der Bettungsdruck arte an den Balkenenden nicht in konzentrierte Drucke aus. Es liegt also die Vermutung nahe, daß die Unstimmigkeit sofort verschwinden wird, wenn wir annehmen, die reguläre Bettungsdruckverteilung werde an den Balkenenden noch durch zwei noch näher zu bestimmende konzentrierte Drucke D_1 und D_2 überlagert. In der Tat läßt sich hierdurch die Schwierigkeit beheben, wie sich leicht genauer zeigen ließe. Indessen bedeutet das keine wirkliche Aufklärung. Obwohl wir nämlich nach den Ergebnissen in **3** annehmen müssen, daß beim starren Balken diese konzentrierten Drucke wirklich auftreten, ist es doch unwahrscheinlich, daß dasselbe für den elastischen Balken gelten solle, ist es doch in der Mechanik nichts Ungewöhnliches, daß die Einführung des starren Körpers absurde Ergebnisse zeitigt, die sofort verschwinden, wenn man ihn durch einen elastischen Körper ersetzt. Jedenfalls ist von vornherein die Möglichkeit nicht von der Hand zu weisen, daß unsere ganze Schwierigkeit ihren Grund in der nur bedingten Zuverlässigkeit der Differentialgleichung (3) hat. Es ist ja bekannt, daß man mit Hilfe der mathematischen Elastizitätstheorie leicht Spannungs- und Verrückungssysteme in Balken angeben kann, bei denen die der Gleichung (3) zugrunde liegende Beziehung (1) gar nicht gilt. Es ist dies auch nach der Art, wie diese Beziehung gewonnen wird, gar nicht merkwürdig; insbesondere wird man immer dann, wenn der Balken der ganzen Länge nach von Drucken p_0 und p ergriffen ist, mit der Möglichkeit rechnen müssen, daß die Sache nicht stimmt[1]).

Setzen wir nun:

$$u(x\,\xi) = \frac{1}{2k} e^{-k|x-\xi|},$$

so hat dieser Ausdruck, als Funktion von x betrachtet, folgende Eigenschaften:

1. $u(x)$ genügt im Intervalle von $-a$ bis $+a$ für alle $x \lesseqgtr \xi$ der Differentialgleichung $L(u) = 0$,
2. $u(x)$ ist im ganzen Intervall stetig, auch für $x = \xi$,
3. $\frac{du}{dx}$ ist stetig mit Ausnahme der Stelle $x = \xi$, wo es plötzlich um den Betrag -1 springt (wenn man im Sinne wachsender x die Stelle passiert).

Somit ist $u(x\,\xi)$ eine Grundlösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$ in dem genannten Intervall.

Da aber weiter, wie man leicht sieht, $u(x)$ auch die Randbedingungen

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=a} = -k\,u(a) \quad \text{und} \quad \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=-a} = k\,u(-a)$$

befriedigt, ist $u(x\,\xi) = g(x\,\xi)$, d. h. eine zu diesen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion der Differentialgleichung $L(u) = 0$ und somit ist endlich

$$G(x\,\xi) = 2ckg(x\,\xi) = ce^{-k|x-\xi|}$$

die zu diesen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion des Differentialausdrucks $L(u)$. Daraus folgt aber, daß, unter $w_i(x)$ eine im ganzen Intervall zweimal stetig differenzierbare und den obigen Randbedingungen genügende Funktion verstanden, die einander äquivalenten Gleichungen bestehen:

$$w_i(x) = \int_{-a}^{+a} G(x\,\xi)\, p(\xi)\, d\xi \quad \text{und} \quad p(x) = -L[w_i(x)]$$

also:

$$w_i(x) = c\int_{-a}^{+a} p(\xi)\, e^{-k|x-\xi|}\, d\xi \quad \text{und} \quad p(x) = \frac{1}{2c}\left(k\,w_i(x) - \frac{1}{k}\frac{d^2 w_i}{dx^2}\right).$$

[1]) Love-Timpe a. a. O., S. 415 bis 417).

Somit kann eine wirkliche Aufklärung nur dadurch erreicht werden, daß wir die Gleichung (3) fallen lassen und durch einen zuverlässigen Ansatz der mathematischen Elastizitätstheorie ersetzen. Dabei kommt, wie schon in der Einleitung erwähnt, heraus, daß beim elastischen Balken die konzentrierten Drucke nicht vorhanden sind. Deshalb verzichte ich hier auch darauf, die Möglichkeit, die Gleichung (3) durch Einführung obiger Drucke D_1 und D_2 formal zu retten, genauer auseinanderzusetzen, begnüge mich vielmehr damit, ein von mir durchgerechnetes Zahlenbeispiel mit dem Ergebnis der in den folgenden Nummern durchgeführten feineren Untersuchung für dasselbe Zahlenbeispiel zu vergleichen (**8**).

5. Der elastische Balken; Ersatz der Differentialgleichung (3) durch einen Ansatz der mathematischen Elastizitätstheorie. a) Vorbemerkung. Um im folgenden kein unerträglich weitläufiges Formelschreibwerk zu bekommen, vermeiden wir einmal jede unnötige Allgemeinheit der Betrachtung (der Leser wird hier, wenn er wünscht, leicht zur Ergänzung imstande sein) und unterdrücken möglichst viel bloße Zwischenrechnung.

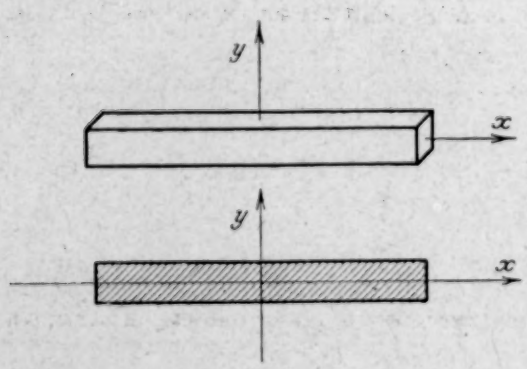


Abb. 8

b) Allgemeines Programm. Unser Balken sei ein Parallelepiped von der Länge $2a$, der Höhe $h = 2b$ und der Dicke δ. In seiner zu δ senkrechten Mittelebene orientieren wir uns durch das Koordinatensystem der Abb. 8. Alle am Balken angreifenden Kräfte mögen zu dieser Ebene symmetrisch liegen. Wir können dann die bekannte Theorie der Airyschen Spannungsfunktion[1]) anwenden: Sei für unser schraffiertes Rechteck $F(x\,y)$ irgend eine biharmonische Funktion, d. h. eine Funktion, die im ganzen Rechteck der partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$

genügt. Dann definieren die drei zweiten Differentialquotienten von F in bekannter Weise einen in unserm Balken möglichen Spannungszustand (die Spannungen sind hier pro Flächeneinheit gemeint, nicht wie p und p_0 pro Längeneinheit):

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

wobei der Sinn (das Vorzeichen) aus der Abb. 9 hervorgeht. Auch an den Rändern $x = \pm a$ und $y = \pm b$ unseres Rechteckes werden diese Formeln gelten, aber unter »Randspannungen« mögen nicht alle drei Spannungskomponenten (15) verstanden sein, die wir an einem Randpunkte haben, sondern nur jene zwei, die ihren Sitz in der Randfläche haben, also für $x = \pm a$ die Komponenten σ_x und τ_{xy}, für $y = \pm b$ dagegen σ_y und τ_{xy}; wir bezeichnen sie kurz als »die Randspannungen σ_n, τ_n«. Sind nun ringsum die Randspannungen beliebig vorgeschrieben (aber natürlich so, daß sie zusammen ein Gleichgewichtssystem von Kräften ergeben), so gibt es eine, wesentlich eindeutig bestimmte, im Rechteck biharmonische Funktion $F(x\,y)$, welche ringsum die vorgeschriebenen Randspannungen liefert, die »zu diesen Randspannungen gehörige Airysche Spannungsfunktion unseres Rechteckes«. Sie liefert durch (15) an allen Stellen die zugehörigen Spannungen. Auch die Verrückungskomponenten $u(x\,y)$, $v(x\,y)$ im Sinne der beiden Koordinatenachsen lassen sich leicht gewinnen, nämlich durch Integration der Gleichungen:

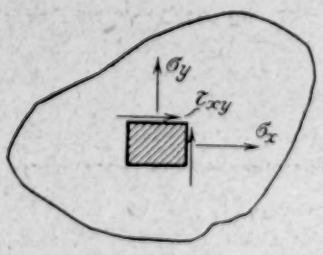


Abb. 9

$$\sigma_x = \frac{m\,E}{m^2-1}\left(m\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right),\quad \sigma_y = \frac{m\,E}{m^2-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + m\,\frac{\partial v}{\partial y}\right),\quad \tau_{xy} = \frac{m\,E}{2\,(m+1)}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad (16),$$

natürlich nur bis auf solche Zusatzglieder, die einer verzerrungsfreien Verrückung des ganzen Balkens entsprechen.

[1]) Love-Timpe a. a. O., S. 246.

Beiläufig wollen wir noch hinschreiben, wie sich die im einzelnen Balkenquerschnitt resultierenden Kräfte und Momente durch die Spannungen daselbst ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Normalkraft } N(x) = \delta\int_{-b}^{+b}\sigma_x\,dy, \quad \text{Schubkraft } Q(x) = -\delta\int_{-b}^{+b}\tau_{xy}\,dy \\ &\text{Biegungsmoment } \mathfrak{M}(x) = -\delta\int_{-b}^{+b}\sigma_x y\,dy \end{aligned}\right\}. \quad (17).$$

Angenommen nun, wir könnten für das Rechteck die beschriebene Randwertaufgabe ganz allgemein lösen, dann könnten wir natürlich insbesondere auch herausbekommen, welcher Zusammenhang bei unserm beliebig belasteten Balken:

$$p_0(x),\ \mathfrak{M}_r,\ \mathfrak{M}_l,\ Q_r,\ Q_l$$

zwischen der Belastung, dem Bettungsdruck $p(x)$ und der Durchbiegung $w_i(x)$ besteht. Wir hätten nur längs $y = b$ die Spannungskomponenten $\sigma_y = -p_0(x)/\delta$, $\tau_{xy} = 0$, längs $y = -b$: $\sigma_y = -p(x)/\delta$, $\tau_{xy} = 0$ vorzuschreiben und längs $x = \pm a$ irgend solche σ_x und τ_{xy} — hier bleibt eine gewisse Willkür —, daß gemäß (17) die vorgeschriebenen Biegungsmomente und Schubkräfte (nebst der Normalkraft Null) herauskommen. Man würde dann nach (16) die Verrückungen ermitteln, in denen die Durchbiegung unseres Balkens als

$$w_i(x) = -v(x,y)_{y=-b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

enthalten wäre. Und dieser Zusammenhang ist es dann gerade, der uns die Differentialgleichung (3) ersetzen soll.

Daß dieser Zusammenhang wegen der soeben erwähnten Willkür bei der Wahl der Randspannungen für $x = \pm a$ nicht eindeutig bestimmt ist, wird später noch eine gewisse Rolle spielen (**6**). Schon jetzt aber wird man vermuten, daß zufolge des bekannten St. Venantschen Prinzips[1]) diese Willkür die Ergebnisse nur in nächster Nähe dieser Ränder wird beeinflussen können, falls nur der Balken viel mehr lang als hoch und dick ist. Auch diese Vermutung wird in **8** bestätigt.

c) Wirkliche Durchführung. Leider ist nun die allgemeine Airysche Spannungsfunktion des Rechteckes nur in Form unendlicher Reihenentwicklungen bekannt, deren Koeffizienten durch die vorgeschriebenen Randspannungen erst in sehr indirekter Weise, nämlich als Wurzeln unendlicher linearer Gleichungssysteme, bestimmt sind[2]). Indessen zeigt sich, daß wir die allgemeine Spannungsfunktion nicht brauchen, wenn wir nur darauf verzichten, längs $x = \pm a$ die Randspannungen ganz beliebig vorschreiben zu können. Und in der Tat könnten wir ja hier zur Not sogar auf jede Willkür verzichten, sofern es nur gelingt, noch beliebige Randkräfte und -momente Q_r, Q_l, $\mathfrak{M}_r$, $\mathfrak{M}_l$, $N_r = 0$, $N_l = 0$ herauszubekommen. Eine so weitgehende Einschränkung ist aber schließlich doch wieder nicht erwünscht und auch nicht nötig; es bietet sich uns folgender Mittelweg: Wir benutzen als Spannungsfunktion die Ueberlagerung von vier, gleich zu schildernden biharmonischen Funktionen $F^{(1)}$ bis $F^{(4)}$:

$$F = F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)} + F^{(4)}.$$

Um das Schreibwerk abzukürzen, wollen wir uns auf den Fall beschränken, daß alle Randspannungen symmetrisch verteilt sind zum Mittelquerschnitt des Balkens ($x = 0$), dann kommen nur solche Spannungsfunktionen in Betracht, die in x gerade sind.

Wir beginnen mit $F^{(1)}$, das wir die »Hauptfunktion« nennen wollen im Gegensatz zu den drei übrigen, die »Zusatzfunktionen« heißen mögen.

Ersichtlich ist die Funktion:

$$F^{(1)}(x\,y) = \sum_{\omega}\left(A_\omega \mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a} + B_\omega \mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} + C_\omega \frac{\omega\pi y}{a}\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} + D_\omega \frac{\omega\pi y}{a}\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a}\right)\cos\frac{\omega\pi x}{a}$$

wo der Reihe nach

$$\omega = \omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots\ldots\ \omega_n$$

ist, — zunächst bei endlicher Anzahl der Summanden — eine in der ganzen Ebene biharmonische Funktion, wobei noch die $A\,B\,C\,D$, aber auch die ω ganz beliebige Konstante sein können.

---

[1]) Love-Timpe a. a. O., S. 155.

[2]) E. Mathieu, Théorie de l'élasticité des corps solides, Paris 1890, 2. partie, S. 140 ff. oder G. Lauricella in Acta mathematica, 32 1909, S. 201.

In ähnlicher Form erscheinen dann gemäß (15) und (16) auch die Spannungs- und Verrückungskomponenten, wobei nur außer den cos auch die sin vorkommen:

$$\sigma_x = \Sigma \frac{\omega^2 \pi^2}{a^2}\Big[(A_\omega + 2\,C_\omega)\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a} + (B_\omega + 2\,D_\omega)\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} + C_\omega\frac{\omega\pi y}{a}\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} + D_\omega\frac{\omega\pi y}{a}\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a}\Big]\cos\frac{\omega\pi x}{a}$$

$$\sigma_y = \Sigma \frac{\omega^2 \pi^2}{a^2}\Big[-A_\omega\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a} - B_\omega\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} - C_\omega\frac{\omega\pi y}{a}\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} - D_\omega\frac{\omega\pi y}{a}\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a}\Big]\cos\frac{\omega\pi x}{a}$$

$$\tau_{xy} = \Sigma \frac{\omega^2 \pi^2}{a^2}\Big[(B_\omega + D_\omega)\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a} + (A_\omega + C_\omega)\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} + D_\omega\frac{\omega\pi y}{a}\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} + C_n\frac{\omega\pi y}{a}\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a}\Big]\sin\frac{\omega\pi x}{a}$$

$$m\,E\,u = c' + c\,y + \Sigma\frac{\omega\pi}{a}\Big\{[(m+1)\,A_\omega + 2\,m\,C_\omega]\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a} + [(m+1)\,B_\omega + 2m\,D_\omega]\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} + (m+1)\,C_\omega\frac{\omega\pi y}{a}\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} + (m+1)\,D_\omega\frac{\omega\pi y}{a}\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a}\Big\}\sin\frac{\omega\pi x}{a}$$

$$m\,E\,v = c'' - c\,x + \Sigma\frac{\omega\pi}{a}\Big\{[-(m+1)\,B_\omega + (m-1)\,D_\omega]\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a} + [-(m+1)\,A_\omega + (m-1)\,C_\omega]\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} - (m+1)\,D_\omega\frac{\omega\pi y}{a}\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} - (m+1)\,C_\omega\frac{\omega\pi y}{a}\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a}\Big\}\cos\frac{\omega\pi x}{a}$$

mit c, c', c'' als beliebigen Konstanten.

Es seien nun folgende Randbedingungen vorgeschrieben:

für $y = +b$ sei $\tau_{xy} = 0$ und $\delta\,\sigma_y = -p_0(x) = -\Sigma P_{0\omega}'\cos\frac{\omega\pi x}{a}$

» $y = -b$ » $\tau_{xy} = 0$ » $\delta\,\sigma_y = -p\ (x) = -\Sigma P_\omega'\cos\frac{\omega\pi x}{a}$

mit $P_0\omega'$ und P_ω' als irgend welchen Konstanten. Durch diese vier Randbedingungen sind dann die Koeffizienten $A\,B\,C\,D$ ersichtlich eindeutig bestimmt als Wurzeln von linearen Gleichungsquadrupeln, damit aber auch die Verrückungen, ferner nach (18) die Durchbiegung des Balkens und nach (17) — mit $x = \pm a$ — auch die Randkräfte und -momente. Um nun möglichst einfache Formeln zu bekommen, wollen wir die Rechnung wirklich durchführen nur für den besonderen Fall, daß alle

$$P_0\omega' = 0$$

sind. (Es bedeutet das nicht etwa, wie es scheinen möchte, die Beschränkung auf den Fall, daß unser Balken überhaupt nur durch Randkräfte und -momente belastet ist, sondern — wegen der noch zu überlagernden Zusatzfunktionen — nur auf den Fall, daß die Belastung der oberen Begrenzung gleichmäßig ist.)

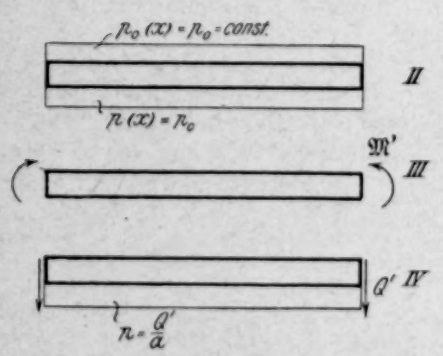


Abb. 10

Bei dieser Beschränkung bekommen wir ziemlich einfache Formeln. Indem wir die Zwischenrechnung übergehen, geben wir das Ergebnis in zusammenfassender Weise:

Wir bekommen ein in unserm Balken mögliches System von Belastung, Bettungsdruck und Durchbiegung, wenn wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} &p_0(x) = 0\,, \qquad p(x) = \Sigma P_\omega'\cos\frac{\omega\pi x}{a} \\ &\mathfrak{M}(\pm a) = -a^2\,\Sigma\frac{P_\omega'\cos\omega\pi}{\omega^2\pi^2}\,, \quad Q(\pm a) = \pm a\ \Sigma\frac{P_\omega'\sin\omega\pi}{\omega^2\pi^2}\,, \quad N(\pm a) = 0 \\ &w_i(x) = -\frac{a}{\delta E}\Sigma g_\omega\frac{P_\omega'}{\omega\pi}\cos\frac{\omega\pi x}{a} + K' \end{aligned}\right\}\ (\mathrm{I}),$$

wobei zur Abkürzung

$$\vartheta = \frac{b}{a} \text{ und } g_\omega = \frac{\mathfrak{Sin}\, 4\,\omega\,\pi\,\vartheta + 4\,\omega\,\pi\,\vartheta}{\mathfrak{Sin}^2\, 2\,\omega\,\pi\,\vartheta - 4\,\omega^2\,\pi^2\,\vartheta^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

gesetzt ist, K' eine beliebige Konstante ist und in w_i ein an sich mögliches lineares Zusatzglied $K_1' x$ gleich weggelassen ist, weil es nachher, wenn wir den Balken mit der Unterlage verbinden, wegen der Symmetrie der Belastung ohnehin verschwinden würde.

Die Zusatzfunktionen bekommen wir, wenn wir der Reihe nach ein Polynom in x und y vom zweiten und dritten Grade — diese sind von selbst biharmonisch — und ein biharmonisches Polynom fünften Grades ansetzen und die Koeffizienten darin so bestimmen, daß wir der Reihe nach die in der Abb. 10 angedeuteten Randspannungen, -kräfte und -momente bekommen. Jeweilig ergeben sich dann folgende zusammengehörige Systeme von Belastung, Bettungsdruck und Durchbiegung:

$$\left.\begin{array}{ll} p_0(x) = \text{konst.} = p_0 & p(x) = p_0 \\ \mathfrak{M}(\pm a) = 0, \quad Q(\pm a) = 0, \quad N(\pm a) = 0 & w_i(x) = -\dfrac{\vartheta}{E\delta}\, a\, p_0 + K'' \end{array}\right\} \quad \ldots \quad \text{(II)},$$

$$\left.\begin{array}{ll} p_0(x) = 0, \quad N(\pm a) = 0, & p(x) = 0 \\ \mathfrak{M}(\pm a) = \mathfrak{M}', \quad Q(\pm a) = 0, & w_i(x) = -\dfrac{\mathfrak{M}'}{E\,a\,\delta}\left(\dfrac{3}{4\,m\,\vartheta} + \dfrac{3}{4\,\vartheta^3}\dfrac{x^2}{a^2}\right) + K''' \end{array}\right\} \quad \ldots \quad \text{(III)},$$

$$\left.\begin{array}{ll} p_0(x) = 0, \quad N(\pm a) = 0, & \\ \mathfrak{M}(\pm a) = 0, \quad Q(\pm a) = \pm Q', & p(x) = \dfrac{Q'}{a} \\ w_i(x) = \dfrac{Q'}{E\,\delta}\left[\dfrac{\vartheta}{m}\left(\dfrac{3}{8\,\vartheta^2} - \dfrac{1}{40}\right) - \dfrac{13}{16}\,\vartheta + \dfrac{3}{\vartheta}\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{8\,\vartheta^2}\right)\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{1}{16\,\vartheta^3}\dfrac{x^4}{a^4}\right] + K^{(4)} & \end{array}\right\} \quad \ldots \quad \text{(IV)}.$$

Ueberlagern wir nunmehr alle vier Systeme, so bekommen wir endlich den gewünschten Ersatz für die Differentialgleichung (3) (allerdings unter Beschränkung auf die gleichmäßige Druckbelastung $p_0(x) = \text{konst.}$):

An unserm Balken ist folgendes System von Belastung, Bettungsdruck und Durchbiegung möglich:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Belastung:} \qquad p_0(x) = \text{konst.} = p_0\,, \qquad N(\pm a) = 0 \\ \mathfrak{M}(\pm a) = \mathfrak{M}' - a^2 \Sigma \dfrac{P_\omega' \cos \omega\,\pi}{\omega^2\,\pi^2}\,, \qquad Q(\pm a) = \pm\left[Q' + a \Sigma \dfrac{P_\omega' \sin \omega\,\pi}{\omega\,\pi}\right] \\ \text{Bettungsdruck:} \quad p(x) = p_0 + \dfrac{Q'}{a} + \Sigma P_\omega' \cos \dfrac{\omega\,\pi\,x}{a} \\ \text{Durchbiegung:} \quad w_i(x) = K - \dfrac{\vartheta}{E\,\delta}\, a\, p_0 - \dfrac{\mathfrak{M}'}{E\,a\,\delta}\left(\dfrac{3}{4\,m\,\vartheta} + \dfrac{3}{4\,\vartheta^3}\dfrac{x^2}{a^2}\right) \\ + \dfrac{Q'}{E\,\delta}\left[\dfrac{\vartheta}{m}\left(\dfrac{3}{8\,\vartheta^2} - \dfrac{1}{40}\right) - \dfrac{13}{16}\,\vartheta + \dfrac{3}{\vartheta}\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{8\,\vartheta^2}\right)\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{1}{16\,\vartheta^3}\dfrac{x^4}{a^4}\right] - \dfrac{a}{E\,\delta}\Sigma\, g_\omega \dfrac{P_\omega'}{\omega\,\pi} \cos \dfrac{\omega\,\pi\,x}{a} \end{array}\right\} \quad (20)$$

6. Der elastische Balken; Kombination des neuen Ansatzes (20) mit der Integralgleichung (8); die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Exponentialkerns. Ohne weiteres ist noch nicht erkennbar, wieso die Einführung des Systems (20) in die Integralgleichung (8) irgendwie übersichtliche Ergebnisse zutage fördern soll. Dazu ist noch nötig zu erkennen, daß die — in x geraden — Eigenfunktionen unseres Exponentialkerns (9) keine anderen sind als die Funktionen

$$\cos \frac{\omega\,\pi\,x}{a},$$

vorausgesetzt, daß unter ω irgend eine Wurzel der Gleichung

$$\omega\,\pi\,\mathrm{tg}\,\omega\,\pi = a\,k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

verstanden wird. Man kann dies einfach dadurch bestätigen, daß man in die, die Eigenfunktionen ψ und die Eigenwerte λ definierende Gleichung

$$\psi(x) = \lambda \int_{-a}^{+a} \psi(\xi)\, e^{-k|x-\xi|}\, d\xi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

versuchsweise $\psi = \cos\frac{\omega\pi x}{a}$ einsetzt[1]) und rechts die Integration ausführt. Dabei ergeben sich dann auch die Eigenwerte, nämlich:

$$\lambda_\omega = \frac{a^2k^2+\omega^2\pi^2}{2ka^2} = \frac{1}{a}\frac{\omega\pi}{\sin 2\omega\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Seien nun ω_0, ω_1, ω_2, ... die nach der Größe geordneten positiven Wurzeln der transzendenten Gleichung (21), von der kleinsten angefangen, so kann man versuchen, eine Funktion $f(x)$ im Intervalle von $x = -a$ bis $x = +a$ durch eine nach den entsprechenden Eigenfunktionen fortschreitende Reihe

$$f(x) = \sum_\omega A_\omega \cos\frac{\omega\pi x}{a}, \qquad \omega = \omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots\ldots$$

darzustellen. Wenn dann diese Darstellung überhaupt existiert, so bestimmen sich wegen der sog. Orthogonalitätseigenschaft der Eigenfunktionen

$$\int_{-a}^{+a} \psi_\omega(x)\,\psi_{\omega'}(x)\,dx = 0, \text{ wenn } \omega \leqq \omega'$$

die Koeffizienten A_ω analog wie bei einer Fourierschen Reihe, nämlich durch:

$$A_\omega = \frac{\omega\pi}{\omega\pi+\sin\omega\pi\cos\omega\pi}\frac{1}{a}\int_{-a}^{+a} f(x)\cos\frac{\omega\pi x}{a}\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Versuchen wir demgemäß die im folgenden wichtigen Darstellungen:

$$1 = \sum_\omega A_\omega^{(0)}\cos\frac{\omega\pi x}{a}, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 = \sum_\omega A_\omega^{(2)}\cos\frac{\omega\pi x}{a} \quad \left(\frac{x}{a}\right)^4 = \sum_\omega A_\omega^{(4)}\cos\frac{\omega\pi x}{a},$$

so finden wir nach (24):

$$A_\omega^{(0)} = \frac{2\sin\omega\pi}{\omega\pi+\sin\omega\pi\cos\omega\pi}, \quad A_\omega^{(2)} = A_\omega^{(0)}\left(1+\frac{2}{ak}-\frac{2}{\omega^2\pi^2}\right),$$

$$A_\omega^{(4)} = A_\omega^{(0)}\left[1+\frac{4}{ak}-\left(1+\frac{2}{ak}\right)\frac{12}{\omega^2\pi^2}+\frac{24}{\omega^4\pi^4}\right] \quad . \quad (25).$$

Nun ist aber leicht zu sehen, daß diese Reihen im ganzen Intervall $-a$, $+a$ gleichmäßig konvergieren, und daraus folgt nach einem Satze von Hilbert[2]), daß die Darstellungen (25) im ganzen Intervalle gelten.

---

[1]) Einen tieferen Einblick gewährt natürlich die Theorie der Integralgleichungen. Nach Früherem ist unser Exponentialkern $e^{-k|x-\xi|}$ die Greensche Funktion des Differentialausdrucks

$$L(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\frac{d^2u}{dx^2} - ku(x)\right)$$

für die Randbedingungen:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_a = -ku(a) \text{ und } \left(\frac{du}{dx}\right)_{-a} = ku(-a)$$

und daraus folgt nach Hilbert (a. a. O. S. 49, 50), daß die gesuchten Eigenfunktionen und Eigenwerte durch Auflösung der Differentialgleichung:

$$L(u) + \lambda u = 0, \text{ also } \frac{d^2u}{dx^2} + 2k\left(\lambda - \frac{k}{2}\right)u = 0$$

erhalten werden. Setzen wir abkürzend:

$$\omega = \frac{a}{\pi}\sqrt{2k\left(\lambda-\frac{k}{2}\right)},$$

so haben wir demnach:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{\omega\pi}{a}\right)^2 u = 0 \text{ und damit } u = C_1\cos\frac{\omega\pi x}{a} + C_2\sin\frac{\omega\pi x}{a}.$$

Mit Rücksicht auf obige Randbedingungen nun muß man

entweder $ak\cos\omega\pi = \omega\pi\sin\omega\pi$ und $C_2 = 0$

oder $ak\sin\omega\pi = -\omega\pi\cos\omega\pi$ und $C_1 = 0$ wählen.

Im ersten Fall bekommt man die geraden, im zweiten die ungeraden Eigenfunktionen. Die Eigenwerte bestimmen sich nachträglich aus der eingeführten Abkürzung.

[2]) Hilbert (a. a. O., S. 50, Satz 14).

Wir nehmen nun weiter an, daß auch $p(x)$ und $w_i(x)$ sich nach unsern Eigenfunktionen entwickeln lassen und setzen demgemäß

$$p(x) = \Sigma P_\omega \cos\frac{\omega\pi x}{a}, \quad w_i(x) = \Sigma W_\omega \cos\frac{\omega\pi x}{a}.$$

Aus unserer Integralgleichung (8) ergibt sich dann wegen (22) und (23) folgende Beziehung zwischen den Koeffizienten der beiden Entwicklungen:

$$W_\omega = \frac{c}{\lambda_\omega} P_\omega = a\,c\,\frac{\sin 2\omega\pi}{\omega\pi} P_\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Anderseits ist, wenn wir nunmehr das Schema (20) heranziehen und die dort vorkommenden Funktionen nach unseren Eigenfunktionen entwickeln:

$$P_\omega = P_\omega' + \left(p_0 + \frac{Q'}{a}\right) A_\omega^{(0)}$$

$$W_\omega = -\frac{a}{E\delta} g_\omega \frac{P_\omega'}{\omega\pi} + \left\{K - \frac{\vartheta}{a\delta} a p_0 - \frac{\mathfrak{M}'}{E a \delta}\frac{3}{4 m \vartheta} + \frac{Q'}{E\delta}\left[\frac{\vartheta}{m}\left(\frac{3}{8\vartheta^2} - \frac{1}{40}\right) - \frac{13}{16}\vartheta\right]\right\} A_\omega^{(0)}$$
$$+ \left\{\frac{3}{\vartheta}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8\vartheta^2}\right)\frac{Q'}{E\delta} - \frac{3}{4\vartheta^2}\frac{\mathfrak{M}'}{E a \delta}\right\} A_\omega^{(2)} - \frac{1}{16\vartheta^3}\frac{Q'}{E\delta} A_\omega^{(4)}$$

und daraus bekommen wir, wenn wir (26) berücksichtigen und die Abkürzungen μ_0, q_0 für gewisse Konstantenkomplexe einführen, folgende Gleichung:

$$P_\omega' = \frac{2\omega\pi \sin\omega\pi}{a\,(g_\omega + E\,c\,\delta \sin 2\omega\pi)(\omega\pi + \sin\omega\pi\cos\omega\pi)} \Bigg\{E\delta K - \mu_0 \mathfrak{M}' - q_0 Q' - \vartheta a p_0 +$$
$$+ \frac{\frac{3}{2\vartheta^2}\frac{\mathfrak{M}'}{a} - \left\{\frac{6}{\vartheta}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8\vartheta^2}\right) - \frac{3}{4\vartheta^3}\left(1 + \frac{2}{ak}\right) + E c \delta\,\omega\pi \sin 2\omega\pi + \frac{3}{2\vartheta^3}\frac{1}{\omega^2\pi^2}\right\} Q' - E c \delta\,\omega\pi \sin 2\overline{\omega}\pi\, a p_0}{\omega^2\pi^2}\Bigg\} \quad (27).$$

Diesen Ausdruck für P_ω' denken wir uns in die dritte und vierte Gleichung des Schemas (20) eingesetzt, die wir übrigens wegen (21) jetzt besser so schreiben:

$$Q = Q' + a\Sigma\frac{P_\omega' \sin\omega\pi}{\omega\pi}, \quad Q + k\mathfrak{M} = Q' + k\mathfrak{M}' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28),$$

dann bekommen wir zwei lineare Gleichungen zwischen den vorgeschriebenen Randkräften und -momenten Q, $\mathfrak{M}$ und den drei noch zu bestimmenden Konstanten K, $\mathfrak{M}'$, Q'. Wir stoßen hier also auf eine ganz ähnliche Unbestimmtheit der Lösung unseres Problems, wie sie bereits weiter oben auftrat und charakterisiert wurde (**5**). Nach welchen Gesichtspunkten sollen wir nun unter diesen unendlich vielen möglichen Lösungen auswählen (die sich ja übrigens wegen des St. Venantschen Prinzips, woran erinnert sei, nur in der Nähe der Ränder erheblich von einander unterscheiden werden)? Betrachten wir obigen Ausdruck für P_ω' daraufhin, welche Größenordnung er mit wachsendem ω in bezug auf ω hat! Aus der Gleichung (21) kann man leicht entnehmen, daß $\sin\omega\pi$ von der Größenordnung $\frac{1}{\omega}$ wird, aus (19) entnimmt man ferner, daß für wachsendes ω sich g_ω sehr schnell dem konstanten Werte 2 nähert, so daß obiger Ausdruck für P_ω' im allgemeinen, d. h. wenn nicht gerade

$$E\delta K - \mu_0 \mathfrak{M}' - q_0 Q' - \vartheta a p_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

gemacht wird, ebenfalls von der Größenordnung $\frac{1}{\omega}$ wird. Die Formel für den Bettungsdruck, Schema (20), enthält dann eine unendliche Reihe, welche zwar für alle $|x| < a$ konvergiert, aber für $|x| = a$ gerade schon divergiert, und zwar wie die Summe der reziproken ganzen Zahlen[1]). Es wird dann in den Ecken $x = \pm a$, $y = -b$ der Bettungsdruck unendlich groß (und beiläufig auch das σ_x, wie man leicht nachrechnet). Das hat nun zwar insofern nichts zu bedeuten, als dieses Unendlichwerden — wie wir noch deutlicher sehen werden — keinesfalls als das Auftreten konzentrierter Drucke gedeutet werden kann, aber man möchte doch, wenn möglich, gern Lösungen haben, die überhaupt ganz frei von Singularitäten sind. Zu diesem Zwecke ist nun offenbar nur nötig, zu den oben bereits erwähnten zwei Gleichungen für die drei Größen K, $\mathfrak{M}'$, Q' als dritte die Gleichung (29) hinzuzunehmen. Wenn sich dann diese Gleichungen auflösen lassen, so wird P_ω' für wachsendes ω von der Größenordnung $\frac{1}{\omega^3}$, der Bettungs-

[1]) Einen einfachen Beweis hierfür verdanke ich Herrn G. Kowalewski.

druck bleibt überall endlich und desgleichen die Randspannungen. Um noch zu erkennen, daß die drei Gleichungen wirklich eine — eindeutig bestimmte — Lösung haben, bemerken wir, daß K in (27) nur an einer Stelle vorkommt und sich also nach (29) sicher eindeutig bestimmen läßt, falls dies für $\mathfrak{M}'$ und Q' nachgewiesen ist. Kürzen wir den Ausdruck (27) unter Berücksichtigung der Gleichung (29) durch:

$$P_\omega' = \frac{\frac{\mathfrak{M}'}{a}\alpha_\omega - Q'\beta_\omega - a p_0 \gamma_\omega}{a\,\omega^3\,\pi^3}$$

ab, setzen ferner:

$$s_1 = \Sigma \frac{\alpha_\omega \sin \omega\,\pi}{\omega^4\,\pi^4}, \quad s_2 = \Sigma \frac{\beta_\omega \sin \omega\,\pi}{\omega^4\,\pi^4}, \quad s_3 = \Sigma \frac{\gamma_\omega \sin \omega\,\pi}{\omega^4\,\pi^4} \quad . \quad . \quad . \quad (30),$$

so finden wir:

$$\Delta\, Q' = -\,s_1 \frac{\mathfrak{M}}{a} + \left(1 - \frac{s_1}{a\,k}\right) Q + s_3\, a\, p_0, \quad \Delta\, k\, \mathfrak{M}' = (1 - s_2)\, k\, \mathfrak{M} - s_2\, Q - s_3\, a\, p_0 \quad (31),$$

wobei

$$\Delta = 1 - \frac{s_1}{a\,k} - s_2 = a\,k\,\Sigma \frac{\left(g_\omega - \frac{3}{2\,\vartheta^3\,\omega^3\,\pi^3} - \frac{6}{5\,\vartheta\,\omega\,\pi}\right) \sin 2\,\omega\,\pi}{\omega^2\,\pi^2\,(g_\omega + E\,c\,\delta \sin 2\,\omega\,\pi)\,(\omega\,\pi + \sin \omega\,\pi \cos \omega\,\pi)}$$

ist. Dieser Ausdruck Δ aber kann nicht Null werden, weil unter dem Summenzeichen nur positive Ausdrücke stehen. Dies ist, wegen der Gleichungen (21) und (19), für alle ohne weiteres klar, mit Ausnahme des ersten Klammerinhaltes. Dieser aber ist positiv, weil die Funktion

$$\varphi(z) = \frac{\mathfrak{Sin}\,2z + 2z}{\mathfrak{Sin}^2 z - z^2} - \frac{12}{z^3} - \frac{12}{5z}$$

für alle positiven Werte von z positiv ist. Man kann dies durch einfache Ausrechnung feststellen, wobei es zweckmäßig ist, für die kleineren z die Reihenentwicklung:

$$\varphi(z) = \frac{64}{175} z + \frac{4}{1575} z^3 \pm \ldots$$

zu benutzen. Es ist also stets $\Delta > 0$ und die Gleichungen (31) haben immer eine eindeutig bestimmte, endliche Lösung.

Es ist uns somit gelungen, bei der gleichmäßigen Belastung $p_0(x) = \text{konst.}$ und beliebig vorgeschriebenen Randkräften und Momenten Q und $\mathfrak{M}$ eine völlig singularitätenfreie Lösung unseres Problems zu finden (bei der überdies noch die die Q und $\mathfrak{M}$ aufbauenden Randspannungen überall endlich sind) und damit ist wohl einwandfrei dargetan, daß das früher bei Beibehaltung der Differentialgleichung (3) notwendige Hinzufügen konzentrierter Drucke an den Balkenenden lediglich einen Notbehelf bedeutet, welcher der nur bedingten Brauchbarkeit dieser Gleichung entspricht.

Wir wollen uns aus der unendlichen Schar möglicher Lösungen jetzt noch eine zweite, nach einem ganz andern Gesichtspunkte, aussuchen. Das schon erwähnte schwache Unendlichwerden des Bettungsdruckes an den Balkenenden soll uns jetzt nicht stören; die uns verbleibende Willkür bei der Bestimmung der drei Konstanten K, $\mathfrak{M}'$, Q' wollen wir benutzen, um möglichst schnell möglichst einfache Formeln zu bekommen. Ein Blick auf die Schemata (II, III, IV) zeigt, daß alles viel kürzer wird, wenn wir auf die Zusatzfunktion IV ganz verzichten und demnach

$$Q' = 0$$

wählen. Beschränken wir uns überdies auf den Fall, daß die Randkräfte und Momente verschwinden, so folgt aus (28), daß auch $\mathfrak{M}'$ verschwindet; es wird alles so einfach wie nach Lage der Dinge überhaupt möglich. Wir bekommen:

$$P_\omega' = \frac{2\,\omega\,\pi \sin \omega\,\pi}{a\,(g_\omega + E\,c\,\delta \sin 2\,\omega\,\pi)\,(\omega\,\pi + \sin \omega\,\pi \cos \omega\,\pi)} \left(E\,\delta\,K - \vartheta\,a\,p_0 - E\,c\,\delta\,a\,p_0 \frac{\sin 2\,\omega\,\pi}{\omega\,\pi}\right),$$

wo sich K durch die Gleichung:

$$E\,\delta\,K = \left(E\,c\,\delta \frac{s_5}{s_4} + \vartheta\right) a\,p_0$$

bestimmt, wenn zur Abkürzung

$$s_4 = \Sigma \frac{\sin^2 \omega\pi}{(g_\omega + Ec\delta \sin 2\omega\pi)(\omega\pi + \sin\omega\pi \cos\omega\pi)}$$

$$\text{und } s_5 = \Sigma \frac{\sin^2 \omega\pi \sin 2\omega\pi}{\omega\pi (g_\omega + Ec\delta \sin 2\omega\pi)(\omega\pi + \sin\omega\pi \cos\omega\pi)}$$

gesetzt wird. Somit haben wir:

Wird der Balken oben gleichmäßig mit p_0 belastet, während an den Balkenenden weder Biegungsmomente noch Schubkräfte wirken, so stellen die Formeln

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= p_0 \left\{ 1 + 2Ec\delta \Sigma \frac{\left(\frac{s_5}{s_4} - \frac{\sin 2\omega\pi}{\omega\pi}\right)\omega\pi \sin\omega\pi}{(g_\omega + Ec\delta \sin 2\omega\pi)(\omega\pi + \sin\omega\pi \cos\omega\pi)} \cos\frac{\omega\pi x}{a} \right\} \\ w_i(x) &= 2acp_0 \Sigma \frac{\left(\frac{s_5}{s_4} Ec\delta + \frac{g_\omega}{\omega\pi}\right)\sin\omega\pi \sin 2\omega\pi}{(g_\omega + Ec\delta \sin 2\omega\pi)(\omega\pi + \sin\omega\pi \cos\omega\pi)} \cos\frac{\omega\pi x}{a} \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

ebenfalls eine Lösung unseres Problems dar.

Um endlich noch zu erkennen, daß das obige Unendlichwerden von $p(x)$ an den Balkenenden keine konzentrierten Drucke bedeutet, genügt es zu zeigen, daß eine Funktion $p(x)$, die an den Balkenenden in konzentrierte Drucke ausartet, überhaupt nicht nach unsern Eigenfunktionen entwickelt werden kann. Treffen wir etwa folgende Festsetzungen. Es sei:

$$p(x) = \frac{D}{\varepsilon a} \text{ für } -a \leqq x \leqq -a(1-\varepsilon), \quad p(x) = \frac{D}{\varepsilon a} \text{ für } a(1-\varepsilon) \leqq x \leqq a$$

$$\text{und } p(x) = 0 \text{ für } -a(1-\varepsilon) < x < a(1-\varepsilon),$$

so bedeutet das, wenn wir ε gegen Null gehen lassen, das Auftreten der beiden konzentrierten Drucke D an den beiden Balkenenden. Die Koeffizienten der gesuchten Reihenentwicklung werden dann nach (24)

$$A_\omega = \frac{4D}{a} \frac{\omega\pi}{\omega\pi + \sin\omega\pi \cos\omega\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin {}^1\!/_2 \omega\pi\varepsilon}{\omega\pi\varepsilon} \cos\omega\pi\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

liefern also in der Grenze $\varepsilon = 0$ überhaupt keine konvergente Reihe. (Statt dessen hätte man natürlich auch zeigen können, daß die Funktion

$$f(x) = \int_0^x p(z)\, dz,$$

wo p aus (32) zu entnehmen ist, eine im ganzen Intervall $|x| \leqq a$ stetige Funktion ist und dies wiederum würde — im wesentlichen — damit gleichbedeutend sein, daß die Reihe

$$\Sigma \frac{\sin \frac{\omega\pi x}{a}}{\omega^2}$$

im ganzen Intervall gleichmäßig konvergiert).

7. Uebergang vom elastischen zum starren Balken. Wäre die Darstellung eines konzentrierten Druckes durch unsere Eigenfunktionen möglich, so müßten wir erwarten, daß, wenn wir in unseren Lösungen (31) und (32) vom elastischen zum starren Balken übergehen, die bis dahin nicht vorhandenen konzentrierten Drucke an den Balkenenden irgendwie plötzlich auftauchen. So aber kann eine Bestätigung des früher auf anderem Wege gefundenen Ergebnisses, daß diese konzentrierten Drucke beim starren Balken wirklich da sind, durch unsere Formeln (31) und (32) nur im negativen Sinne erwartet werden; wir haben zu zeigen, daß diese Formeln, auf den starren Balken angewandt, irgendwie versagen.

Dies ist am leichtesten bei unserer zweiten Lösung (32) zu sehen; wir brauchen nur die Formel für den Bettungsdruck ins Auge zu fassen. Solange E noch endlich ist (elastischer Balken), verschwindet im Nenner für genügend großes ω das Glied $Ec\delta \sin 2\omega\pi$ neben g_ω, die Reihenkoeffizienten konvergieren also, wie $\frac{1}{\omega}$, gegen Null. Wächst aber E über alle Grenzen (starrer Balken), so konvergiert die Reihe überhaupt nicht, sie wird sinnlos.

Wesentlich anders liegen die Dinge bei unserer ersten Lösung (31). Hier müssen wir noch beachten, daß ein bloßer Uebergang zu $E = \infty$ noch keinen Uebergang zum

starren Balken bedeutet, sofern nicht noch ausdrücklich verlangt wird, daß dabei alle am Balken wirkenden Kräfte endlich bleiben. Nun zeigen die Formeln (30), daß mit wachsendem E die an den Rändern hinzuzufügenden Kräfte Qund Momente $\mathfrak{M}'$ — da Δ von der Größenordnung $\frac{1}{E}$ wird, während die Summen s_2 und s_3 endlich bleiben — von der Größenordnung E werden. Wir können also von unserer ersten Lösung (31) aus im allgemeinen überhaupt nicht zum starren Balken gelangen. Es gibt aber eine Ausnahme, wenn nämlich $p_0 = 0$, $Q = 0$, aber $\mathfrak{M} \leqq 0$ vorgeschrieben, der Balken also lediglich durch zwei gleiche Biegungsmomente an seinen Enden belastet wird. Natürlich sagt uns die unmittelbare Anschauung, daß, wenn jetzt der Balken starr ist, Bettungsdruck und Einsenkung Null werden müssen. Um aber zu sehen, daß dies bei unsern Formeln ebenfalls herauskommt, wenn E unendlich wird, ist noch folgende kleine Ueberlegung nötig: Geht E gegen ∞, so wird nach (31), (30) und (27):

$$\Delta = \frac{1}{\varrho E}, \quad s_1 = \frac{\sigma_1}{E}, \quad 1 - s_2 = \frac{\sigma_2}{E},$$

wo $\varrho, \sigma_1, \sigma_2$ endliche Größen sind. Die Formeln (31) liefern also:

$$\mathfrak{M}' = \varrho \sigma_2 \mathfrak{M}, \quad Q' = -\varrho \sigma_1 \frac{\mathfrak{M}}{a}.$$

Aus (27) folgt dann:

$$P'_\omega = \frac{\varrho \sigma_1 \mathfrak{M}}{a^2} \frac{2 \sin \omega \pi}{\omega \pi + \sin \omega \pi \cos \omega \pi}$$

und damit aus (25) und (20):

$$p(x) = -\varrho \sigma_1 \frac{\mathfrak{M}}{a^2} + \varrho \sigma_1 \frac{\mathfrak{M}}{a^2} = 0.$$

Andererseits liefert die Gl. (29):

$$K = 0$$

und somit nach (20) auch:

$$w_i(x) = 0.$$

Durch diese Betrachtungen scheinen alle Fragen, die sich beim Uebergang zum starren Balken ergeben, hinreichend beantwortet.

8. Zahlenbeispiel. Der Balken habe die Abmessungen: Länge $2a = 256$ cm, Höhe $h = 16$ cm, Dicke $\delta = 25$ cm, der Elastizitätsmodul sei $E = 100\,000$ kg/cm², die Konstante $c = \frac{1}{100\,000}$ cm/kg, $k = \frac{4}{a}$.

Die Balkenenden seien frei von Biegungsmomenten und Schubkräften:

$$Q = 0, \quad \mathfrak{M} = 0.$$

Einige Daten über die Wurzeln der Gl. (21) im Falle $ak = 4$ können der folgenden Zahlentafel entnommen werden.

	$n = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
log brigg ω_n	0,10195	0,59496	0,83340	0,99175	1,10950	1 20286	1,28004	1,34567	1,40294	1,45353
$(\omega_n - n)\pi$	72°27'20"	45°28'5"	30°24'50"	22°10'45"	17°16'5"	14°4'30'	11°51'15"	10°13'45"	8°59'15"	8°0'50"

Ich habe für dieses Beispiel beide Lösungen (31) und (32) berechnet und diese, obwohl ja auf ganz verschiedenen Wegen gefunden, unterscheiden sich nun hinsichtlich der Einsenkung fast gar nicht und hinsichtlich des Bettungsdruckes auch nur in nächster Nähe der Balkenenden ein wenig (während an den Enden selbst das eine Mal p endlich bleibt und das andere Mal unendlich wird). Diese Uebereinstimmung mag einerseits als Probe für die Richtigkeit der Zahlenrechnungen dienen, andererseits zeigt sie die große Zuverlässigkeit des St. Venantschen Prinzips in unserem Falle.

Was nun zunächst die Einsenkung angeht, so unterscheidet sie sich so wenig von derjenigen, die bei konstantem Bettungsdruck vorhanden wäre, daß es geradezu zweckmäßig erscheint, diesen Bestandteil von ihr abzuspalten und den Rest besonders zu betrachten. Setzen wir demnach:

$$w_i = w_{i1} + w_{i2}$$

mit

$$w_{i1} = \frac{c p_0}{k}\left(2 - e^{-k(a+x)} - e^{-k(a+x)}\right),$$

so geben die folgende Zahlentafel und die Abb. 11 eine Vorstellung vom Verlauf und der gegenseitigen Größenordnung dieser Bestandteile:

	$\frac{x}{a}=0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$w_{i1}'(x)$	0,491	0.490	0,488	0,483	0,476	0,466	0,449	0,424	0,388	0,332	0,250
$w_{i2}'(x)$	0,004	0,004	0,003	0,002	0,000	− 0,003	− 0,008	− 0,011	− 0,014	− 0,008	0,010

$$\left(w_{i1}' = \frac{k}{c p_0}\, w_i\right).$$

Aus dieser Abbildung läßt sich auch der Verlauf des Bettungsdruckes qualitativ recht gut ablesen, denn die Operation

$$\frac{1}{2c}\left(k\, w_i(x) - \frac{1}{k}\,\frac{d^2 w_i}{dx^2}\right)$$

— vergl. die Gl. (13) — liefert, angewandt auf w_{i1} den konstanten Teil des Bettungsdruckes (der natürlich gleich p_0, dem konstanten Belastungsdruck, ist) und somit, auf w_{i2} angewandt, die Abweichung des $p(x)$ von p_0. Insbesondere deutet schon die scharfe Krümmung der w'_2-Kurve am Balkenende darauf hin, daß dort $\left|\frac{d^2 w_i}{dx^2}\right|$ und damit p sehr groß wird (bei der Lösung (32) am Ende selbst natürlich unendlich groß). Abb. 12 gibt eine genauere Vorstellung vom Verhalten des Bettungsdruckes. Obwohl also die Einsenkung fast gerade so ausfällt wie beim absolut biegsamen Balken mit seinem konstantem Bettungsdruck, weicht doch der Bettungsdruck selbst erheblich von einer Konstanten ab, nur in den mittleren Teilen des Balkens, etwa bis $x \pm 0{,}6a$, ist sehr nahezu $p = p_0$.

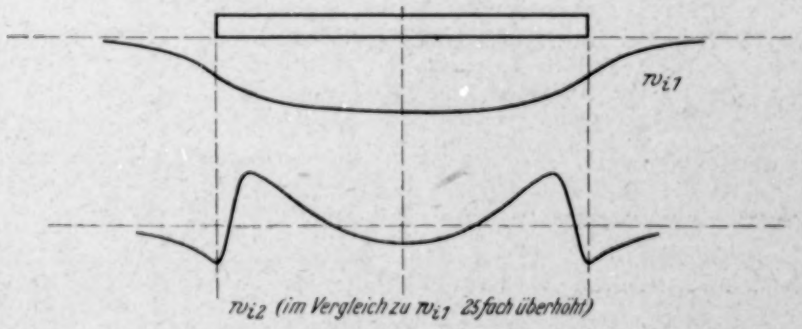


Abb. 11

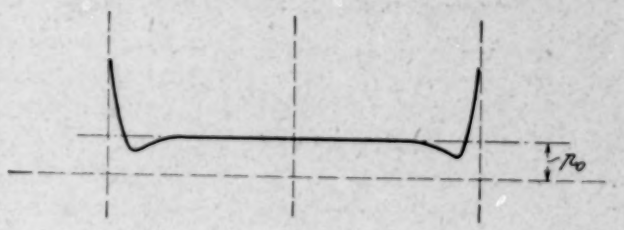


Abb. 12

Die letzte Abb. 13 endlich wurde dadurch gewonnen, daß unser Zahlenbeispiel nach der früher (4) angedeuteten, aber nicht näher geschilderten Möglichkeit, die Differentialgleichung (3) neben der Integralgleichung (8) beizubehalten, durchgerechnet wurde. Man sieht, daß diese gröbere Methode wenigstens in den mittleren Balkenteilen ganz brauchbare Ergebnisse liefert.

Zu den Rechnungen im einzelnen sei nur erwähnt, daß der Ausdruck Δ in (29) bei den angenommenen Zahlenverhältnissen sehr klein wird, so daß seine Berechnung einige Vorsicht erfordert.

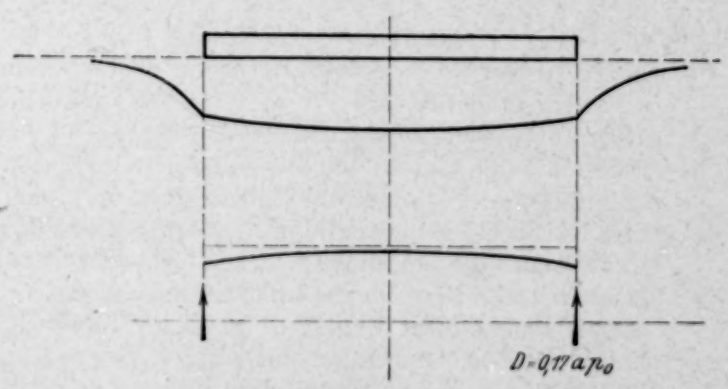


Abb. 13

9. Zusammenfassung. Wir haben im vorigen durch Modifikation der Zimmermannschen Theorie (A) zwei neue gewonnen, eine teilweise (B) und eine vollständig modifizierte (C). Die Grundlagen und allgemeinen Er-

gebnisse der drei Theorien sollen noch zum Schluß kurz und übersichtlich zusammengefaßt werden.

Grundlagen.

A 1. Die Einsenkung an irgend einer Stelle hängt nur vom Bettungsdruck an eben dieser Stelle ab, und zwar wird Proportionalität zwischen beiden angenommen.
2. Für das Verhalten des Balkens ist die Differentialgleichung der elastischen Linie maßgebend.

B 1. Die Einsenkung an irgend einer Stelle hängt von der gesamten Bettungsdruckverteilung ab; die Proportionalität wird wegen der Kleinheit der Einsenkungen beibehalten. Damit geraten wir in die Theorie der linearen Integralgleichungen hinein.
2. Wie unter A 2.

C 1. Wie unter B 1.
2. Die Differentialgleichung der elastischen Linie wird durch einen Zusammenhang ersetzt, der sich aus der Theorie der Airyschen Spannungsfunktion ergibt.

Allgemeine Ergebnisse.

I. Einsenkung.

A. Die Einsenkungskurve ist an den Balkenenden unstetig; die Unterlage reißt dort entzwei.

B. Die Unterlage zerreißt nicht; die Einsenkungskurve ist überall stetig, aber an den Balkenenden weist sie Knicke auf.

C. Wie unter B, aber mit dem Unterschied, daß die Knicke nur im Grenzfall des starren Balkens auftreten. Beim elastischen Balken kann es höchstens vorkommen, daß die Einsenkungskurve an den Balkenenden Wendepunkte mit vertikaler Tangente hat.

II. Bettungsdruck.

A. Diese Theorie läßt nicht erkennen, daß der Bettungsdruck die Tendenz hat, an den Balkenenden stark anzuschwellen.

B. Diese Theorie gibt die erwähnte Tendenz qualitativ richtig wieder, quantitativ übertreibt sie, insofern bei ihr nicht nur für den starren, sondern auch für den elastischen Balken der Bettungsdruck an den Balkenenden geradezu in konzentrierte Drucke ausartet.

C. Die Ausartung in konzentrierte Drucke kommt nur beim starren Balken heraus. Im Fall des elastischen Balkens kann man sogar immer, also insbesondere bei beliebig vorgeschriebenen Randkräften und -momenten, die an den Kopfenden des Balkens wirkenden Randspannungen so verteilen, daß der Bettungsdruck auch an den Balkenenden endlich bleibt. Tut man dies nicht, so kann höchstens ein schwaches Unendlichwerden von $p(\pm a)$ vorkommen (das aber nicht als Ausartung in konzentrierte Drucke zu deuten ist).

Hier bleibt aber sogar die Vermutung frei, daß selbst dieses schwache Unendlichwerden nicht eigentlich sachlich begründet ist, daß es vielmehr im vorigen nur deshalb vorgekommen ist, weil wir über die erwähnten Randspannungen zwar mit einiger Freiheit, aber doch nicht ganz frei verfügen konnten; jedenfalls ist immer dann, wenn in unseren Formeln $p(\pm a)$ unendlich wird, auch die Randspannung σ_x an den Stellen $x = \pm a$, $y = -b$ unendlich; es könnte also sein, daß $p(\pm a)$ nur deshalb unendlich wird, weil dieses σ_x als unendlich »vorgeschrieben« wurde. Freilich ist es nicht leicht, eine wirkliche Entscheidung über unsere Vermutung herbeizuführen. Man müßte dazu die allgemeinste Airysche Spannungsfunktion des Rechteckes heranziehen. Man könnte dann die erwähnten Randspannungen als ganz beliebige endliche Größen vorschreiben. Sollte dann immer $p(\pm a)$ endlich bleiben, so wäre unsere Vermutung als zutreffend erwiesen. Aber die Durchführung dieses Programms begegnet großen Schwierigkeiten, die in dem früher erwähnten komplizierten Charakter der obigen Spannungsfunktion begründet sind und die ich bisher nicht habe überwinden können.

Dresden, den 29. Januar 1922. 156

Über die Spannungserhöhung durch kreisrunde Löcher in einem gezogenen Bleche.

Von **C. WEBER** in Hildesheim.

In Bd. 1 dieser Zeitschrift, S. 174 bis 180, veröffentlicht Hr. Th. Pöschl-Prag einen Aufsatz, in dem die Spannungen im allseits gleichmäßig gezogenen, mit zwei gleich großen Löchern versehenen Bleche untersucht werden. Er verwendet hierbei als Koordinatensystem das Doppelsystem zweier Kreisbüschel, das zu zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten gehört. Die Gleichungen sind daher für den mit diesem Hilfsmittel der Rechnung nicht Vertrauten unübersichtlich, auch sind wohl aus diesem Grunde in der Zahlentafel einige Fehler unterlaufen. In vorliegender Arbeit will ich die Lösung im rechtwinkligen Koordinatensystem darstellen und untersuchen.

Das Blech stellt eine dreifach zusammenhängende unendliche Scheibe dar; außer dem inneren Zusammenhange, der durch die Airysche Spannungsfunktion gewährleistet wird, muß sich die Scheibe um jedes Loch herum wieder schließen. Dieses ist in der Arbeit nicht berücksichtigt, was im weiteren ebenfalls nachgewiesen wird. Die angegebene Lösung stellt demnach nur eine Scheinlösung dar.

Ich setze den Abstand der Mittelpunkte der Kreise gleich $2a$, den Halbmesser gleich $r_0 < a$, die Entfernung der reellen Grundpunkte gleich $2c = 2\sqrt{a^2 - r_0^2}$. Der Teil der Fläche zwischen den Kreisen werde als Steg bezeichnet; die schmalste Stelle desselben ist gleich $2b_0 = 2(a - r_0)$. Das Koordinatensystem ist nach Abb. 1 gelegt. Die Scheibe sei allseitig gleichmäßig gespannt, wobei die Spannung im Unendlichen gleich p ist.

Die von Hrn. Pöschl gefundene Airysche Spannungsfunktion schreibt sich dann im rechtwinkligen Koordinatensystem:

$$F = \frac{p}{2}\left\{x^2 + y^2 + \frac{r_0^2}{c}\, y\,[\ln[x^2 + (y+c)^2] - \ln[x^2 + (y-c)^2]]\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Sie ist symmetrisch zur X- und Y-Achse. Für die Punkte des oberen Kreises $x^2 + (y-a)^2 = r_0^2$ wird

$$F = \frac{p}{2}\left[y\left(2a + \frac{r_0^2}{c}\ln\frac{a+c}{a-c}\right) - c^2\right] . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Die Punkte der Funktion F liegen demnach auf einer von der X-Achse abfallenden Ebene, welche die Neigung $\frac{p}{2}\left(2a + \frac{r_0^2}{c}\ln\frac{a+c}{a-c}\right)$ zur XY-Ebene hat.

Die Ableitung $\frac{\partial F}{\partial y}$ wird:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{p}{2}\left\{2y + \frac{r_0^2}{c}[\ln[x^2 + (y+c)^2] - \ln[x^2 + (y-c)^2] + \frac{r_0^2}{c}\, y\left[\frac{2(y+c)}{x^2 + (y+c)^2} - \frac{2(y-c)}{x^2 + (y-c)^2}\right]\right\}.$$

Für die Punkte des oberen Kreises ist

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{p}{2}\left[2a + \frac{r_0^2}{c}\ln\frac{a+c}{a-c}\right] . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit Gl. (2) zeigt, daß in diesen Punkten die Fläche der Airyschen Spannungsfunktion tangential in die geneigte Ebene übergeht. Am Umfange des Kreises treten darum keine äußeren Kräfte auf. Man erhält einen unbelasteten Lochrand. Dasselbe gilt auch für den symmetrisch liegenden unteren Kreis.

Aus Gl. (1) lassen sich nun mit Leichtigkeit die Spannungen als zweite partielle Ableitungen der Funktion F finden. Besondere Aufmerksamkeit wird man der Spannung σ_x für die Punkte der Y-Achse schenken. Man erhält

$$F_{x=0} = \frac{p}{2}\left\{y^2 + 2\,\frac{r_0^2}{c}\, y\,[\ln(y+c) - \ln(y-c)]\right\},$$

$$(\sigma_x)_{x=0} = \frac{\partial^2 F_{x=0}}{\partial y^2} = p\left[1 + \frac{4 r_0^2 c^2}{(c^2 - y^2)^2}\right] . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

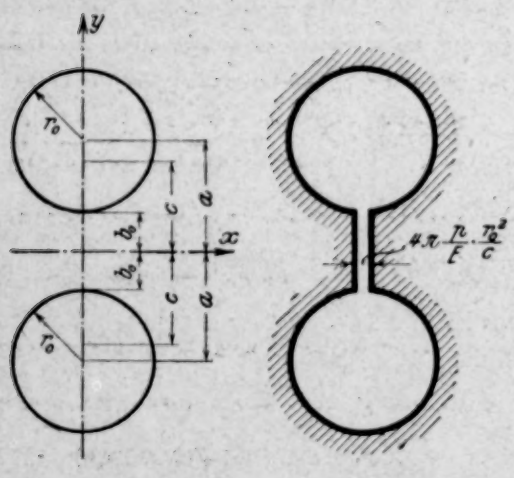
Die Spannung ist stets größer als p und wächst von $\sigma_x = p$ für $y = \infty$ bis $\sigma_x = \infty$ für $y = c$, nimmt dann wieder ab bis zur X-Achse. Für negative Werte von y erhält man das Spiegelbild hiervon. Herrn Prof. Th. Pöschl müssen bei der Berech-

nung der Zahlentafel kleine Irrtümer unterlaufen sein, da er für die Y-Achse auch Werte $\sigma_x < p$ erhält. Auch seine Abb. 3 ist nicht ganz richtig, da die σ_x-Linien für verschiedene Kreishalbmesser sich nicht überschneiden.

Die größten Spannungen im Bleche treten für $y = \pm (a-r)$ und $y = \pm (a+r)$ auf und sind:

$$\text{Für } x = 0;\ y = a - r \ldots\ \sigma_x = 2\,\frac{a}{a-r}\,p = 2\,\frac{a}{b_0}\,p \quad \ldots\ (5).$$

$$\text{Für } x = 0;\ y = a + r \ldots\ \sigma_x = 2\,\frac{a}{a+r}\,p \quad \ldots\ (6).$$



Gleichung (5) gibt die absolut größte Spannung im Bleche. Sie läßt sich auf folgende Weise leicht merken: Zwischen den Mittelpunkten der Kreise tritt in X-Richtung im heilen Bleche die Kraft $2ap$ auf. Soll sie durch den Steg übertragen werden (in Wirklichkeit ist die übertragene Kraft im Stege eine etwas andere), so erhält man in der schmalsten Stelle des Steges die Spannung $\sigma_x = \frac{a}{b_0}\,p$. Die berechnete Spannung nach Gl. (5) ist doppelt so groß.

Ich will nun die durch diesen Spannungszustand entstehende Formänderung der Scheibe untersuchen. Ich zerlege hierzu die gefundene Airysche Spannungsfunktion wie folgt:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5;$$

$$F_1 = \frac{p}{2}\,(x^2 + y^2), \quad F_2 = -\frac{p}{2}\,r_0^2 \ln\left[x^2 + (y+c)^2\right], \quad F_3 = -\frac{p}{2}\,r_0^2 \ln\left[x^2 + (y-c)^2\right],$$

$$F_4 = \frac{p_0}{2}\,\frac{r_0^2}{c}\,(y+c) \ln\left[x^2 + (y+c)^2\right], \quad F_5 = \frac{p_0}{2}\,\frac{r_0^2}{c}\,(y-c) \ln\left[x^2 + (y-c)^2\right].$$

Die gefundene Lösung Gl. (1) entsteht durch Ueberlagerung der Spannungsfunktionen F_1 bis F_5. Hiervon stellt F_1 eine gleichmäßige allseitige Spannung, F_2 und F_3 einen vom Punkte $x = 0$, $y = -c$, bezw. vom Punkte $x = 0$, $y = c$ ausgehenden allseitigen Druck dar. Der Zusammenhang der Scheibe bleibt hierbei gewahrt.

Die Formänderung durch F_4 werde besonders untersucht. Verschiebt man das Koordinatensystem, so daß $y_1 = y + c$ wird, so ist

$$F_4 = \frac{p}{2}\,\frac{r_0^2}{c}\,y_1 \ln\,(x^2 + y_1^2).$$

Die Verschiebungen ξ in X-Richtung berechnen sich wie folgt:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{1}{m}\,\sigma_y\right), \qquad \xi = \frac{1}{E}\int_{x=0}^{x}\left(\sigma_x - \frac{1}{m}\,\sigma_y\right) dx.$$

Hierin ist

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F_4}{\partial y_1^2} = p\,\frac{r_0^2}{c}\,\frac{3\,x^2 y_1 + y_1^3}{(x^2 + y_1^2)^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F_4}{\partial x^2} = p\,\frac{r_0^2}{c}\,\frac{y_1^3 - x^2 y_1}{(x^2 + y_1^2)^2}.$$

Es wird

$$\xi = \frac{p}{E}\,\frac{r_0^2}{c}\left(2\ \operatorname{arctg}\frac{x}{y_1} - \frac{x\,y_1}{x^2 + y_1^2} - \frac{1}{m}\,\frac{x\,y_1}{x^2 + y_1^2}\right).$$

Für die Punkte der positiven Y_1-Achse, $x = 0$ und $y_1 > 0$ ist $\xi = 0$ angenommen. Es ist $\operatorname{arctg}\frac{x}{y_1}$ der Winkel φ zwischen der positiven Y_1-Achse und der Verbindungsgeraden des beliebigen Punktes (x, y_1) mit dem Koordinaten-Anfangspunkte. Geht man um letzteren Punkt herum, vergrößert man also den Winkel φ von 0 bis 2π, so kommt man wieder auf die Punkte der positiven Y_1-Achse; diese haben jedoch dann die Verschiebung

$$\xi = 4\pi\,\frac{p}{E}\,\frac{r_0^2}{c} \quad \ldots\ (7).$$

Die Scheibe schiebt sich oberhalb des Koordinatenanfangspunktes, welcher zum Unstetigkeitspunkte wird, übereinander um den unveränderlichen Betrag $4\pi\,\frac{p}{E}\,\frac{r_0^2}{c}$. Dieser

Spannungszustand kann dadurch entstehen, daß für positive y ein schmaler Streifen von der Breite $4\pi \frac{p}{E} \frac{r_0^2}{c}$ herausgeschnitten und die Scheibe gewaltsam wieder verbunden ist. Man hat es demnach mit einer Vorspannung der unbelasteten Scheibe oder Eigenspannung zu tun.

In der allgemeinen Lösung F entspricht sowohl die Funktion F_4 wie auch F_5 einem solchen Spannungszustande. Nur hat F_5 das entgegengesetzte Vorzeichen und der Unstetigkeitspunkt liegt oberhalb der Y-Achse.

Der von Hrn. Pöschl gefundene Spannungszustand entsteht demnach in einer gleichmäßig allseitig gezogenen Scheibe mit zwei Löchern, deren Steg vor der Belastung um die Länge $4\pi \frac{p}{E} \frac{r_0^2}{c}$ gekürzt worden ist. Die Scheibe hat im unbelasteten Zustande eine bestimmte Vorspannung und zwar ist dies im Stege eine Zugspannung. Schneidet man den Steg durch, so klafft die unbelastete Scheibe nach Abb. 2 auf.

Für die Scheibe mit zwei kreisrunden Löchern ohne Vorspannung — und dieser Fall ist wohl nur von Wichtigkeit — wäre demnach die genaue Lösung noch zu finden[1]). [118]

* * *

Der vorstehende Aufsatz ist von der Schriftleitung Hrn. Th. Pöschl zur Kenntnis gebracht worden, der sich hierzu wie folgt äußert:

Durch ein Versehen ist es mir in der Tat entgangen, daß der Verzerrungszustand, der dem von mir angegebenen Spannungszustande entspricht, nicht eindeutig ist; die Behauptung des Hrn. C. Weber, daß durch diese Lösung das Spannungsproblem der Scheibe mit zwei Löchern nicht erledigt ist, ist daher allem Anscheine nach zutreffend.

Bezüglich der meisten anderen Behauptungen kann ich jedoch den Standpunkt ihres Verfassers nicht teilen. Insbesondere scheint er das Wesen der »angepaßten Koordinaten« nicht entsprechend einzuschätzen, durch deren Verwendung es in der Regel allein — wenn überhaupt — gelingt, auf direktem Wege Lösungen für derartige Probleme zu finden, wie ich sie mir in dem in Rede stehenden Aufsatze gestellt. Hinterher ist es freilich ohne Schwierigkeit möglich, zu den bevorzugten Cartesischen Koordinaten zurückzukehren und mit ihnen weiterzuarbeiten. Für die Ermittlung des Verzerrungszustandes ist übrigens das von Love (Theorie der Elastizität, deutsch von Timpe, Leipzig 1907, S. 242 u. f.) angegebene allgemeine Verfahren vorzuziehen.

Auch die an Gl. (4) seines Aufsatzes angeschlossenen Bemerkungen erscheinen mir teilweise unzutreffend, da darin doch $y = c$ nur für $r_0 = 0$, also für die »punktierte« Scheibe, gesetzt werden kann; es folgt

$$(\sigma_x)_{x=0,\, y=c,\, r_0=0} = p \lim_{\substack{y=c,\\ r_0=0}} \left[1 + \frac{4 r_0^2 c^2}{(c+y)^2 (c-y)^2}\right] = 2p,$$

welcher Wert auch von mir angegeben wurde; dagegen müssen die in Abb. 3 meiner Arbeit gezeichneten Kurven, die den Spannungsverlauf außerhalb der Löcher darstellen, richtig oberhalb der Linie $p = 1$ verlaufen, und auch in der Zahlentafel am Schlusse sind die betreffenden Werte zu berichtigen. Th. Pöschl. [118a]

Untersuchungen über Wälzhebelmechanismen.

Von **H. ALT** in Dresden.

Unter Wälzhebelmechanismen sollen diejenigen Mechanismen verstanden werden, bei denen die gegenseitige Bewegung bestimmter Glieder durch die Berührung in Kurven gekennzeichnet ist und daher in dem Abwälzen der beiden Kurven aufeinander besteht[2]). Diese beiden Kurven sollen Wälzkurven und die beiden entsprechenden Glieder des Mechanismus Wälzhebel genannt werden. Die wichtigsten Anwendungen der Wälzhebelmechanismen, die zu den unselbständigen höheren Elementenpaarketten gehören, sind die Wälzhebelsteuerungen der Kolbenmaschinen.

[1]) Die Lösung, die inzwischen von mir aufgefunden wurde, soll demnächst veröffentlicht werden. (Zusatz bei der Korrektur.)

[2]) Hierüber vergl. H. Holzer, Wälzhebel, Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing., 1908, S. 2043 bis 2051.

Als Wälzkurven kann man beliebig gewählte Kurven miteinander arbeiten lassen. Sollen jedoch von den Wälzhebeln bezw. den Wälzkurven bestimmte Forderungen erfüllt werden, so sind die Kurven nicht mehr willkürlich wählbar. Die wichtigste dieser Forderungen, die im allgemeinen in allen praktischen Anwendungen einwandfrei erfüllt werden muß, ist die, daß zur Erzielung einer möglichst geringen Abnutzung der Wälzhebel die beiden Wälzkurven aufeinander nicht gleiten, sondern nur rollen sollen. Schon geringes Gleiten hat eine Abnutzung der Wälzhebel zur Folge, die in der Regel das Gleiten noch weiter verstärkt und die vorgeschriebene gegenseitige Bewegung der Wälzhebel verändert. Wie man die Forderung des reinen Rollens in den praktisch wichtigsten Fällen verwirklichen kann, soll in der vorliegenden Arbeit dargelegt werden.

Bei der Untersuchung der Wälzkurven kommt es nur auf die gegenseitige Bewegung der Wälzhebel an, so daß wir hier den einen Wälzhebel als ruhend annehmen und die relative Bewegung des anderen gegen diesen ruhenden betrachten wollen. Je nach den Bewegungsverhältnissen dieser Relativbewegung ergeben sich mehrere Möglichkeiten, von denen im folgenden diejenigen behandelt werden, bei denen ein bestimmter Punkt des einen Wälzhebels gegen den anderen eine vorgeschriebene Bahn beschreibt, und zwar sollen hier die drei Fälle untersucht werden, daß diese Bahn eine Gerade, ein Kreis bezw. eine beliebig gegebene Kurve ist.

Was die Methode der Untersuchungen anbelangt, so wird hier von dem von M. Krause[1]) angegebenen analytischen Verfahren ausgegangen, das auf den Formeln für die Koordinatentransformation beruht. Anschließend daran werden, soweit es zweckmäßig erscheint, synthetische Betrachtungen hinzugezogen. Der Hauptwert wird darauf gelegt, aus den gefundenen Ergebnissen zeichnerisch-rechnerische Verfahren zu entwickeln, die einfach zu handhaben und für den Ingenieur brauchbar sind.

1. Allgemeine Darstellung der Wälzkurven als Polkurven. Die Bewegung des bewegten Wälzhebels gegen den ruhenden läßt sich als ebene Bewegung durch das Abrollen einer eindeutig bestimmten Kurve, der bewegten Polkurve, auf der ruhenden Polkurve wiedergeben. Da es bei jeder ebenen Bewegung immer ein und nur ein Paar Polkurven gibt, zwischen denen während der Dauer der Bewegung reines Rollen stattfindet, so ist die Frage nach den Wälzkurven auf die nach den Polkurven zurückgeführt.

Ist eine der beiden Wälzkurven sowie die Bahn irgend eines Punktes A des bewegten Wälzhebels beliebig gegeben, so ist dadurch die andere Wälzkurve als zugeordnete Polkurve völlig bestimmt. Die beiden Wälzkurven müssen die Eigenschaft haben, daß ihre entsprechenden Bogenlängen einander gleich sind. Ferner muß die Bedingung erfüllt sein, daß der Momentanpol, d. i. der augenblickliche Berührungspunkt beider Wälzkurven stets auf der Bahnnormalen des Punktes A liegt.

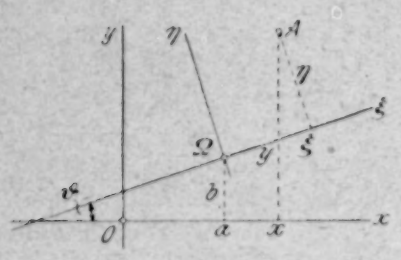


Abb. 1

In der ruhenden und in der bewegten Ebene wählen wir je ein Koordinatensystem x, y bezw. ξ, η mit dem Ursprung O bezw. Ω. Die Lage der bewegten Ebene gegen die ruhende sei durch die Koordinaten a, b des Punktes Ω und durch den Winkel ϑ bestimmt, den die ξ-Achse mit der x-Achse einschließt (Abb. 1). Die Koordinaten eines beliebigen Punktes $A(\xi, \eta)$ der bewegten Ebene lassen sich dann schreiben:

$$x = a + \xi \cos\vartheta - \eta \sin\vartheta, \qquad y = b + \xi \sin\vartheta + \eta \cos\vartheta \quad . \; . \; . \quad (1).$$

Sind a und b als Funktionen von ϑ bekannt, so sind die beiden Gl. (1) als die Bewegungsgleichungen der bewegten Ebene aufzufassen. Da der Momentanpol derjenige Punkt der Ebene ist, der augenblicklich keine Geschwindigkeit besitzt, so findet man seine Koordinaten x_p, y_p bezw. ξ_p, η_p in der ruhenden bezw. in der bewegten Ebene, indem man

$$\frac{dx}{d\vartheta} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dy}{d\vartheta} = 0$$

setzt. Dann ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} x_p &= a - \frac{db}{d\vartheta} \\ y_p &= b + \frac{da}{d\vartheta} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (2) \quad \text{und} \quad \left.\begin{aligned} \xi_p &= \frac{da}{d\vartheta}\sin\vartheta - \frac{db}{d\vartheta}\cos\vartheta \\ \eta_p &= \frac{da}{d\vartheta}\cos\vartheta + \frac{db}{d\vartheta}\sin\vartheta \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (3).$$

[1]) M. Krause, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung XIX, 1910, S. 327. M. Krause, Analysis der ebenen Bewegung, Berlin und Leipzig 1920.

Sind a und b als Funktionen des als Bewegungsparameter aufgefaßten Winkels ϑ gegeben, so wird durch die Gl. (2) die ruhende und durch die Gl. (3) die bewegte Polkurve dargestellt.

Bei den folgenden Betrachtungen soll, wie bereits erwähnt wurde, die Bahn eines Punktes der bewegten Ebene gegeben sein. In diesen Punkt legen wir den Ursprung Ω des bewegten Systems. Ferner wird eine der beiden Wälzkurven als gegeben angenommen und diese dann im allgemeinen als die ruhende betrachtet. Die Aufgabe besteht nun darin, die andere Wälzkurve zu ermitteln, die durch die gemachten Annahmen völlig bestimmt ist und die daher weitere gestellte Bedingungen nicht erfüllen kann.

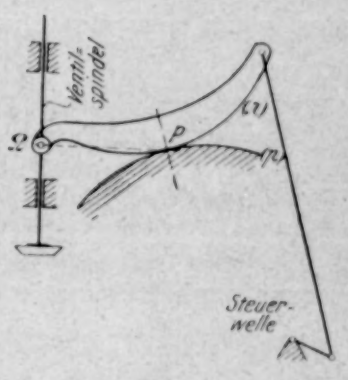


Abb. 2

2. Ein Punkt des bewegten Wälzhebels beschreibt eine gegebene Gerade. Dieser Fall liegt den sogenannten Wälzhebelsteuerungen ohne ruhende Drehpunkte zugrunde, deren Schema in Abb. 2 angegeben ist. Der Punkt Ω beschreibt hier die durch die Führung der Ventilspindel bestimmte Gerade. Der augenblickliche Berührungspunkt beider Wälzkurven, d. h. der Momentanpol P, muß stets auf der durch Ω zur Ventilhubrichtung gezogenen Senkrechten liegen. Wir wählen die Bahngerade des Punktes Ω als y-Achse des ruhenden Systems (Abb. 3) und haben daher zu setzen

$$a = 0 \quad \text{und} \quad \frac{da}{d\vartheta} = 0,$$

so daß sich aus (2) und (3) für die Polkurven die Beziehungen

$$x_p = -\frac{db}{d\vartheta}, \qquad y_p = b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\xi_p = -\frac{db}{d\vartheta}\cos\vartheta, \qquad \eta_p = \frac{db}{d\vartheta}\sin\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

ergeben. Führt man in der bewegten Ebene Polarkoordinaten ein, indem man

$$\xi_p = \varrho_p \cos\varphi_p, \qquad \eta_p = \varrho_p \sin\varphi_p$$

setzt, so gilt

$$\varrho_p = \frac{db}{d\vartheta}, \quad \varphi_p = 180^0 - \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5\,\mathbf{a}).$$

Hiernach ist (Abb. 3)

$$\Omega P = \varrho_p = \frac{db}{d\vartheta}.$$

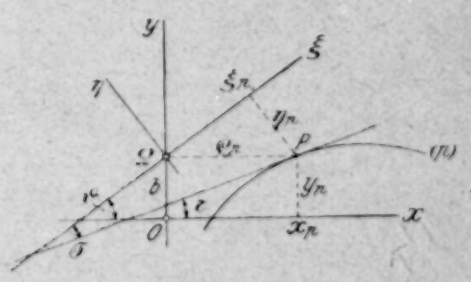


Abb. 3

Ist die ruhende Wälzkurve (p) gegeben, so findet man zu jeder Stellung des Ventilhubpunktes Ω den entsprechenden Momentanpol P als Schnittpunkt der durch Ω zur Ventilhubrichtung gezogenen Senkrechten mit (p). Die Aufgabe, die zugeordnete bewegte Wälzkurve (π) zu finden, wäre gelöst, wenn für jede Lage von Ω der Winkel ϑ bekannt wäre. Man findet ihn rechnerisch wie folgt. Die ruhende Wälzkurve sei in der Form $x_p = f(y_p)$ gegeben. Hieraus ergibt sich nach (4)

$$\vartheta = -\int \frac{dy_p}{x_p} + \text{konst.} = -\int \frac{db}{f(b)} + \text{konst.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

wodurch ϑ bestimmt ist. Legt man dann durch Ω unter dem Winkel ϑ gegen die x-Achse eine Gerade, so ist diese die ξ-Achse. Durch das von P auf die ξ-Achse gefällte Lot sind die Koordinaten ξ_p, η_p bestimmt (Abb. 3). Hiernach läßt sich die bewegte Wälzkurve punktweise ermitteln. In jedem der erhaltenen Punkte kann man ferner die Kurventangente angeben, da deren Richtungswinkel σ nach Abb. 3 gefunden wird.

Die Durchführung des analytischen Verfahrens soll an einem einfachen Beispiele gezeigt werden. Die ruhende Polkurve sei als Gerade gegeben, die mit der Ventilhubrichtung den Winkel α einschließt. Die x-Achse wird so gewählt, daß sich die ruhende Polkurve in der Form

$$x_p = y_p \operatorname{tang} \alpha$$

schreiben läßt. Dann ergibt sich aus (6)

$$\vartheta = -\int \frac{db}{b \operatorname{tang} \alpha} + \text{konst.} = -\cot \alpha \lg b + \text{konst.}$$

oder, wenn man dem Anfangswerte $\vartheta = 180^0$ die Ordinate $b = b_0$ zuordnet,

$$\vartheta = 180^0 - \cot \alpha \lg \frac{b}{b_0}.$$

Ferner wird

$$\frac{db}{d\vartheta} = -b \operatorname{tang} \alpha.$$

Aus (5a) findet man nun

$$\varrho_p = b \operatorname{tang} \alpha, \qquad \varphi_p = \cot \alpha \lg \frac{b}{b_0},$$

woraus nach Elimination des Parameters b

$$\varrho_p = b_0 \operatorname{tang} \alpha \, e^{\varphi_p \operatorname{tang} \alpha}$$

folgt. Die bewegte Wälzkurve (π) ist hiernach eine logarithmische Spirale, deren Konstante sich aus der vorstehenden Gleichung ergeben und die sich leicht aufzeichnen läßt (Abb. 4).

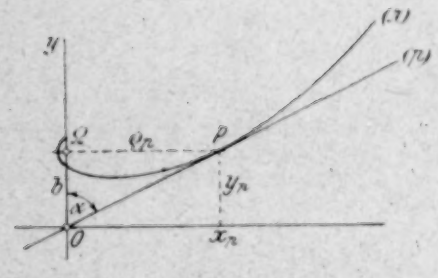


Abb. 4

Die Behandlung des umgekehrten Falles, daß die bewegte Wälzkurve (π) gegeben und die ruhende Wälzkurve (p) zu ermitteln ist, soll unmittelbar an einem praktisch wichtigen Beispiel dargelegt werden. Die bewegte Wälzkurve sei als Gerade gegeben. Wir wählen die ξ-Achse parallel dieser Geraden, so daß sich deren Gleichung in der Form

$$\varrho_p = \frac{h}{\sin \varphi_p}$$

schreiben läßt. Hieraus folgt nach (5a)

$$\frac{db}{d\vartheta} = \frac{h}{\sin \vartheta}.$$

Die Integration liefert

$$b = h \int \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} + \text{konst.} = h \lg \operatorname{tang} \frac{\vartheta}{2} + \text{konst.}$$

Setzt man zur Bestimmung der Integrationskonstanten für die Anfangslage $\vartheta = \vartheta_0$, $b = 0$, so wird

$$b = h \lg \frac{\operatorname{tang} \frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{tang} \frac{\vartheta_0}{2}} \quad \text{und} \quad \frac{db}{d\vartheta} = \frac{h}{\sin \vartheta}.$$

Nach (4) ist nunmehr die ruhende Wälzkurve (p) bestimmt. Unter Benutzung des Winkels ϑ als Parameter läßt sie sich schreiben

$$x_p = -\frac{h}{\sin \vartheta}, \qquad y_p = h \lg \frac{\operatorname{tang} \frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{tang} \frac{\vartheta_0}{2}}.$$

Dieses Ergebnis ermöglicht eine punktweise Bestimmung der gesuchten ruhenden Wälzkurve (p). Auch die Kurventangente kann in jedem Punkte angegeben werden, da sie mit der x-Achse den Winkel ϑ einschließt.

Das angegebene analytische Verfahren versagt, wenn die gegebene Wälzkurve nicht in mathematisch definierter Form, sondern als beliebig gestaltete Kurve vorgelegt ist. Wie man in diesem Falle die gesuchte Wälzkurve ermittelt, soll im folgenden gezeigt werden.

Die ruhende Wälzkurve (p) sei in beliebiger Gestalt gegeben. Von der bewegten Wälzkurve können wir für jede Lage des Ventilhubpunktes Ω unmittelbar den Fahrstrahl ϱ_p angeben, da $\varrho_p = x_p = \Omega P$ ist (Abb. 3). Um die zugeordnete Anomalie φ_p zu finden, bilden wir nach (5a) und (4)

$$\varphi_p = 180^0 - \vartheta = \int \frac{dy_p}{x_p} + c.$$

Ueber die Integrationskonstante c kann noch beliebig verfügt werden. Ist k eine beliebige andere Konstante, so kann man schreiben

$$\varphi_p = \frac{1}{k^2}\int \frac{k^2}{x_p}\, d\, y_p + c = \frac{1}{k^2}\int u\, d\, y_p + c,$$

wobei die Größen $u = \frac{k^2}{x_p}$ die Abszissen einer Kurve (q) sind, die die Ordinaten y_p der entsprechenden Punkte der gegebenen Kurve (p) besitzt. Die Abszissen u kann man entweder graphisch oder zahlenmäßig rechnerisch für jede Lage des Punktes Ω ermitteln und findet auf jeder Geraden ΩP einen Punkt Q der Kurve (q), indem man $\Omega Q = u$ macht (Abb. 5). Entspricht Ω_0 der tiefsten Ventilstellung, so ist die durch die Kurve (q) bestimmte, in Abb. 5 schraffierte Fläche $\Omega_0 Q_0 Q \Omega$

$$f = \int_{\Omega_0}^{\Omega} u\, d\, y_p.$$

Daher wird

$$\varphi_p = \frac{f}{k^2}.$$

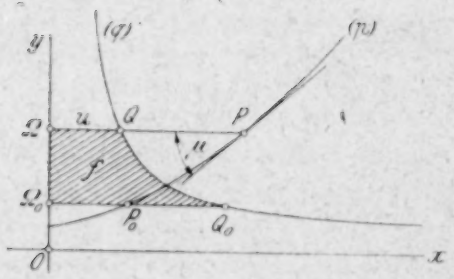


Abb. 5

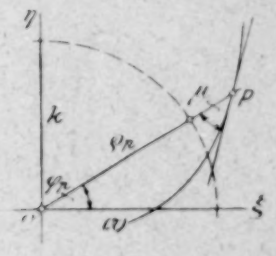


Abb. 6

Mit Hilfe dieser Beziehung erhält man für jede Lage des Punktes Ω den entsprechenden Winkel φ_p und, da $\varrho_p = x_p$ bereits bekannt ist, den entsprechenden Punkt P der bewegten Wälzkurve (π) (Abb. 6). Auch die Kurventangente ist bestimmt, da der Winkel μ zwischen Tangente und Fahrstrahl (Abb. 6) nach Abb. 5 als der Winkel zwischen ΩP und der Tangente an die ruhende Wälzkurve gefunden wird. Nach diesem Verfahren läßt sich zu jeder gegebenen ruhenden Wälzkurve (p) die entsprechende bewegte Wälzkurve (π) mit jedem gewünschten Grade von Genauigkeit ermitteln.

Ist dagegen umgekehrt die bewegte Wälzkurve (π) gegeben, so findet man die ruhende Wälzkurve (p) in der folgenden Weise. Zu jedem Punkte P der bewegten Wälzkurve (Abb. 6) kann man sofort die Abszisse x_p des entsprechenden Punktes der ruhenden Wälzkurve angeben, da $x_p = \varrho_p$ ist. Die zugehörige Ordinate wird nach (4) und (5 a)

$$y_p = b = \int \varrho_p\, d\, \varphi_p + \text{konst.}$$

Ist k wieder eine beliebige Konstante, so kann man schreiben

$$y_p = \frac{1}{k}\int \varrho_p\, d\,(k\,\varphi_p) + \text{konst.} = \frac{1}{k}\int \varrho_p\, d\, u + \text{konst.},$$

wobei $d\,u$ das Bogenelement eines Kreises vom Radius k um Ω ist. Trägt man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Kreisbögen u aus Abb. 6 als Abszissen und die zugeordneten Strecken $\Omega P = \varrho_p = x_p$ als Ordinaten auf (Abb. 7), so erhält man eine Kurve, durch welche die in Abb. 7 schraffierte Fläche

$$f = \int \varrho_p\, d\, u + \text{konst.} = k\, y_p$$

bestimmt ist. Aus Abb. 7 berechnet man, etwa durch Einteilen in schmale trapezförmige Streifen, die Fläche f und findet damit die entsprechende Ordinate $y_p = f : k$. Dieses Verfahren liefert zu jedem Punkte der bewegten Wälzkurve (π) den entsprechenden Punkt der ruhenden Wälzkurve (p). Die Kurventangente ergibt sich, wenn man die aus Abb. 5 und 6 ersichtliche Gleichheit der beiden Winkel μ benutzt.

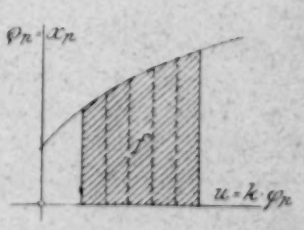


Abb. 7

3. Ein Punkt des bewegten Wälzhebels beschreibt einen gegebenen Kreis. Als wichtige Anwendungen dieser Mechanismen seien die Wälzhebelsteuerungen mit ruhenden Drehpunkten genannt, deren Schema in Abb. 8 angegeben ist. Bei ihnen beschreibt ein Punkt des einen Wälzhebels bei dessen Relativbewegung gegen den anderen einen Kreis; z. B. ist die Relativbahn des Punktes Ω ein Kreis um den Punkt O mit dem Radius $\Omega O = R$.

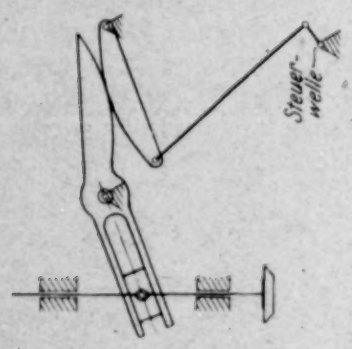


Abb. 8

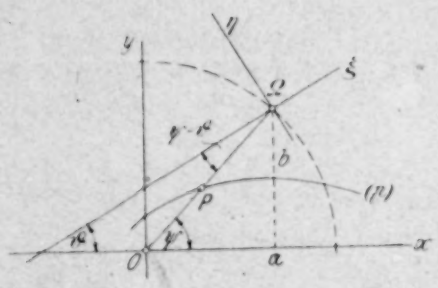


Abb. 9

Wir legen durch den Mittelpunkt O des gegebenen Kreises ein ruhendes Koordinatensystem x, y und durch den Punkt Ω, dessen Koordinaten a, b seien, ein bewegtes Koordinatensystem ξ, η, dessen ξ-Achse mit der x-Achse den Winkel ϑ einschließt (Abb. 9). Ist ψ die Anomalie der jeweiligen Lage des Punktes Ω, so gilt

$$a = R\cos\psi, \quad b = R\sin\psi$$

und daher

$$\frac{da}{d\vartheta} = -R\frac{d\psi}{d\vartheta}\sin\psi, \qquad \frac{db}{d\vartheta} = R\frac{d\psi}{d\vartheta}\cos\psi.$$

Nach (2) und (3) ergeben sich nunmehr für die beiden Wälzkurven die Beziehungen

$$x_p = R\left(1 - \frac{d\psi}{d\vartheta}\right)\cos\psi, \qquad y_p = R\left(1 - \frac{d\psi}{d\vartheta}\right)\sin\psi$$

bezw.

$$\xi_p = -R\frac{d\psi}{d\vartheta}\cos(\psi - \vartheta), \qquad \eta_p = -R\frac{d\psi}{d\vartheta}\sin(\psi - \vartheta).$$

Hieraus folgt das bekannte Ergebnis, daß der augenblickliche Berührungspunkt P beider Wälzkurven immer auf der Geraden $O\Omega$ liegen muß und daß $\Omega P = \varrho_p = R\frac{d\psi}{d\vartheta}$ ist (Abb. 9). In Polarkoordinaten erhält man für die ruhende Wälzkurve

$$\left.\begin{aligned} r_p &= \sqrt{x_p^2 + y_p^2} = R\left(1 - \frac{d\psi}{d\vartheta}\right) \\ &\text{Anomalie } \psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

und für die bewegte Wälzkurve

$$\varrho_p = \sqrt{\xi_p^2 + \eta_p^2} = R\frac{d\psi}{d\vartheta}, \qquad \text{Anomalie } 180^0 + \psi - \vartheta.$$

Die Handhabung des analytischen Verfahrens sei unmittelbar an einem Beispiel gezeigt, das für die Anwendungen wichtig ist, und zwar an dem Fall einer geradlinigen Wälzkurve (p). Gegeben sei als ruhende Wälzkurve (p) die Gerade parallel der x-Achse

$$r_p = \frac{h}{\sin\psi},$$

wobei $h < R$ angenommen werde, so daß $h = R\sin\alpha$ gesetzt werden kann (Abb. 10). Dann wird nach (8)

$$\vartheta = \int \frac{d\psi}{1 - \frac{h}{R\sin\psi}} + c = \int \frac{\sin\psi\, d\psi}{\sin\psi - \sin\alpha} + c.$$

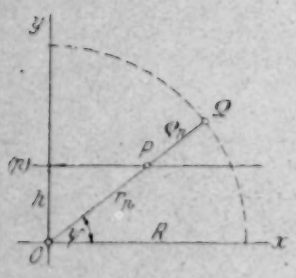


Abb. 10

Die Integration ergibt

$$\vartheta = \psi + \tan\alpha \lg \frac{\sin\frac{\psi - \alpha}{2}}{\cos\frac{\psi + \alpha}{2}} + c,$$

so daß man als Anomalie der bewegten Wälzkurve

$$\varphi_p = 180^0 + \psi - \vartheta = \tan\alpha \lg \frac{\cos\frac{\psi + \alpha}{2}}{\sin\frac{\psi - \alpha}{2}} + c$$

erhält, wobei über die Integrationskonstante c willkürlich verfügt werden kann. Ferner wird

$$\varrho_p = R\frac{d\psi}{dt} = R - \frac{h}{\sin\psi} = R\left(1 - \frac{\sin\alpha}{\sin\psi}\right).$$

Die beiden für φ_p und ϱ_p gefundenen Ausdrücke stellen die gesuchte bewegte Wälzkurve (π) in Parameterform mit dem Parameter ψ dar. Für verschiedene Werte ψ berechnet man hiernach die zugeordneten Größen φ_p und ϱ_p und erhält damit punktweise die bewegte Wälzkurve. Da der Winkel zwischen dem Fahrstrahl ϱ_p und der Kurventangente hier stets ψ ist, so kann man überall auch die Kurventangente angeben, so daß sich die Kurve (π) sehr genau zeichnen läßt. In Abb. 11 ist die für den Wert $\sin\alpha = 0{,}2$ ermittelte Wälzkurve (π) angegeben.

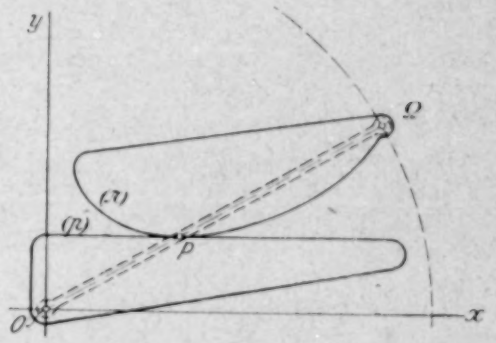


Abb. 11

Der analytische Weg ist nur anwendbar, wenn die Wälzkurve (p) durch ihre Gleichung gegeben ist. Ist sie dagegen nur als beliebig gezeichnete Kurve vorgelegt, kennt man also ihren mathematischen Charakter nicht, so muß man ähnlich vorgehen, wie im 2. Abschnitt gezeigt wurde. Das hier anzuwendende Verfahren soll jedoch erst im nächsten Abschnitt erörtert werden, wo es sich als Sonderfall eines allgemeineren Verfahrens ergibt.

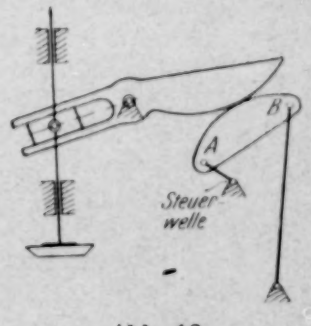


Abb. 12

4. Ein Punkt des bewegten Wälzhebels beschreibt eine beliebig gegebene Kurve. In welcher Weise der vorliegende Fall in den Anwendungen auftreten kann, zeigt der in Abb. 12 schematisch dargestellte Steuerungsmechanismus, bei dem der Punkt Ω des Wälzhebels 1 als Relativbahn gegen den Wälzhebel 2 weder eine Gerade noch einen Kreis, sondern eine beliebig gestaltete Kurve beschreibt, die sich ohne Kenntnis der Wälzkurven aufzeichnen läßt.

Eine der beiden Wälzkurven sei wieder gegeben und diese werde als ruhende Wälzkurve (p) betrachtet. Ferner sei die Relativbahn (o) des Punktes Ω gegen die Wälzkurve (p) bekannt (Abb. 13). Wählt man auf (o) eine beliebige Lage des Punktes Ω und zieht in ihr die Bahnnormale (n), so schneidet diese die Kurve (p) im zugeordneten Punkte P, dem augenblicklichen Berührungspunkt beider Wälzkurven. Entsprechend den früheren Bezeichnungen sei

$$OP = r_p, \quad \Omega P = \varrho_p, \quad O\Omega = R \text{ (veränderlich)}.$$

Da der bewegte Wälzhebel eine Momentandrehung um den Punkt P mit dem Drehwinkel $d\vartheta$ ausführt, so ist das Bahnelement, das der Punkt Ω auf der Kurve (o) zurücklegt,

$$du = \varrho_p \cdot d\vartheta, \qquad \text{woraus } d\vartheta = \frac{du}{\varrho_p}$$

und nach Integration

$$\vartheta = \int\frac{du}{\varrho_p} + \text{konst.}$$

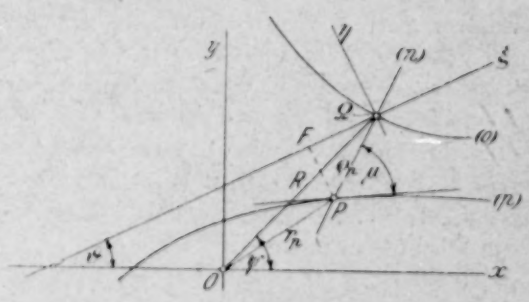


Abb. 13

folgt. Hiernach läßt sich der Winkel ϑ durch eine zeichnerisch rechnerische Integration in ähnlicher Weise ermitteln, wie es im 2. Abschnitte gezeigt wurde. Man wählt eine beliebige Konstante k und bildet

$$\vartheta = \frac{1}{k^2}\int\frac{k^2}{\varrho_p}\,du + \text{konst.} = \frac{1}{k^2}\int z\,du + \text{konst.} = \frac{f}{k^2} + \text{konst.}$$

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem trägt man die Bogenlänge u der Kurve (o) als Abszisse und die entsprechenden Strecken $z = k^2 : \varrho_p$ als Ordinaten auf. Man erhält dadurch eine Kurve, die eine Fläche f (Abb. 14) bestimmt, aus der sich nach der obigen Beziehung der Winkel ϑ berechnen läßt. Hat man ϑ

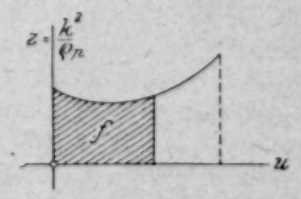


Abb 14

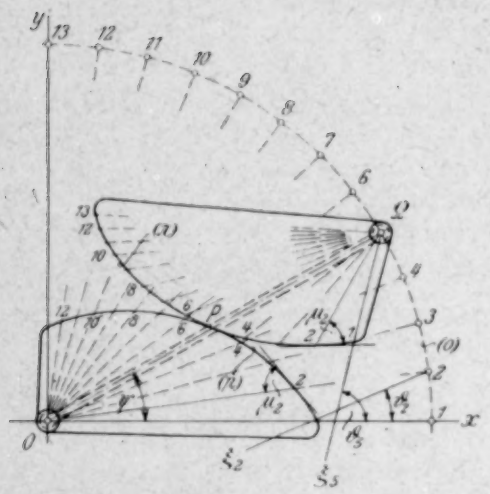


Abb. 15

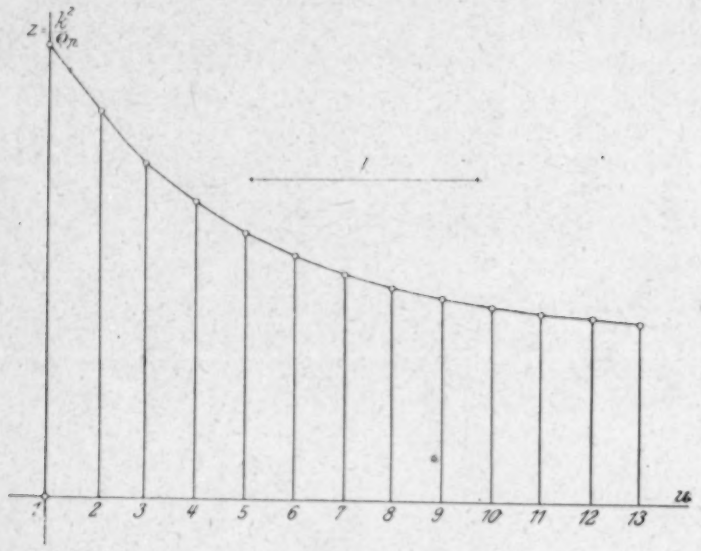


Abb. 15a

ermittelt, so zieht man durch Ω unter dem Winkel ϑ gegen die x-Achse eine Gerade, welche die ξ-Achse des bewegten Koordinatensystems darstellt. Fällt man von P auf die ξ-Achse das Lot PF, so ist $\Omega F = \xi_p$ und $PF = \eta_p$. Damit ist ein Punkt der bewegten Wälzkurve (π) gefunden und zwar derjenige, der der angenommenen Lage des Punktes Ω entspricht. Wiederholt man dieses Verfahren für verschiedene Lagen des Punktes Ω, so erhält man punktweise die bewegte Wälzkurve (π). Auch die Kurventangente läßt sich in jedem Punkte angeben, da aus Abb. 13 der Winkel μ zwischen dem Fahrstrahl ϱ_p und der Kurventangente entnommen werden kann.

Ist im besonderen Falle die Bahnkurve (o) des Punktes Ω ein Kreis um einen Punkt O, so erhalten wir den im 3. Abschnitt analytisch behandelten Fall, an dem hier die Durchführung des zeichnerisch rechnerischen Verfahrens gezeigt werden soll. Gegeben ist der Bahnkreis (o) des Punktes Ω mit dem Mittelpunkt O und dem Radius R sowie die als ruhend betrachtete Wälzkurve (p) (Abb. 15). Die bewegte Wälzkurve (π) soll für den Bereich von $\psi = 0$ bis $\psi = 90^0$ ermittelt werden. Wir teilen das diesem Bereich entsprechende Viertel des Bahnkreises (o) in eine Anzahl (z. B. 12) gleiche Teile und verbinden die Teilpunkte mit dem Kreismittelpunkte O. Auf (p) erhalten wir dadurch die entsprechenden Punkte P. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem (Abb. 15a) tragen wir auf der Abszissenachse vom Ursprung aus die 12 gleichen Teilbögen des Kreises o auf. Dann wählen wir eine beliebige Strecke k, entnehmen aus Abb. 15 die Strecken $\varrho_p = \Omega P$ und berechnen (z. B. mit Hilfe des Rechenschiebers) die Größen $z = k^2 : \varrho_p$, die wir in Abb. 15a in den entsprechenden Punkten als Ordinaten auftragen. Auf diese Weise erhalten wir eine Kurve, durch die die Fläche f bestimmt ist. Diese Fläche wird durch die eingezeichneten Ordinaten in Streifen zerlegt, die als Trapeze berechnet werden. Die hierbei auftretenden kleinen Fehler lassen sich beseitigen, wenn man die Gesamtfläche mit Hilfe des Planimeters ermittelt und die für die Flächenstreifen berechneten Werte entsprechend korrigiert. Bezeichnet man in Abb. 15a den Inhalt der einzelnen Flächenstreifen vom Ursprung aus beginnend der Reihe nach mit $f_1, f_2, f_3, \ldots f_{12}$, so ergeben sich, wenn man die Integrationskonstante gleich Null setzt, die entsprechenden Winkel

$$\vartheta_1 = f_1 : k^3, \quad \vartheta_2 = (f_1 + f_2) : k^2 \ldots, \quad \vartheta_{12} = (f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_{12}) : k^2$$

und zwar zahlenmäßig im Bogenmaß, so daß sie sich als Bogenlängen eines Kreises von 10 cm Radius unmittelbar auftragen lassen. In Abb. 15 sind die Winkel ϑ_2 und ϑ_5 für die Punkte 2 bezw. 5 eingetragen, die die entsprechenden Abszissenachsen ξ_2 bezw. ξ_5 bestimmen. Die bewegte Wälzkurve (π) wurde für die Stellung 5 eingezeichnet. Um z. B. den Punkt 2 der bewegten Wälzkurve zu finden, fällen wir vom Punkte 2 der Kurve (p) auf ξ das Lot und finden damit die Koordinaten ξ_{p2} und η_{p2}, die wir in Ω_5 auf ξ_5 bezw. dazu senkrecht auftragen und die dadurch den Punkt 2 der bewegten Wälzkurve ergeben. Durch den Winkel μ_2 zwischen Tangente und Fahrstrahl der Kurve (p) ist auch die Tangente im Punkte 2 der Kurve (π) bestimmt. Hat man durch wiederholte Anwendung des angegebenen Verfahrens die bewegte Wälzkurve (π) punktweise ermittelt, so muß sich als Kontrolle zeigen, daß die Bogenlängen der Wälzkurven (p) und (π) zwischen je zwei entsprechenden Punkten einander gleich sind. 112

Über die Korrelationsmethode.

Von **P. RIEBESELL** in Hamburg.

In dieser Zeitschrift (1, 1921, S. 199—205) hat Hr. Gravelius einige Untersuchungen veröffentlicht, die insofern einer Ergänzung bedürfen, als die darin zur Geltung gebrachten Gesichtspunkte für die Theorie des Korrelationskoeffizienten in der mathematischen Statistik zum Teil bereits seit langem Beachtung gefunden haben. In den folgenden Zeilen soll der Zusammenhang zwischen der Darstellung des Hrn. Gravelius und der üblichen Auffassung kurz erläutert werden.

1. Der Korrelationskoeffizient. Läßt sich aus einer Reihe von Beobachtungen ein eindeutiges Gesetz, das die Abhängigkeit der einen Veränderlichen von der andern in der Form $y = f(x)$ angibt, nicht ableiten, so kann die Korrelationsmethode dazu dienen, Wahrscheinlichkeitswerte für die Abhängigkeit der beiden Veränderlichen voneinander zu geben. Man verfährt dann in der Weise, daß man die Beobachtungswerte in eine statistische Verteilungstafel einträgt und den sogenannten Korrelationskoeffizienten berechnet.

Um die Methode zu kennzeichnen, diene als Beispiel die Prüfung der Korrelation zwischen der Veranlagung zum arithmetischen und der zum geometrischen Denken bei einer Gruppe von n Schülern. Die Noten seien für jedes Fach von der mittleren aus mit 0, $\pm$ 1, 2, 3 und 4, die eine Eigenschaft (arithmetische Veranlagung) sei mit x, die andere (geometrische Veranlagung) mit y bezeichnet. Wird jeder Schüler in das entsprechende Feld der Verteilungstafel mit doppeltem Eingang x, y gesetzt, so möge sich folgendes Bild ergeben:

y \ x	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	
−4	1									1
−3	1	3	1			1				6
−2	1	5	7	3						16
−1	1	2	11	21	10	2	1			48
0		1	4	14	22	9	2			52
+1	1		1	5	9	10	6		1	33
+2			1	1	5	7	2	1		17
+3							3			3
+4							1	1		2
	5	11	25	44	46	29	15	2	1	178

Zunächst werden für die beiden Summenreihen (unten und rechts) die arithmetischen Mittel gebildet, $x_0 = -0{,}44$ und $y_0 = -0{,}10$. Werden die Abweichungen vom arithmetischen Mittel mit α_x und α_y bezeichnet, so sind die beiden Streuungen

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma \alpha_x^2}{n}} = 1{,}521 \quad \text{und} \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma \alpha_y^2}{n}} = 1{,}383.$$

Damit berechnet sich der Korrelationskoeffizient zu:

$$r = \frac{\Sigma \alpha_x \alpha_y}{n \sigma_x \sigma_y} = 0{,}64 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Was bedeutet nun dieser Korrelationskoeffizient und wie ist man zu ihm gekommen?

2. Die Regressionskoeffizienten. Wenn überhaupt keine Beziehung zwischen den beiden Eigenschaften x und y bestände, so müßten in der obigen Tafel die untereinander stehenden Horizontalreihen vollständig unabhängig voneinander sein, insbesondere müßten sie ihr Maximum immer annähernd an derselben Stelle haben. Dasselbe gilt von den Vertikalreihen. An dem obigen Beispiel ist aber ohne weiteres zu sehen, daß mit größer werdendem y auch der Mittelwert der x sich nach rechts verschiebt; die

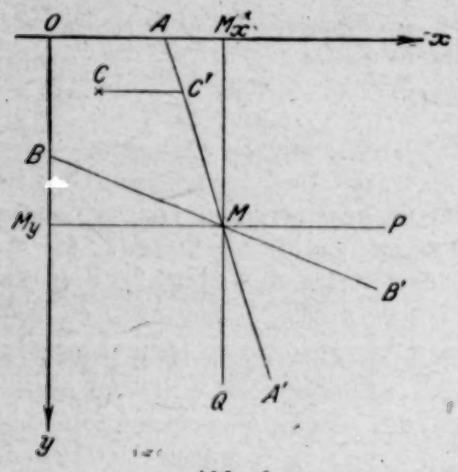


Abb. 1

Gipfelwerte der Horizontalreihenkurven verschieben sich nach rechts unten, ebenso steht es mit den Vertikalreihenkurven.

Am einfachsten liegt der Fall, wenn die Mittelwerte der Horizontalreihen auf einer Geraden liegen. In Abb. 1 soll diese Gerade durch AA' gegeben sein. Ist M_y der Mittelwert der y und schneidet die Gerade M_yP die Gerade AA' in M, dann schneidet die Senkrechte QM die Achse Ox in M_x, wo M_x der Mittelwert der x ist. Denn, wenn der Tangens des Neigungswinkels von AA' gegen MM_x mit R_y bezeichnet wird, so gilt für jede Horizontalreihe, in der die Zahl der Beobachtungen n_y sein möge, $\Sigma x = n_y R_y y$ und daher für die ganze Verteilungstafel, weil $\Sigma(n_y y) = 0$ ist, $\Sigma x = R_y \Sigma(n_y y) = 0$. M ist demnach die Mitte der gesamten Verteilung.

Es läßt sich nun R_y auf einfache Weise bestimmen. Werden die x und die y von M aus gezählt, so ist das mittlere Produkt aller Paare zugehöriger Abweichungen

$$p = \frac{\Sigma(xy)}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Für jede Reihe ist $\Sigma(xy) = y\,\Sigma x = n_y R_y y^2$. Für die ganze Tafel ist daher:

$$\Sigma(xy) = R_y\,\Sigma(n_y y^2) = n R_y \sigma_y^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Da $p = r\sigma_x\sigma_y$ ist, so ergibt sich:

$$R_y = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Ebenso würde, wenn BB' die Verbindungslinie der Mitten der Vertikalreihen wäre,

$$R_x = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

sein. Die R werden als Regressionskoeffizienten bezeichnet. Während also der Korrelationskoeffizient keine unmittelbare geometrische Bedeutung hat (für $r = 0$ besteht keine Korrelation, für $r > 0$ ist positive Korrelation, für $r < 0$ negative Korrelation vorhanden), so geben die Regressionskoeffizienten an, um wieviel die x bezw. y fortschreiten, wenn y bezw. x um eine Einheit vermehrt wird. Für das obige Beispiel ergibt sich $R_y = 0{,}71$.

Haben wir es mit einer nichtlinearen Regression zu tun, so gibt R_y (bezw. R_x) den Richtungsfaktor derjenigen Geraden an, deren Entfernungen von den Mitten der Horizontalreihen (auf den Horizontalreihen gemessen) das kleinste Abweichungsquadrat haben. Dies ist sofort aus folgender Betrachtung zu ersehen: Ist C ein Punkt, der nicht auf AA' liegt, so ist $CC' = x - R_y y$. Es muß also $\Sigma(x - R_y y)^2$ ein Minimum sein; d. h. es muß

$$\Sigma(x - R_y y)\,y = 0, \qquad R_y = \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

sein.

Der Korrelationskoeffizient r ist nun nicht, wie Gravelius meint, früher willkürlich definiert worden. Schon in der Arbeit von Bravais[1]), in der er zuerst auftritt und nach der er auch Bravaisscher Korrelationskoeffizient heißt, wird seine Beziehung zur Fehlertheorie abgeleitet. Es handelt sich bei Bravais noch nicht um Korrelationsrechnung, hier wird vielmehr die Wahrscheinlichkeit berechnet, daß ein mit Beobachtungsfehlern behafteter Punkt auf einer Geraden liegt. Die Regressionskoeffizienten sind von Galton[2]) in die Korrelationsrechnung eingeführt und namentlich von Pearson[3]) angewandt worden. Später sind diese Methoden besonders in der biologischen[4]) und psychologischen[5]) Variationsstatistik ausgebaut. Die von Gravelius gegebene Ableitung findet sich z. B. bei Yule[6]).

---

[1]) A. Bravais, Analyse mathématique sur les probabilités des erreurs de situation d'un point. Mémoires de l'Academie des Sciences, 2. série, t. 9, 1846, p. 255.

[2]) F. Galton, Family Likeness in Stature. Proc. Roy. Soc. Vol. 40, 1886, p. 135.

[3]) K. Pearson, Regression, Heredity and Panmixia. Phil. Trans. Roy. Soc. Vol. 187, 1896, p. 277.

[4]) Vgl. z. B. W. Johannsen, Elemente der exakten Erblichkeitslehre, 2. Aufl., Jena 1913.

[5]) Vgl. z. B. W. Betz, Ueber Korrelation, Beiheft zur Ztschr. für angew. Psychologie. Leipzig 1911.

[6]) G. Yule, An Introduction to the Theory of Statistics, 5. Edition, London 1917.

Da sich auch die weiteren Betrachtungen von Gravelius aus den Grundlagen der mathematischen Statistik auf einfache Weise ableiten lassen, seien hier noch einige Bemerkungen angeschlossen.

3. Das Korrelationsverhältnis. Aus der Gleichung (6) ergibt sich, daß

$$s_x = \sqrt{\Sigma (x - R_y y)^2 : n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

die Streuung der $(x - R_y y)$ ist, d. h. s_x ist der mittlere Fehler, der gemacht wird, wenn die x von den y aus entsprechend der Relation $x = R_y y$ abgeschätzt werden. Für s_x ergibt sich aber aus den Gleichungen (2), (4) und (6)

$$s_x = \sigma_x \sqrt{1 - r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Entsprechend wird

$$s_y = \sigma_y \sqrt{1 - r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9).$$

s_x ist also die mittlere Streuung der Horizontalreihen in bezug auf die Linie AA' und s_y die mittlere Streuung der Vertikalreihen in bezug auf BB'.

Da nach Gleichung (4) und (5)

$$r = \sqrt{R_x R_y} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10),$$

so kann r auch als die mittlere Neigung der beiden Geraden, oder die Neigung bei einheitlichem Streuungsmaß, angesehen werden. Herrscht vollständige Korrelation, so wird $R_x = R_y$ und $r = 1$.

Liegt keine lineare Regression vor, so ist es wichtig, ein Maß für die Abweichung von der Geradlinigkeit zu haben. Dieses wird gegeben durch das Pearsonsche Korrelationsverhältnis, das folgendermaßen definiert wird. Ist s_{ax} die Streuung einer Horizontalreihe, so ist die mittlere Streuung der Horizontalreihen gegeben durch

$$\sigma_{ax}^2 = \Sigma (n_y s_{ax}^2) : n \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

Jetzt soll r' entsprechend Gleichung (8) definiert sein durch

$$\sigma_{ax}^2 = \sigma_x^2 (1 - r'^2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12),$$

sodaß

$$r'^2 = 1 - \frac{\sigma_{ax}^2}{\sigma_x^2}.$$

Ist M_x das Mittel aller x und m_x das Mittel einer Horizontalreihe, so ist

$$n \sigma_x^2 = \Sigma n_y (s_{ax}^2 + [M_x - m_x]^2)$$

und, wenn die Streuung der m_x mit σ_{mx} bezeichnet wird, so ergibt sich

$$\sigma_x^2 = \sigma_{ax}^2 + \sigma_{mx}^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

und daher

$$r' = \frac{\sigma_{mx}}{\sigma_x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14).$$

Dabei wird $r'^2 - r^2$ ein Maß für die Abweichung von der Geradlinigkeit; denn, wenn d die Abweichung der Mitte einer Horizontalreihe von der Regressionslinie bezeichnet, so ist $\sigma_x^2 (1 - r^2) = \sigma_{ax}^2 + \sigma_d^2$, daher $\sigma_d^2 = \sigma_x^2 (r'^2 - r^2)$.

4. Rangkorrelationen. Sind die beiden Merkmale x und y nicht gemessen, sondern nur in Rangsystemen geordnet worden, so kommen jeder Beobachtung zwei Zahlen der Reihe 1 bis n zu, und zwar kommt jede der Zahlen sowohl in der x-Reihe wie in der y Reihe nur einmal vor. Dann ist die Streuung der x und der y die der n ersten ganzen Zahlen, d. h.

$$\sigma_x = \sigma_y = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}},$$

und es wird

$$r = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = \frac{2 \Sigma x^2 - \Sigma x^2 + 2 \Sigma xy - \Sigma y^2}{2 \Sigma x^2} = 1 - \frac{\Sigma (x-y)^2}{2 \Sigma x^2} = 1 - \frac{6 \Sigma (x-y)^2}{n (n^2 - 1)}.$$

Diese Formel stammt von Spearman.

5. Mehrfache Korrelationen. Eine Ausdehnung der bisherigen Methode auf 3 und mehr Veränderliche läßt sich ohne Schwierigkeit durchführen. Wir bilden wieder lineare Gleichungen und bestimmen die Konstanten so, daß die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird. Haben wir n Variable x_1 bis x_n und werden die Regressionskoeffizienten von x_1 zu x_2 mit $b_{12,34\ldots n}$, von x_1 zu x_3 mit $b_{13,24\ldots n}$ usw. bezeichnet, so gilt die Gleichung:

$$x_1 = b_{12,34\ldots n} x_2 + b_{13,24\ldots n} x_3 + \ldots\ldots + b_{1n,23\ldots n-1} x_n.$$

Eine Verallgemeinerung der Gleichungen (10), (4) und (8) führt dann sofort zu den Beziehungen:

$$r_{12,34\ldots n} = \sqrt{b_{12,34\ldots n}\, b_{21,34\ldots n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15),$$

$$b_{12,34\ldots n} = r_{12,34\ldots n}\frac{\sigma_{1,34\ldots n}}{\sigma_{2,34\ldots n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16),$$

$$\sigma^2_{1,23\ldots n} = \sigma_1{}^2(1-r_{12}{}^2)(1-r^2{}_{13,2})(1-r^2{}_{14,23})\ldots\ldots(1-r^2{}_{1n,23\ldots n-1}) \quad (17),$$

$$r_{12,n} = \frac{r_{12}-r_{1n}\,r_{2n}}{\sqrt{(1-r^2{}_{1n})(1-r^2{}_{2n})}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

6. Korrelation bei normalen Verteilungskurven. Besonders einfach werden die Verhältnisse, wenn die Horizontal- und Vertikalreihen nach Gaußschen Fehlerkurven streuen. Wir erhalten dann die normale Verteilungsfläche, deren Gestalt von der Korrelation abhängt.

Gelten für x_1 und x_2 die Verteilungen

$$z_1 = \frac{n_1}{\sqrt{2\pi}}\sigma_1\, e^{-\frac{x_1{}^2}{2\sigma_1{}^2}}, \qquad z_2 = \frac{n_2}{\sqrt{2\pi}}\sigma_2\, e^{-\frac{x_2{}^2}{2\sigma_2{}^2}},$$

so ist bei völliger Unabhängigkeit der Merkmale x_1 und x_2 die Verteilung gegeben durch

$$z_{12} = \frac{n}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1{}^2}{\sigma_1{}^2}+\frac{x_2{}^2}{\sigma_2{}^2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19).$$

Diese Gestalt erhält die Verteilungsfläche für $r = 0$.

Legen wir durch die Fläche in verschiedenen Höhen Schnitte, so sind die Schnittkurven gegeben durch die Gleichungen

$$\frac{x_1{}^2}{\sigma_1{}^2}+\frac{x_2{}^2}{\sigma_2{}^2} = a^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20).$$

Wir erhalten also eine Schar von einander ähnlichen Ellipsen, deren Halbachsen parallel zu den Koordinatenachsen und proportional den Streuungen sind. Für $\sigma_1 = \sigma_2$ ergeben sich Kreise. Die Fläche ist dann die Rotationsfläche der Gaußschen Fehlerkurve.

Besteht Korrelation zwischen x_1 und x_2, so sind

$$x_{12} = x_1 - b_{12}\,x_2 \quad \text{und} \quad x_{21} = x_2 - b_{21}\,x_1$$

voneinander unabhängig und wir erhalten als Verteilungsfläche

$$z_{12} = \frac{n}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{(1-r_{12}{}^2)}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1{}^2}{\sigma_1{}^2}+\frac{x_{21}{}^2}{\sigma_{21}{}^2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21).$$

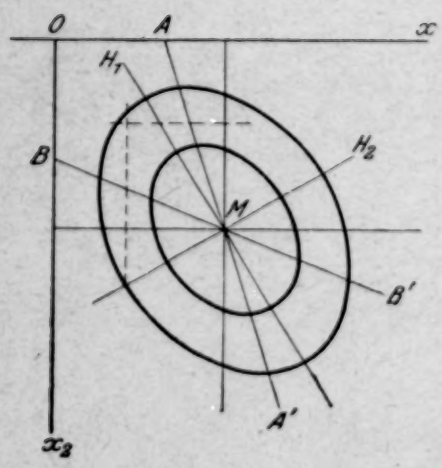


Abb. 2

Es ist aber

$$\frac{x_1{}^2}{\sigma_1{}^2}+\frac{x_{21}{}^2}{\sigma_{21}{}^2} = \frac{x_1{}^2}{\sigma_{12}{}^2}+\frac{x_2{}^2}{\sigma_{21}{}^2}-2r_{12}\frac{x_1\,x_2}{\sigma_{12}\,\sigma_{21}}.$$

Wir erhalten also wieder eine Schar konzentrischer ähnlicher Ellipsen, deren Hauptachsen aber gegen die Koordinatenachsen gedreht sind. Abb. 2 möge diese Verhältnisse veranschaulichen. Der Drehungswinkel der Achsen ergibt sich aus der Formel

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2r_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1{}^2-\sigma_2{}^2} \quad \ldots\ldots \quad (22).$$

Die Regressionslinien AA' und BB' müssen immer durch die Mitten aller Horizontal- bezw. Vertikallinien hindurchgehen. Diese Untersuchungen lassen sich leicht auf n Variable verallgemeinern [1]). 117

[1]) Vgl. auch H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. Leipzig 1906, S. 119ff.

* * *

Der vorstehende Aufsatz ist durch die Schriftleitung Hrn. C. Gravelius zur Kenntnis gebracht worden, der sich hierzu wie folgt äußert:

Die Ausführungen des Hrn. Riebesell wird man gewiß mit Interesse zur Kenntnis nehmen. Im wesentlichen wiederholen sie meine Darlegungen Bd. 1, S. 199 ff. unter Zugrundelegung eines anderen Ausgangsbeispiels, das freilich auch einem ganz anderen Interessenbereich angehört, als der ist, auf den es mir ausdrücklich ankam.

Mir kam und kommt es darauf an, die Korrelationsmethode, deren Anwendung in den beobachtenden Naturwissenschaften — vornehmlich der Hydrographie und Klimatologie — ich für fördernd halte, den in Betracht kommenden Kreisen leicht zugängig zu machen. Dies war umsomehr geboten, als die Methode, wie ich aus zahlreichen einzelnen Mitteilungen weiß, auch bei uns schon sehr häufig angewendet worden wäre, wenn man über ihre Grundlegung hinreichend unterrichtet gewesen wäre. Das ist aber nicht nur bei uns nicht der Fall gewesen[1]). Es darf daran erinnert werden, daß Exner in einer kleinen bei G. Fischer (Jena) erschienenen Broschüre[2]) bei dem Hinweis darauf, daß einer Beziehungsgleichung $y = b_1 x$ die Umkehrung $x = b_2 y$ mit $b_1 b_2 = r^2$ zugehört, sich dahin ausdrückt, es sei in der Korrelationsmethode anders als in »der gewöhnlichen Analysis«. Solche Unklarheiten haben nicht anregend wirken können; sie sind namentlich auch in Ingenieurkreisen, wo man in Fragen der Psychotechnik gern von der Methode Gebrauch gemacht hätte, als ein recht lästiges Hemmnis empfunden worden. Wahrnehmungen dieser Art haben mich veranlaßt, im Anfang 1920 in der mathematischen Sektion der »Isis« zu Dresden einen Vortrag über den Gegenstand zu halten, um dessen Veröffentlichung ich dann gebeten wurde.

Dem mathematischen Statistiker war dabei naturgemäß nichts Neues zu sagen. Dagegen wurden dem Ingenieur und Naturwissenschaftler durch die Herleitung in der Tat neue Gesichtspunkte eröffnet. Denn wenn zwischen zwei Reihen X und Y ohne den Durchgang durch die Tafel der verbundenen Häufigkeiten (Verteilungstafel), also, um auch einmal den Ausdruck zu gebrauchen, mit der »gewöhnlichen Analysis« z. B. eine lineare Beziehung hergeleitet wurde, so ergab sich eben nur eine Gleichung. Da ist es denn freilich für den, der mit der ganzen Betrachtung zum ersten Male bekannt gemacht wird, eine ganz neue und sehr wesentliche Einsicht, daß tatsächlich zwei Beziehungsgleichungen[3]) bestehen, um so mehr als in Fragen der Praxis, so z. B. in der hydrographischen Prognose, die Umkehrung $x = b_2 y$ neben $y = b_1 x$ eine sehr wesentliche Rolle spielen kann.

Die Begrenzung, welche ich meiner Darstellung gegeben habe, halte ich auch jetzt noch für richtig und zweckmäßig, weil es sich eben nur um eine erste Orientierung über die Praxis der Methode handelt.

Ergänzungen gebe ich in einem der nächsten Hefte der Zeitschrift für Gewässerkunde in Anlehnung an eine spezielle hydrographische Untersuchung. Man darf die besondere Stellung der mehrfach genannten Wissenschaften zur Korrelationsmethode nicht übersehen. Sie hat hier vornehmlich den Wert einer exakten Sondierung. Mit ihrem Ergebnis, abgesehen von dem Fall eines kleinen σ ist, eine Untersuchung noch nicht abgeschlossen, vielmehr erwächst dann die Aufgabe, eine physikalische Begründung des als wahrscheinlich erkannten Zusammenhanges zu suchen. Wird dabei ein Erfolg erreicht, so wird nicht immer an der linearen Beziehungsform festgehalten werden können. Und damit entsteht dann das interessante Problem, ob und wie die bei Anwendung der Korrelationsmethoden durchgeführten Rechnungen und erhaltenen Zahlen unmittelbar bei Herleitung einer neuen erweiterten Beziehungsform verwendbar sind. Den Nachweis hierüber habe ich in der vorhin angezeigten Arbeit erbracht.

Gravelius. 117a

---

[1]) Man vergleiche in dieser Hinsicht etwa die ausgezeichnete Schrift von V. H. Ryd, Bidrag til bestemmelsen af Meteorologiske Elementers periodes. Kopenhagen 1915, wo (S. 43) der Korrelationskoeffizient auf seine Formel, als zweckmäßig und einfach gestaltetes Aggregat, angesehen wird.

[2]) Die Korrelationsmethode, 1912.

[3]) Die Bezeichnung »Regressionsgleichungen« wird man für naturwissenschaftlich-technische Beträge ablehnen müssen; Beziehungen zwischen Niederschlag und Meereshöhe, zwischen der Wassermenge der Konstituante eines Flußsystems usw. sind keine »Regressionen«.

Über die Verwendbarkeit der Logarithmenpapiere bei der Integration der Differentialgleichungen $y' = f(x, y)$.

Von **P. SCHREIBER** in Dresden.

In seiner Behandlung der graphischen Methoden beim gewöhnlichen Zahlenrechnen, der Auflösung von Gleichungen, der Differentiation und Integration usw. führt R Mehmke[1]) auch die Darstellung der Funktionen durch »logarithmische Bilder« ein, erwähnt aber mit keinem Wort die Logarithmenpapiere, die er nach Pirani[2]) der Firma Carl Schleicher & Schüll in Düren (Rheinland) als ein für alle derartige Arbeiten wichtiges Hilfsmittel zur Herstellung empfohlen hatte. Nachdem es mir gelungen war, die in Mehmkes Anleitungen gestellten Aufgaben (auch die Gleichungen auf den Seiten 53 und 59) mit Hilfe der Logarithmenpapiere zu lösen[3]), habe ich dies auch mit der Integration der folgenden, ganz willkürlich angenommenen Differentialgleichung versucht.

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) = \frac{2\sqrt[2]{y} + 3\sqrt[3]{x}}{4\sqrt[4]{y} + 5\sqrt[5]{x}}.$$

Das Integral sei $y = F(x, k)$, wo k die Integrationskonstante. Um das numerische Bild dieser Funktion zu konstruieren, führt man $u = my$ und $v = nx$ Millimeter als Koordinaten ein. Dann wird

$$u = my = mF\left(\frac{v}{n}, k\right) = F_1(v, k)$$

die Gleichung der Schar von Integralkurven sein. Weiter erhält man

$$Z = \frac{du}{dv} = \operatorname{tg}\beta = \frac{m}{n}\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{n}f(x, y),$$

worin β der Winkel ist, den die im Punkte u, v an eine Integralkurve gelegte Tangente mit der X-Achse bildet, α aber den gleichartigen Winkel bei $m = n$ bedeutet. In diesem letzteren Falle kann man von der Normalform der Integralkurven sprechen. Sind m und n verschieden, so können diese Kurven wesentlich verschiedenes Aussehen haben. Die Funktion $Z = \frac{m}{n}f(x, y) = \operatorname{tg}\beta$ hat man zuerst durch Z-Gleicher, welche auch β-Gleicher[4]) genannt werden können, in der Y-X-Ebene darzustellen. Man zieht dann in einer genügenden Anzahl von Punkten eines jeden dieser Gleicher die Tangentenstücke mit den zugehörigen Winkeln β und legt in diese eine Reihe von Integralkurven.

Zur Konstruktion des logarithmischen Bildes der Funktion $y = F(x, k)$ setzt man

$$u = Mb \log y \quad \text{und} \quad v = Mb \log x,$$

worin Mb »die Länge eines Mantissenbereiches« in Millimetern bedeutet, die ich »eine Manteb«[5]) nenne. Man kann aber die Manteb als Längeneinheit betrachten und dann

$$u = \log y \qquad v = \log x$$

---

[1]) R. Mehmke, Leitfaden zum graphischen Rechnen, Leipzig 1917.

[2]) M. Pirani, Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik, S. 53, Sammlung Göschen, 1919.

[3]) In der kleinen Schrift: »Anleitungen zum praktischen Zahlenrechnen mit Hilfe der Potenzpapiere und der Produktentafel«, welche als Heft 2 der »Grundzüge einer Flächennomographie« bei Fr. Vieweg & Sohn in Braunschweig 1922 erschienen ist, habe ich gezeigt, wie alle die Aufgaben, die Mehmke im ersten Abschnitt seines Leitfadens behandelt hat, unter Hinzunahme der angenäherten Integration sich in sehr einfacher Weise mit Hilfe der Potenzpapiere und der Produktentafel lösen lassen. Ich betrachte dieses Werk als eine Ergänzungsschrift zu Mehmkes Leitfaden für alle diejenigen, die keine oder nur geringe Kenntnis der darstellenden Geometrie haben. Der vorliegende Aufsatz ist der erste Schritt meiner Bestrebungen, auch die Differentialgleichungen in dieser Weise zu behandeln.

[4]) Vergl. Mehmke, Leitfaden S. 118. Die dort erwähnten Worte wie Isoklinen, Isogonen, sowie das vielfach verwendete Wort »Isoplethen« läßt sich recht gut durch »der Gleicher« ersetzen. Das von anderer Seite in der Met. Zeitschrift vorgeschlagene Wort »die Gleiche« erscheint mir weniger zweckmäßig.

[5]) Ich erhebe abermals Widerspruch dagegen, daß diese Zahl als Modul bezeichnet wird. In der Logarithmenrechnung denkt man bei diesem Wort zuerst an $\log e$. Ferner gibt es so vielerlei Moduln, daß man nicht noch mehr schaffen sollte.

Mantebs schreiben. Dann ist

$$u = \log F_2(v, k) = F_3(v, k)$$

die Gleichung der logarithmischen Bilder der Integralkurven und erhält man weiter

$$Z = \frac{du}{dv} = \operatorname{tg}\gamma = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{y}f(x, y)$$

Die Konstruktion der Integralkurven geschieht dann genau so wie beim numerischen Bild. In unserem Beispiel ist also

$$Z = \operatorname{tg}\gamma = \frac{2\sqrt[2]{y} + 3\sqrt[3]{x}}{4\sqrt[4]{y} + 5\sqrt[5]{x}}\,\frac{x}{y} = \frac{Z_1}{Z_3}Z_2.$$

Der erste Schritt besteht darin, die Gleichung

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} \quad \text{oder} \quad \log Z = \log Z_1 + \log Z_2 - \log Z_3$$

in der XZ-Ebene durch y-Gleicher darzustellen. Das logarithmische Bild der Z-Funktion wird also aus einer Schar von Linien bestehen und es wird längs einer derartigen Linie y einen konstanten Wert haben. Ich habe zur Ableitung dieser Linien nach und nach $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$ und 10 angenommen.

Die numerische Auswertung der Funktionen

$$Z = 2y^{1/2} \qquad Z = 3x^{1/3} \qquad Z = 4y^{1/4} \qquad \text{und} \qquad Z = 5x^{1/5}$$

erfordert die Herstellung einer Rechentafel, Abb. 1. Diese beginnt mit dem Ziehen der Richtlinien für die Potenzen $Z = x^q$ oder y^q.

Die Darstellung der Abb. 1 erfolgte auf dem Potenzpapier mit einer Manteb 250 mm (Marke $375^1/_2$ *L T*). An beiden Seiten des Netzfeldes befinden sich Doppelskalen. Auf der inneren Seite ist die Manteb logarithmisch geteilt (Numerusseite), auf der äußeren

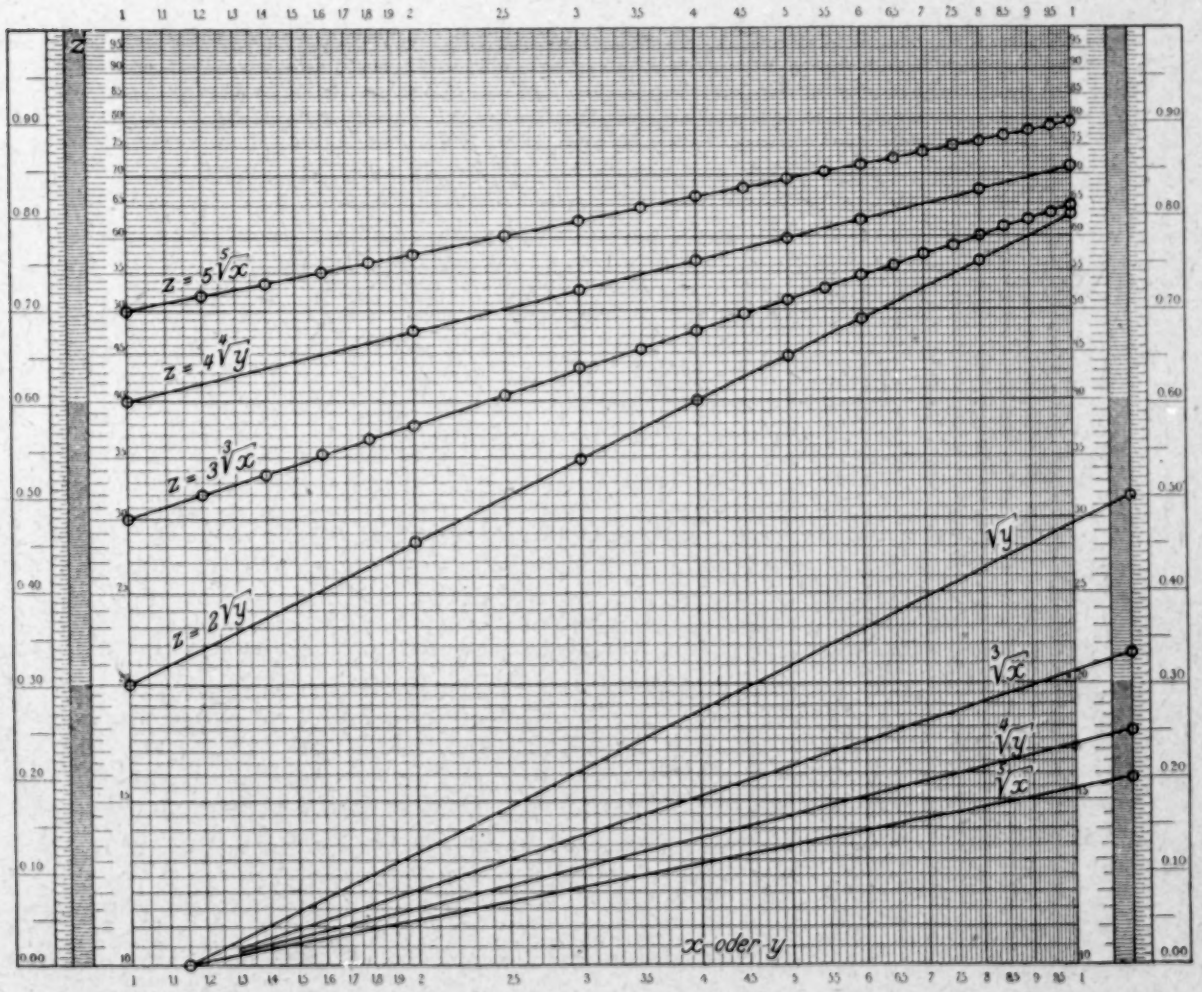


Abb. 1

gleichmäßig (Logarithmusseite). Beide Funktionsskalen zusammen stellen eine graphische Logarithmentafel vor, nach innen findet man den Numerus, nach außen den Logarithmus; die Ablesung ist fast auf 3 Dezimalen sicher. Die Logarithmusseite der Doppelskala rechts läßt die Exponenten q in der Gleichung $Z = x^q$ abgreifen, so lange $q < 1$ ist. Zieht man von einem Punkt im unteren Rand, welcher von der Skala um 1 Manteb absteht, Gerade nach den Punkten $q = {}^1/_2, {}^1/_3, {}^1/_4$ und ${}^1/_5$, so sind diese die Richtlinien der Potenzfunktionen. Ist $q = 1$, so stellt die Diagonale des Feldes die Richtlinie für $Z = x^1$ vor. Ist $q > 1$, so lehrt die Formel $x = Z^{1/q}$, daß man an der Logarithmusseite der Doppelskala $1 : q$ abzugreifen und am oberen Rand von der linken Ecke nach rechts abzutragen und dann eine Gerade von diesem Punkt nach der linken unteren Ecke des Feldes zu ziehen hat. Diese Erläuterungen werden für die Leser dieser Zeitschrift genügen. Es ist nur noch zu erwähnen, daß aus $Z = x^q$ $\frac{du}{dv} = q = \operatorname{tg}\gamma$ folgt.

Zieht man durch den mit $Z = 2$ bezifferten Punkt der Ordinatenachse eine Parallele zur Richtlinie $\sqrt{y}$, so stellt diese Gerade das logarithmische Bild der Funktion $Z = 2\sqrt{y}$ vor. Auf gleiche Weise erhält man die logarithmischen Bilder der 3 anderen Z-Funktionen.

Wenn man dann in Abb. 1 die Koordinaten der durch Kreise bezeichneten Punkte abliest, so kann man auf leicht ersichtliche Weise die Koordinaten der Funktionen

$$Z_1 = 2\sqrt{y} + 3\sqrt[3]{x} \quad \text{und} \quad Z_3 = 4\sqrt[4]{y} + 5\sqrt[2]{x}$$

ableiten. Das Ergebnis dieser Rechnungen wurde in der nachstehenden Zahlentafel zusammengestellt. Die Zahlen sind die Koordinaten der y-Gleicher dieser Funktionen Z_1 und Z_2, wobei angenommen wurde, daß die Wahl $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$ und 10 ausreichen würde.

$y =$	1		2		3		4		5		6		8		10	
x	Z_1	Z_3	Z_1	Z_3	Z_1	Z_3	Z_1	Z_3	Z_1	Z_3	Z_1	Z_3	Z_1	Z_3	Z_1	Z_3
1,0	5,00	9,00	5,82	9,77	6,48	10,27	6,99	10,67	7,47	11,00	7,90	11,28	8 66	11,74	9,32	12,11
1,2	5,20	9,19	6,02	9,96	6,68	10,46	7,19	10,86	7,67	11,19	8,10	11,47	8,86	11,93	9,52	12,30
1,4	5,37	9,35	6,19	10,12	6,85	10,62	7,36	11,02	7,84	11,35	8,27	11,63	9,03	12,09	9,69	12,46
1,6	5,51	9,50	6,33	10,27	6,99	10,77	7,50	11,17	7,98	11,50	8,41	11,78	9,17	12,24	9,83	12,61
1,8	5,67	9,64	6,49	10,41	7,15	10,91	7,66	11,31	8,14	11,64	8,57	11,92	9,33	12,38	9,99	12,75
2,0	5,79	9.77	6,61	10,54	7 27	11,04	7.78	11.44	8,26	11,77	8,69	12,05	9,45	12,51	10.11	12,88
2,5	6,06	10,00	6,88	10,77	7,54	11,27	8,05	11,67	8,53	12,00	8,96	12,28	9,72	12,74	10,38	13,11
3,0	6,33	10,25	7,15	11,02	7,81	11,52	8,32	11,92	8,80	12,25	9,23	12,53	9,99	12,99	10,65	13,36
3.5	6,53	10,44	7,35	11,21	8,01	11,71	8,52	12,11	9,00	12,44	9,43	12,72	10,19	13,18	10,85	13,55
4,0	6,77	10,61	7,59	11,38	8,25	11,88	8,76	12,28	9,24	12,61	9,67	12,89	10,43	13,35	11,09	13,72
4,5	6,95	10,79	7,77	11,56	8,43	12,06	8,94	12,46	9,42	12,79	9.85	13,07	10,61	13,53	11,27	13.90
5,0	7,11	10,92	7,93	11,69	8,59	12,19	9,10	12,59	9,58	12,92	10,01	13,20	10,77	13,66	11,43	14,03
5,5	7,30	11,04	8,12	11,81	8,78	12,31	9,29	12,71	9,77	13,04	10,20	13,32	10,96	13,78	11,62	14,15
6,0	7,44	11,18	8,26	11,95	8,92	12,45	9,43	12,85	9,91	13,18	10,34	13,46	11,10	13,92	11,76	14,29
6,5	7,60	11,29	8,42	12,06	9,08	12,56	9,59	12,96	10,07	13,29	10,50	13,57	11,26	14,03	11,92	14,40
7,0	7,73	11,40	8,55	12,17	9,21	12,67	9,72	13,07	10,20	13,40	10,63	13,68	11,39	14,14	12,05	14.51
7,5	7,88	11 50	8,70	12,27	9,36	12,77	9,87	13,17	10,35	13,50	10,78	13,78	11,54	14,24	12,20	14,61
8,0	8,00	11,60	8,82	12 37	9,48	12 87	9,99	13,27	10,47	13,60	10,90	13,88	11,66	14,34	12,32	14,71
8,5	8,13	11,69	8,95	12,46	9,61	12,96	10,12	13,36	10,60	13,69	11,03	13,97	11,79	14,43	12,45	14,80
9,0	8,27	11,78	9,09	12,55	9,75	13,05	10,26	13,45	10,74	13,78	11,17	14 06	11,93	14,52	12,59	14,89
9,5	8,38	11,87	9,20	12 64	9,86	13,14	10,37	13,54	10,85	13,87	11,28	14,15	12,04	14,61	12,70	14,98
10,0	8,48	11,96	9,30	12,73	9,96	13,23	10,47	13,63	10,95	13,96	11,38	14,24	12,14	14,70	12,80	15,07

Die Konstruktion des y-Gleichers für $y = 5$ wurde in Abb. 2 dargestellt. Die Gleichung des logarithmischen Bildes desselben ist $u = \log Z = \log Z_1 + \log Z_2 - \log Z_3 = u_1 + u_2 - u_3$. Das ganze Verfahren ist außerordentlich einfach, wenn man Potenzpapiere verwendet, welche mehrere Mantissenfelder enthalten. Hier wurde aber die ganze Darstellung in nur einem Feld vorgenommen.

Ich nehme an, daß die Koordinaten in Abb. 2 $u = \log Z$ und $v = \log x$ für Z und x zwischen 1,00 bis 10,00 liegen und bezeichne diese mit ζ und ξ. Dann wird man $Z = 10^{\varrho}\zeta$ und $x = 10^{\sigma}\xi$ schreiben können, worin ϱ und σ ganze, positive oder negative Exponenten bedeuten.

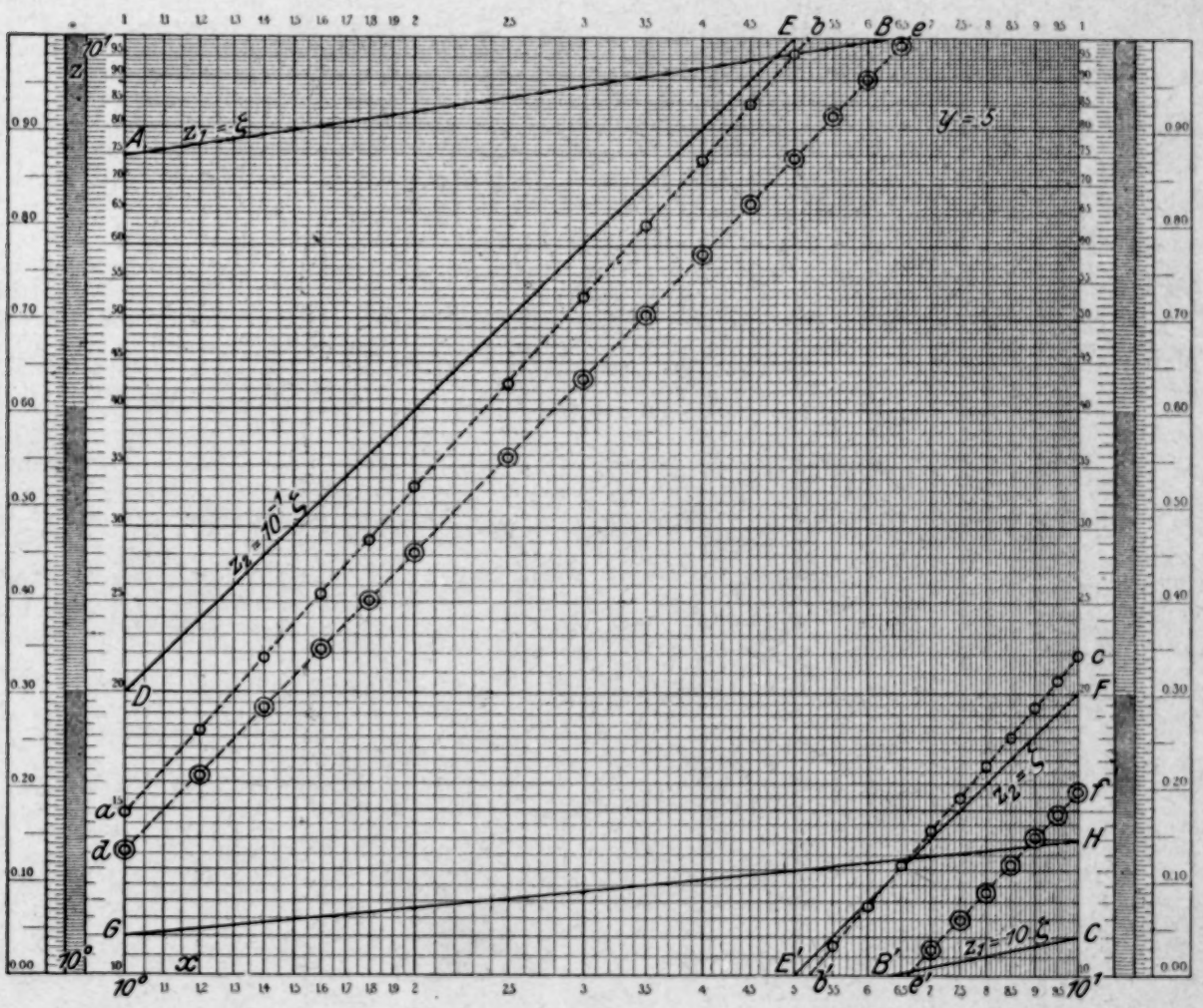


Abb. 2

Die Kurve ABC ist das log. Bild der Funktion Z_1. Aus der Zahlentafel ersieht man, daß die Z_1-Werte für $y = 5$ zwischen 7,47 und 10,95 liegen. Bei $x = 6{,}25$ wird $Z_1 = 10$, die Kurve tritt in das darüber liegende Feld. Die Fortsetzung $B'C$ wurde eine Mantob tiefer gelegt; es wird dann aber $Z_1 = 10^1 \zeta$. Die Funktion $Z_2 = x : y = 0{,}2\,x$ stellt die unter 45^0 gegen beide Achsen geneigte Gerade DEF dar. Auch diese besteht aus zwei Teilen; es ist in der Strecke DE $Z = 10^{-1}\zeta$, in der Strecke $E'F$ aber $Z = \zeta$.

In der wenig von einer Geraden abweichenden Kurve GH, welche die Funktion Z_3 darstellt, ist $Z = 10\,\zeta$, da deren Z-Werte nach der Zahlentafel zwischen 11,00 und 13,96 liegen. Die graphische Addition der Ordinaten u_1 und u_2 ergibt die durch einfache Kreise bezeichneten Punkte in der Kurve abc. Auch diese besteht aus zwei Zweigen. In der Strecke ab ist $Z = \zeta$, in der Strecke $b'c$ ist aber $Z = 10\,\zeta$.

Durch graphische Subtraktion der u_3 Ordinaten wurde die Z-Kurve def erhalten; die durch die Konstruktion gefundenen Werte in derselben sind durch Doppelkreise kenntlich gemacht worden. In der Strecke de ist $Z = 10^{-1}\zeta$, in $e'f$ aber $Z = \zeta$.

In meiner kürzlich erschienenen Flächennomographie [1]) habe ich die Konstruktion der logarithmischen Bilder von Funktionen der Form

$$y = (\alpha + \beta f_1(x))^p (\beta + \gamma f_2(x))^q (\delta + \varepsilon f_3(x))^r \ldots .$$

eingehend durch mehrere Beispiele behandelt. Ich habe dabei Wert auf die Darstellung in möglichst wenigen Mantissenfeldern gelegt und auf die Kunstgriffe hingewiesen, die man anwenden kann, wobei ich hier besonders auf die Abb. 8, 9, 10, 11 und 17 aufmerksam mache. Noch ausführlicher werden alle diese Funktionsdarstellungen in den unter [3]) bereits erwähnten Anleitungen, die mehr den Charakter eines Lehrbuches haben, behandelt.

[1]) Paul Schreiber: »Grundzüge einer Flächennomographie gegründet auf graphische Darstellungen in Funktionspapieren mit gleichmäßiger und logarithmischer Teilung. Mit 19 Abbildungen. Braunschweig, 1921.

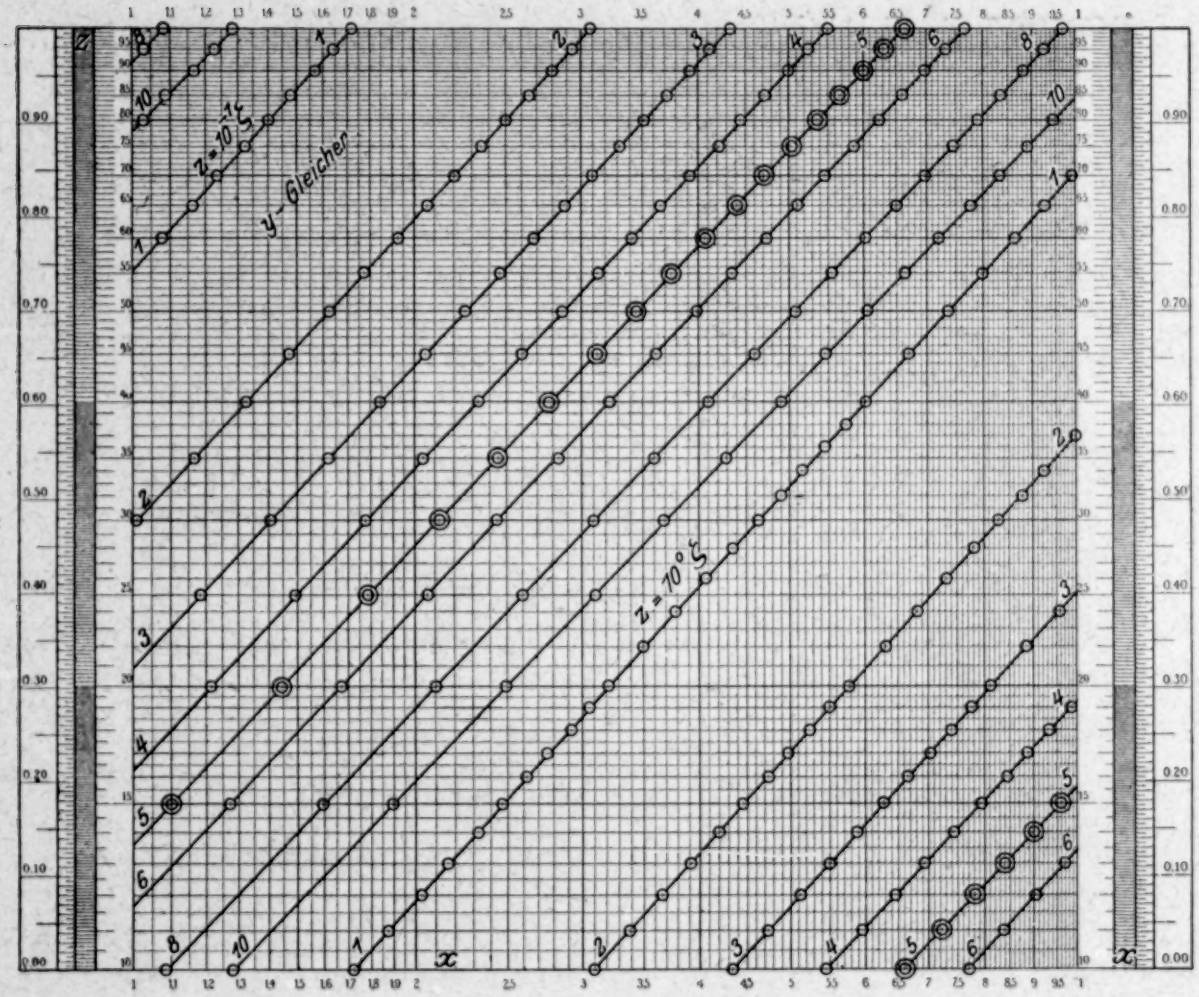


Abb. 3

Der y-Gleicher für $y = 5$, welcher so in Abb. 2 abgeleitet worden war, wurde nun auf ein anderes Feld in Abb. 3 übertragen, wie dies in dieser aus der Linie mit den Doppelkreisen zu ersehen ist.

Auf gleiche Weise wurden die y-Gleicher für die anderen angenommenen y-Werte konstruiert und in Abb. 3 eingetragen.

Man ersieht aus Abb. 2 übrigens, daß die wenigen Linien nach dem Uebertrag in Abb. 3 weggewischt werden können, also dasselbe Blatt mehrmals Verwendung finden kann.

Die Abb. 3 ist das logarithmische Bild der Funktion

$$Z = \frac{2\sqrt{y} + 3\sqrt[3]{x}}{4\sqrt[4]{y} + 5\sqrt[2]{x}} \cdot \frac{x}{y}$$

dargestellt durch y-Gleicher.

Bei den zwei Linien links oben für $y = 8$ und 10 ist $Z = 10^{-2}\zeta$, in der mittleren Schar $Z = 10^{-1}\zeta$ und der Schar rechts unten $Z = 10^{0}\zeta$.

Die Konstruktion der Integralkurven erfordert aber die Darstellung derselben Funktion durch Z-Gleicher, die man auch, da $Z = \operatorname{tg}\gamma$ ist, γ-Gleicher nennen kann.

Der zweite Schritt besteht also in der Konstruktion der γ-Gleicher; hierzu wurden die Koordinaten der in Abb. 3 durch Ringe kenntlich gemachten Schnitte der y-Gleicher mit bestimmt angenommenen Werten von Z abgelesen und in Abb. 4 eingetragen. In dieser sind die Ordinaten $u = \log y$ und $v = \log x$. Man sieht, daß die längs der Ordinate $y = 5$ in Abb. 4 eingetragenen Doppelkreise dieselben Abszissen haben, als die Doppelkreise längs des $y = 5$-Gleichers in Abb. 3. Diese Z Gleicher oder γ-Gleicher weichen so wenig von geraden Linien ab, daß die an manchen Stellen nötigen Extrapolationen genügend genau durch Verlängerung der Geraden vorgenommen werden konnten. Die Linienschar in Abb. 4 bezieht sich auf die Werte $\operatorname{tg}\gamma = 0{,}1$ bis $\operatorname{tg}\gamma = 7{,}0$.

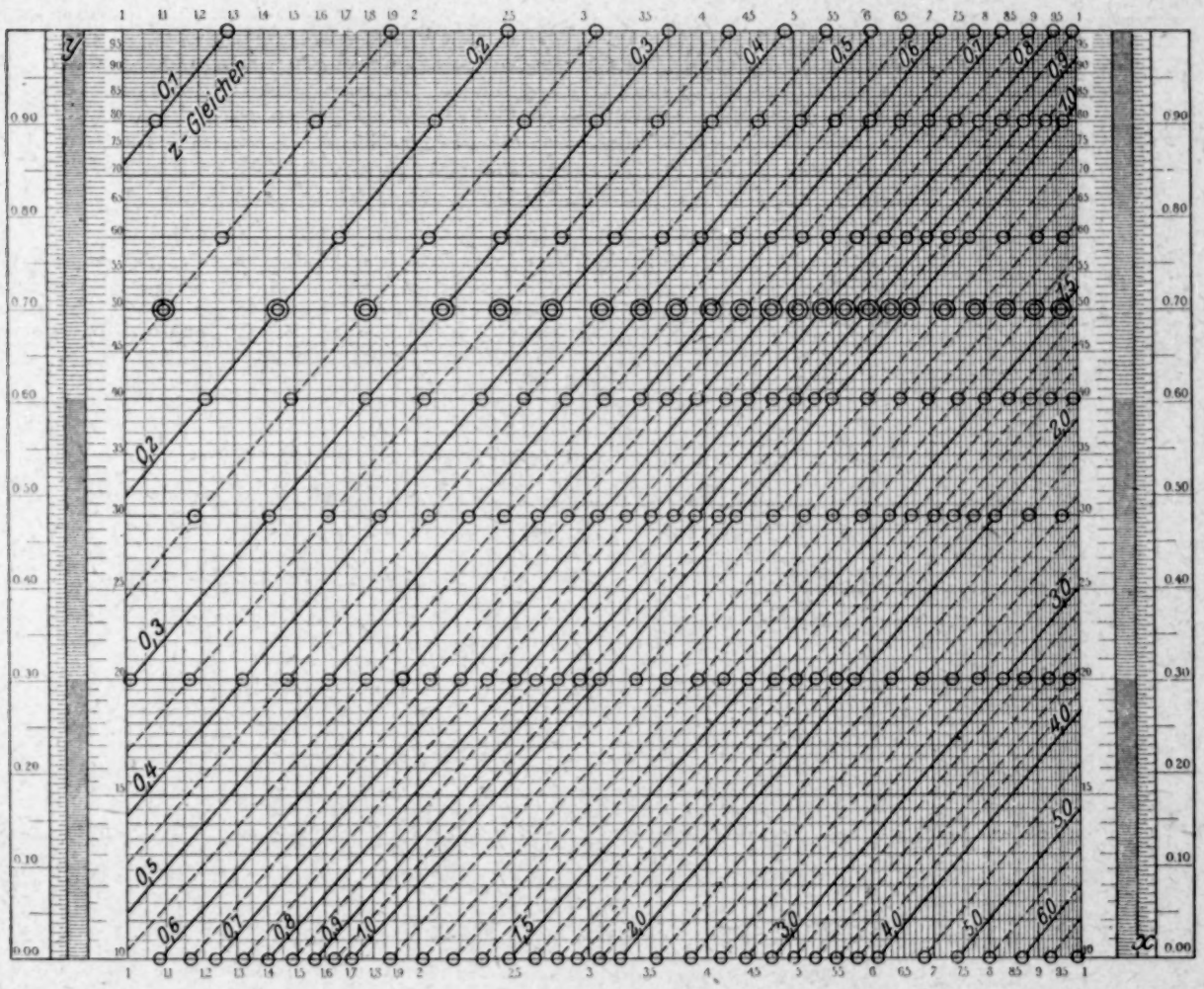


Abb. 4

Nunmehr konnten in Abb. 5 die Winkel γ eingezeichnet und danach die Integralkurven konstruiert werden.

Für $x = 1$ ergibt Abb. 3

$y =$	1	2	3	4	6	8
$q = \operatorname{tg}\gamma =$	0,554	0,297	0,207	0,163	0,117	0,092

Diese Werte wurden an der Logarithmusseite der rechten Randskala abgestochen und durch die 6 Ringe längs der Grenzlinie zwischen beiden Skalen angedeutet. So erhält man die Richtungslinien für x^q wie in Abb. 1 und durch Parallele zu diesen durch die Punkte $y = 1, 2, 3, 4, 6$ und 8 in der Ordinatenachse die Richtungen der Tangenten an die Integralkurven.

Für $x = 10$ bekommt man aber aus Abb. 3

$y =$	1	2	3	4	6	8
$q = \operatorname{tg}\gamma =$	7,09	3,70	2,51	1,93	1,34	1,03
$\frac{1}{q} = \operatorname{cotg}\gamma =$	0,141	0,270	0,398	0,518	0,746	0,971

Die Längen $\operatorname{cotg}\gamma$ wurden an der linken Randskala durch Doppelringe angegeben, trägt man sie am oberen Rand von links nach rechts ab, so erhält man die Richtlinien für die Tangenten an die Integralkurven, welche am rechten Rand durch die Punkte $y = 1, 2, 3, 4, 6$ und 8 gehen.

In das Feld wurden nur die γ-Gleicher für $\gamma = 0{,}10,\ 0{,}15,\ 0{,}20,\ 0{,}25,\ 0{,}3,\ 0{,}4,\ 0{,}5,\ 0{,}6,\ 0{,}7,\ 0{,}8,\ 0{,}9,\ 1{,}0$ und $1{,}1$ eingetragen, da diese auszureichen schienen.

In jedem Gleicher wurden soviel Tangentenstücke mit den betreffenden γ-Winkeln ebenso gezogen, wie die Richtlinien in Abb. 1. Die q-Längen sind durch Ringe in der rechten Doppelskala der Abb. 5 kenntlich gemacht worden.

Die Gleicher selbst waren nur durch Bleistift angegeben worden, sie wurden nach dem Einzeichnen der Tangentenstücke weggewischt.

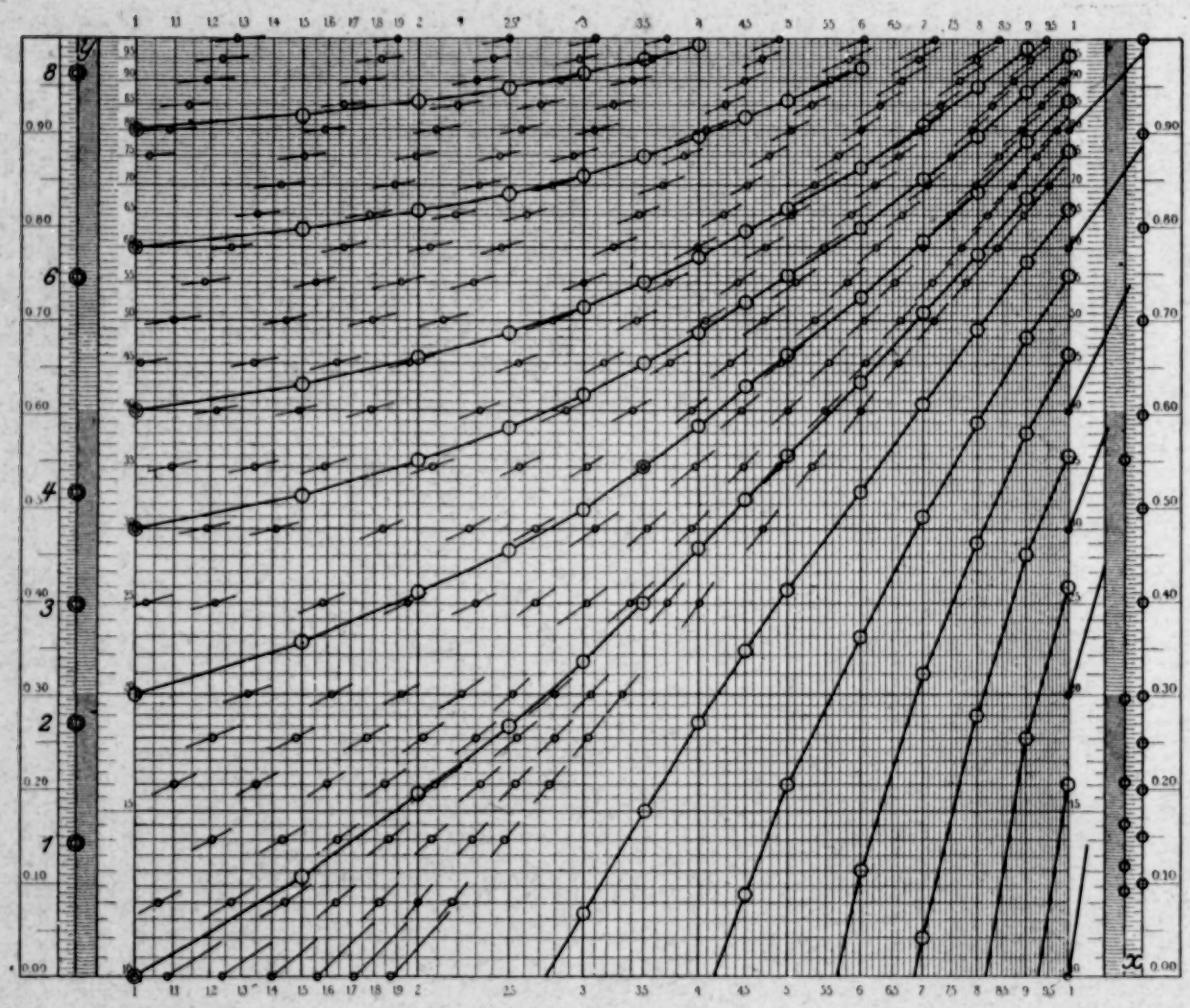


Abb. 5

Es wurde nun die von $x = y = 1$ ausgehende Integralkurve konstruiert und konnte an dieser abgelesen werden

$x =$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
$y =$	1,00	1,28	1,56	1,85	2,17	2,50	2,86	3,22	3,60	4,30	5,10	5,90	6,80	7,60

Durch Addition von 1, 2, 3, 5 und 7 zu diesen y-Werten erhält man die Koordinaten der von den Punkten $y = 2$, 3, 4, 6 und 8 der Ordinatenachse ausgehenden Integralkurven. Die Einzeichnung derselben in das System der Tangentenstücke ergab befriedigende Anpassung der Integralkurven an die Tangenten. Man kann dieses Verfahren fortsetzen und würde dadurch die Integralkurven in den darüberliegenden Mantissenfeldern erhalten. Es wurden aber auch an den Ordinaten y der konstruierten Integralkurve die Konstanten -1, -2 bis -6 angebracht, wodurch die rechts unten liegenden Kurven erhalten wurden. Die Fortsetzung dieser Kurven nach dem negativen Gebiet der y hin stößt in den logarithmischen Bildern aber auf Schwierigkeiten, da zwischen $y = +1$ bis $y = -1$ unendlich viel Mantissenfelder eingeschaltet werden müssen. Ueber alle diese Fragen wird das unter [3]) erwähnte Werk eingehende Auskunft geben.

Zusatz. Wenn die Differentialgleichung in der allgemeinen Form $0 = f(x, y, y')$ gegeben ist, so kann man

$$y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{du}{dv}\frac{y}{x} = \frac{y}{x} \operatorname{tg} \gamma = \frac{y}{x} Z$$

einführen und erhält dann eine andere Form $0 = F(x, y, Z)$.

γ ist der Winkel, den eine an das logarithmische Bild einer Integralkurve im Punkte u, v gelegte Tangente mit der X-Achse bildet. Man hat nun zu versuchen, die F-Funktion durch x-, y- oder Z-Gleicher darzustellen. Im letzteren Fall kann man in passend gewählten Stellen, wie in Abb. 5, die Richtungen der Tangenten einzeichnen und danach die Integralkurven konstruieren. In den anderen Fällen erhält man loga-

rithmische Bilder wie in Abb. 3 und muß daraus, wie in Abb. 4, die Darstellung durch Z-Gleicher ableiten.

Von besonderer Wichtigkeit ist der einfachste Fall $y' = f(x)$, aus dem man $y = \int f(x)\,dx + C$ in sehr vielen Fällen analytisch herleiten kann, aber sehr oft sehr unhandliche Formeln für die Integralkurven erhält. Man erhält aber auch

$$Z = \operatorname{tg}\gamma = \frac{x\,f(x)}{y} \quad \text{oder} \quad y = x\,f(x)\,Z^{-1}$$

und kann dann das logarithmische Bild der Funktion $y = x\,f(x)$ für $Z = 1$ konstruieren. Die logarithmischen Bilder für andere Werte von Z erhält man durch Parallelverschiebung dieser Kurve. Das ergibt also die Darstellung der Funktion $y = x\,f(x)\,Z^{-1}$ durch Z-Gleicher. Es lassen sich dann in diesem logarithmischen Bild die Tangenten einzeichnen und nach diesen die Integralkurven konstruieren.

In den beiden erwähnten Heften der Flächennomographie habe ich die Darstellung der folgenden Formen, welche $x\,(f)\,x$ annehmen können, gelehrt. Als einfachste Form erscheint

$$y = [a x^q + b x^r + c x^s + \ldots]^p,$$

in der die Vorzahlen, wie Exponenten alle beliebigen Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen können. Liegen mehrere derartiger Funktionen vor, so lassen sich daraus auch

$$y = \pm y_1 \pm y_2 \pm y_3 \pm \ldots \quad \text{und} \quad y = y_1\,y_2\,y_3$$

rein graphisch konstruieren.

Treten Exponentialfunktionen auf, so wird man oft die Einfach Logarithmenpapiere oder Exponentialpapiere mit Vorteil verwenden können. Diese sind zur Darstellung der Funktionen $\log y = f(x)$ bestimmt, als gerade Linien erscheinen in ihnen die Funktionen $y = a e^{\varrho x}$. Die Bilder der $f(x)$ in diesen Papieren wird man als halblogarithmische zu bezeichnen haben, es wird stets möglich sein, aus ihnen ganz logarithmische Bilder abzuleiten.

Potenz- und Exponentialpapiere hat die Firma Carl Schleicher & Schüll in Düren (Rheinland) in verschiedenen Ausführungen vorrätig, wie man aus deren »Verzeichnis der Liniennetzpapiere« ersehen kann. Für die graphische Integration ist besonders wichtig, daß die Potenzpapiere auch auf Pauspapier gedruckt erhalten werden können. Diese Firma bearbeitet jetzt auch nach meinen Angaben einen Satz von Potenzpapieren, in denen die trigonometrischen Funktionen in Anwendung kommen; ein Verzeichnis derselben kann erst nach der Fertigstellung herausgegeben werden. Das gibt den Logarithmenpapieren eine ungeahnte Verwendungsmöglichkeit, sie werden wohl das wichtigste Hilfsmittel bei der Zahlenrechnung sein. 119

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Der Segelflug und die Rhön-Segelflug-Wettbewerbe.

Von **W. HOFF** in Berlin-Adlershof.

Otto Lilienthal war es, der zum erstenmal die Grundlehren des Fliegens aufgedeckt und in wissenschaftlich faßbare Gestalt gebracht hat. Leider wurde seine Forschertätigkeit durch seinen todbringenden Absturz am 9. August 1896 jäh abgebrochen. Die deutsche Wissenschaft hatte im vergangenen Jahr Gelegenheit, anläßlich der 25. Wiederkehr des Todestages ihres bahnbrechenden Forschers ehrend zu gedenken.

Das Ausland hat die Arbeiten Lilienthals aufgegriffen und gefördert. Es vergingen viele Jahre, ehe sie in Deutschland wiederum Fuß faßten. Wir wollen hier die Arbeiten auf dem Gebiete des Motorflugwesens aus der Betrachtung lassen und uns nur mit dem motorlosen Fliegen beschäftigen, das in den letzten beiden Jahren durch die

Rhön-Wettbewerbe wiederum[1]) an Wichtigkeit gewonnen hat und dem wir auf Grund der Ergebnisse dieser Wettbewerbe gute Zukunft voraussagen dürfen.

Der erste Gleit- und Segelflugwettbewerb, der 1920 in der Rhön veranstaltet wurde, hat schon schöne Leistungen gezeitigt. Klemperer, der einen in vielen Einzelheiten neuartigen Eindecker geflogen hatte, wurde erster Sieger mit den Höchstleistungen: 1830 m Flugstrecke und 142,6 Sekunden Flugdauer. Im vergangenen Jahre wurden diese Leistungen beim zweiten Rhön-Segelflug-Wettbewerb sowie durch unmittelbar nach dessen Abschluß vollführte Flüge bedeutend überboten. Am Schlusse dieses Aufsatzes wird hiervon kurz berichtet werden.

Im folgenden wird im Anschluß an die bisherigen Veröffentlichungen dargelegt, welche physikalischen Gesetze dem Segelflug zugrunde liegen, und es wird ihre bisherige Anwendung insbesondere bei den Rhön-Wettbewerben erläutert.

Als Segelflug ist jeder Flug zu verstehen, der die zum Schweben notwendige Leistung nicht durch mitgeführte Kraftmaschinen erzeugt, sondern den Energiequellen des Windes, in dem der Flug ausgeführt wird, entnimmt. Nach v. Kármán[2]) können wir den »statischen« Segelflug bei aufsteigenden Luftströmungen, in denen das Flugzeug sich dauernd im Gleitflug befindet, und den »dynamischen« Segelflug, bei dem das Flugzeug bei im Mittelwert wagerechter Windrichtung fliegt, unterscheiden.

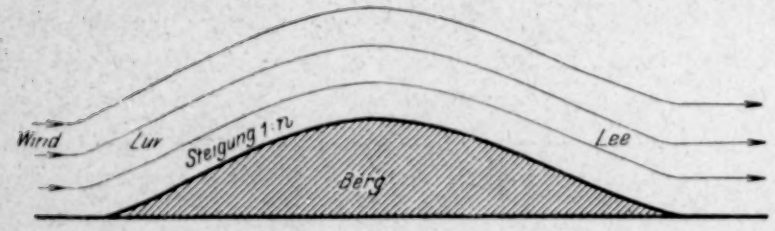


Abb. 1

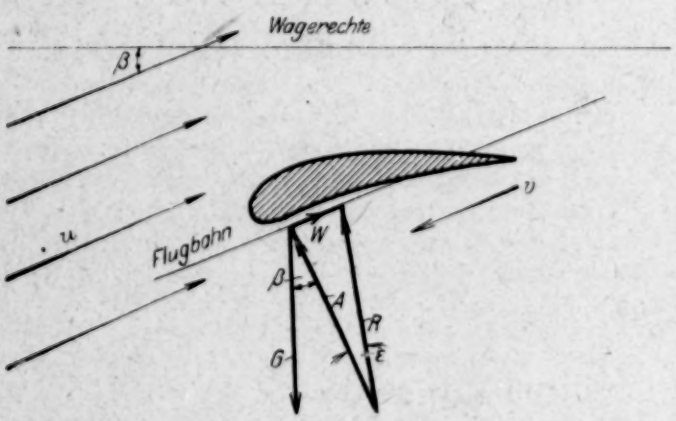


Abb. 2

1. Der statische Segelflug. Der statische Segelflug ist bei weitem der häufigere. Die bisherigen Haupterfolge sind ihm zuzuschreiben. Er ist überall möglich, wo aufsteigende Winde entstehen. Die Naturbeobachtung läßt erkennen, daß dies namentlich in Gebirgen der Fall ist, vielleicht auch an ansteigenden Küsten. Wir werden auf der Luvseite der Anhöhen aufsteigende, auf der Leeseite aber absteigende Luftströmungen vorfinden, Abb. 1. Die Meteorologie wird dem praktischen Flieger Gegenden für seine Flüge erschließen können, wo er mit Regelmäßigkeit genügend starke Steigwinde vorfinden wird.

Der Flugvorgang des statischen Segelfluges[3]) ist, von kleinen, durch den Luftschraubenstrahl hervorgerufenen Abweichungen abgesehen, vollkommen mit dem Flugvorgang des Motorfluges gleichbedeutend.

Unter Zugrundelegung der bekannten Gleichgewichtsbedingungen

$$A = c_a q F, \qquad W = c_w q F, \qquad L = W v,$$

worin bedeuten (vergl. Abb. 2):

---

[1]) Darmstädter Primaner fanden vor zehn Jahren in Mitteldeutschland die kahlen Kuppen der Rhön als besonders geeignet für Gleitflüge, die die Vorschule für das Segelfliegen sind. Eine begeisterte Schar ließ sich 1912 auf der Wasserkuppe, der höchsten Erhebung in der Rhön, nieder. Die Anfangsgründe ihrer Kunst hatten die jungen Leute August Euler in Frankfurt a. M. abgeschaut. Der junge Gutermuth führte 1912 eine Höchstleistung aus, indem er 838 m in 112 Sekunden bei leichtem Gegenwind zurücklegte. Er und seine Kameraden Landmann, Ernst und Eugen von Lößl sind später bekannte, erfolgreiche Flieger geworden. Gutermuth und Ernst v. Lößl fielen im Weltkrieg. Eugen v. Lößl ließ am 24. Jahrestag (1920) des Absturzes Lilienthals am Westabhang der Wasserkuppe infolge Bruchschadens seines Flugzeuges während eines schönen Fluges sein Leben.

[2]) Th. v. Kármán, Mechanische Modelle zum Segelflug. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1921, S. 220.

[3]) Vergl. auch L. Prandtl, Bemerkungen über den Segelflug. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1921, S. 209.

F (m^2) Flügelfläche,
G (kg) Flugzeuggewicht,
A (kg) Flugzeugauftrieb senkrecht zur Windströmung,
W (kg) Flugzeugwiderstand, parallel zur Windströmung,
R (kg) Luftkraftresultante,
L (kg m s^{-1}) Flugleistung,
v (m s^{-1}) Fluggeschwindigkeit,
c_a Auftriebsbeiwert
c_w Widerstandsbeiwert } vom Anstellwinkel α abhängig,
c_r Beiwert der Resultante
$q = \frac{\gamma}{2g} v^2$ (kg m^{-2}) Staudruck,
γ (kg m^{-3}) Luftdichte,
g (m s^{-2}) Erdbeschleunigung,

werden bei einem Wind, der mit einem Winkel β gegen die Wagerechte gerichtet ist, ermittelt:

$$v = \sqrt{\frac{A}{c_a \frac{\gamma}{2g} F}} = \sqrt[3]{\frac{L}{c_w \frac{\gamma}{2g} F}}; \qquad L = \sqrt{\frac{c_w^2}{c_a^3} \frac{A^3}{\frac{\gamma}{2g} F}}.$$

Beim unbeschleunigten statischen Segelflug muß die Luftkraftresultierende R mit der Richtung der Schwerkraft zusammenfallen. Es werden dann

$$\frac{A}{G} = \frac{c_a}{c_r}; \quad \beta = \varepsilon \quad \text{und} \quad L = \sqrt{\frac{c_w^2}{c_r^3} \frac{G^3}{\frac{\gamma}{2g} F}}.$$

Die vom Flugzeug aufgenommene Windleistung ist aber dann

$$L = G v \sin \varepsilon.$$

Hiermit wird die Steiggeschwindigkeit des Windes, welche das Flugzeug in unbeschleunigtem wagerechtem Fluge erhält:

$$v \sin \varepsilon = \sqrt{\frac{c_w^2}{c_r^3} \frac{2g}{\gamma} \frac{G}{F}} = w.$$

Diese Steiggeschwindigkeit w (m s^{-1}) entspricht der Sinkgeschwindigkeit des Flugzeuges. Sie wird um so kleiner, je größer der (mit weniger als 1 vH Fehler) $\frac{c_r^3}{c_w^2}$ gleichzusetzende Wert $\frac{c_a^3}{c_w^2}$ wird. Man erhält daher

$$w_{\min} = \sqrt{\left(\frac{1}{\frac{c_a^3}{c_w^2}}\right)_{\max} \frac{2g}{\gamma} \frac{G}{F}}.$$

Werden ein $1 : n$ ansteigender Hang und mit der Hangfläche parallele Windströmung angenommen, so muß die Windgeschwindigkeit u (m s^{-1}) den Wert $\sqrt{(1+n^2)}\, w_{\min}$ überschreiten, um statischen Segelflug zu ermöglichen.

In der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen wurden für den 1921 siegreichen Eindecker der Akademischen Fliegergruppe Hannover folgende Werte[1]) ermittelt:

Bei $\left(\frac{c_a^3}{c_w^2}\right)_{\max} = 300$ sind $c_a = 1{,}35$ und $\frac{c_w}{c_a} = \frac{1}{15}$. Für $c_{a\max} = 1{,}65$ ist $\frac{c_w}{c_a} = \frac{1}{10}$.

Die Flächenbelastung dieses Eindeckers war $\frac{G}{F} = 11$ kg m^{-2}. In einer Massenluftdichte $\frac{\gamma}{g} = \frac{1}{8}$ kg m^{-4} s^2 hat das Flugzeug eine kleinste Sinkgeschwindigkeit

$$w_{\min} = \sqrt{\frac{1}{300} \cdot 16 \cdot 11} = 0{,}77 \text{ m } s^{-1}.$$

[1]) W. Blume, Das Segelflugzeug der Akademischen Fliegergruppe der Technischen Hochschule Hannover. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1921, S. 313.

Hierbei hat das Flugzeug eine Geschwindigkeit, wenn — was mit ganz unbedeutendem Fehler geschehen kann — $G = A$ gesetzt wird:

$$v = \sqrt{\frac{1}{c_a}\frac{2g}{\gamma}\frac{G}{F}} = \sqrt{\frac{1}{1{,}35}\cdot 16\cdot 11} = 11{,}4\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Die kleinste, hiervon nicht sehr verschiedene Geschwindigkeit wird bei $c_{a\,\max} = 1{,}65$ erreicht:

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{1}{c_{a\,\max}}\frac{2g}{\gamma}\frac{G}{F}} = \sqrt{\frac{1}{1{,}65}\cdot 16\cdot 11} = 10{,}3\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

An einem Abhang von $1 : n = 1 : 6$ Neigung muß sein

$$u > 4{,}7\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Diese Ergebnisse besagen, daß schon bei geringen Steiggeschwindigkeiten des Windes Segelflug möglich ist, daß aber die Fluggeschwindigkeit selbst recht groß ist. Das Flugzeug läuft Gefahr, aus dem Bereich des aufsteigenden Windes herauszukommen.

Das Flugzeug ist im aufsteigenden Wind an keine Richtung gebunden. Es kann mit oder gegen den Wind und beliebige Wendungen fliegen. Allerdings werden die Geschwindigkeiten über Grund damit sehr veränderlich werden. Hier liegen Gefahrenquellen für den Flieger, der bei einer Wendung in ungenügender Höhe vom Mitwind gegen den Hang geworfen werden kann.

Bei einem Gegenwind von etwa $5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ könnte der Hannoversche Eindecker über einem Abhang, wie wir ihn in der Rhön finden, durch eine Anlaufgeschwindigkeit von rd. $6\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ zum statischen Segelflug gebracht werden.

Der natürliche Wind ist nicht gleichmäßig, sondern schwankt in großen Grenzen. Bei einer durchschnittlichen Windstärke von $5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ werden Böen von 6 bis $7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ zu erwarten sein. Es ist üblich, solche zum Abflug zu benutzen.

2. Der „dynamische" Segelflug. Den dynamischen Segelflug betrachten die strenggläubigen Anhänger des Segelflugwesens als denjenigen motorlosen Flug, dem die Hauptforschungsarbeit zugewandt werden soll. Der natürliche Wind ist stark durchwirbelt; die Wirbel sind beträchtliche Energieträger. Gelingt es, die Wirbel durch das Flugzeug zu schlichten und die entnommene Leistung in Flugzeugschwebeleistung umzuformen, dann sind neue Flugmöglichkeiten gegeben, die zur wirtschaftlichen Ausnutzung anreizen. Leider sind wir im dynamischen Segelflugwesen noch sehr weit zurück. Nach dem heutigen Stande der Technik ist auch wenig Aussicht vorhanden, daß hierin bald eine tiefgreifende Aenderung eintritt.

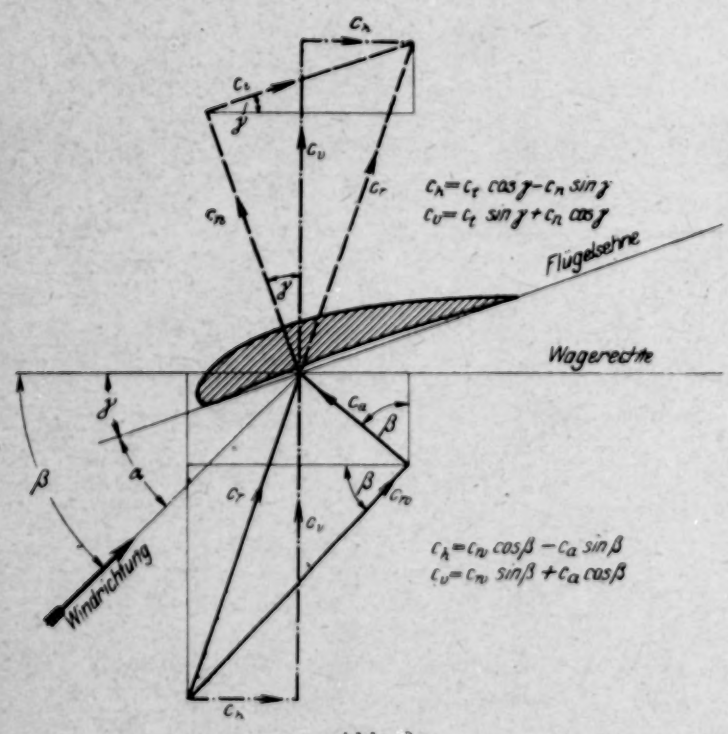


Abb 3

Die ersten brauchbaren Erklärungen über den Segelflug im Wirbelwind stammen von R. Knoller, der sie nach seinen Angaben [1]) schon 1896 an v. Parseval gegeben, zwei Jahre darauf in Wien vorgetragen, aber erst 1909 in »Flug- und Motortechnik« des Oesterreichischen Flugtechnischen Vereins veröffentlicht hat. Unabhängig von ihm hat Albert Betz 1912 einen Beitrag zur Erklärung [2]) des Segelfluges gegeben, der heute, mit besseren aerodynamischen Unterlagen versehen, gute Einblicke ge-

[1]) R. Knoller, Zur Theorie des Segelfluges. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1913, S. 13.

[2]) A. Betz, Ein Beitrag zur Erklärung des Segelfluges. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1912, S. 269.

währt. Zunächst seien die Betzschen Ueberlegungen, die sich in ihren Grundlagen mit den Knollerschen decken, wiedergegeben.

Betz nimmt an, daß die Richtungsänderung des Windes nach einem Sinusgesetz erfolgt

$$\beta = \beta_0 \sin \lambda t,$$

worin β die Neigung des Windes gegen die Wagerechte, β_0 die größte Neigung, t den Zeitwert und λ einen Faktor bedeuten, welcher durch die Dauer T (s) der Periode bestimmt ist zu $\lambda = \frac{2\pi}{T}$.

In Abb. 3 sind der Anstellwinkel α, die Neigung γ der Flügelsehne gegen die Wagerechte und β eingetragen.

Bei veränderlichem β werden Widerstand und Auftrieb wechseln, wodurch auch Fluggeschwindigkeits- und Richtungsänderungen hervorgerufen werden. Die Masse des Flugzeuges ist jedoch in folgenden Betrachtungen so groß angenommen, daß bei einer nicht zu großen Dauer der Windschwankungsperiode diese Schwingungen des Flugzeuges vernachlässigt werden können. Die Fluggeschwindigkeit wird als gleichförmig angenommen. Die auf das Flugzeug wirkenden Luftkräfte wechseln mit der Zeit. Ihr zeitlicher Mittelwert ist in die Rechnung einzusetzen.

Die nachstehende Untersuchung nach Betz, dem die Modellmessungen[1]) des neuzeitlichen Segeleindeckers der Akademischen Fliegergruppe der Technischen Hochschule Hannover zugrunde gelegt sind, ergibt, daß bei genügend großer Schwankung β_0 der Widerstand negativ wird, daß also Vortrieb eintritt.

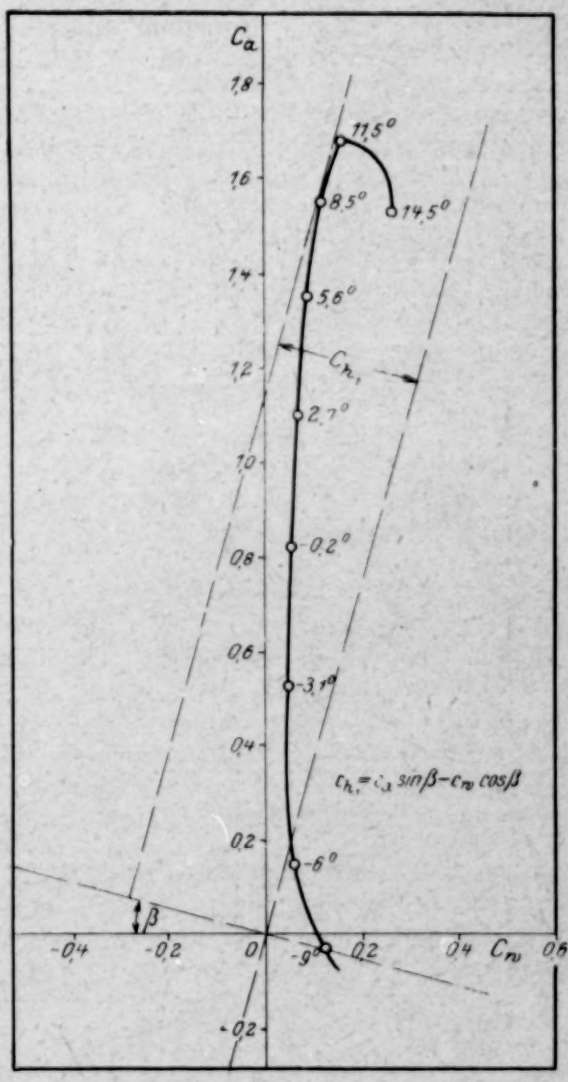


Abb. 4

Der vom Luftkraftsbeiwert c_r herrührende augenblickliche Widerstandsbeiwert c_h in der Wagerechten läßt sich auf zweierlei Weise finden, je nachdem man ihn aus den

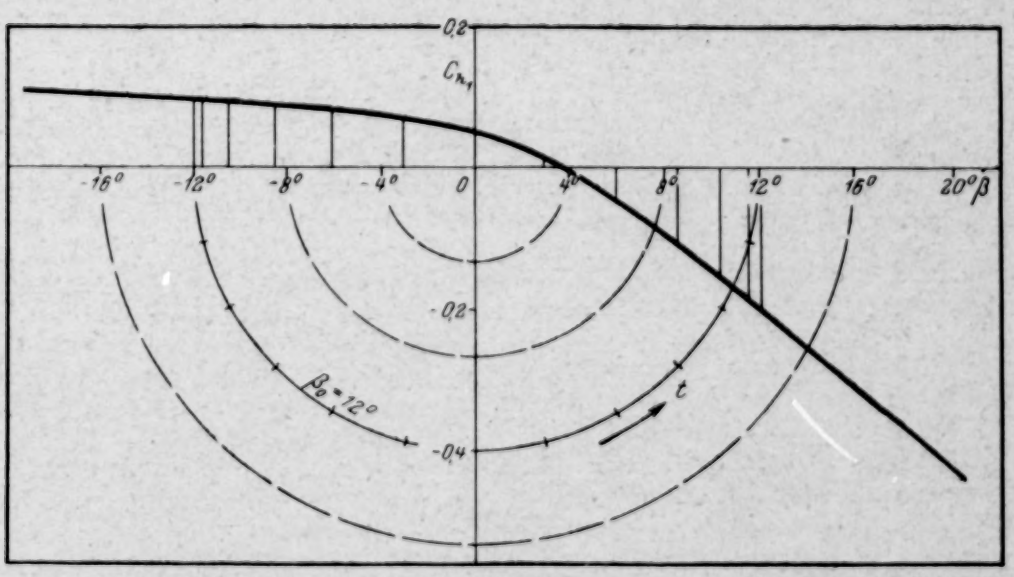


Abb. 5

[1]) Vergl. Anm. 1 auf S. 209.

Komponenten c_w und c_a, parallel und senkrecht zur Flugrichtung oder c_t und c_n, parallel und winkelrecht zur Flügelsehne entstanden denkt (vergl. Abb. 3):
$c_h = c_w \cos\beta - c_a \sin\beta$ oder $c_h = c_t \cos\gamma - c_n \sin\gamma$ bezw. $c_h = c_w \cos(\alpha+\gamma) - c_a \sin(\alpha+\gamma)$, wenn, was meist der Fall ist, für das zu untersuchende Flugzeug die Beiwerte c_n und c_t nicht errechnet sind, aber eine Abhängigkeit von γ erwünscht ist.

Betz unterscheidet grundsätzlich zwei Fälle, den günstigsten, bei welchem das Flugzeug sich stets in die Stellung geringsten Stirnwiderstandes einstellt oder eingesteuert wird, und den einfachsten, wo das Flugzeug einen gleichbleibenden Winkel mit der Wagerechten bildet.

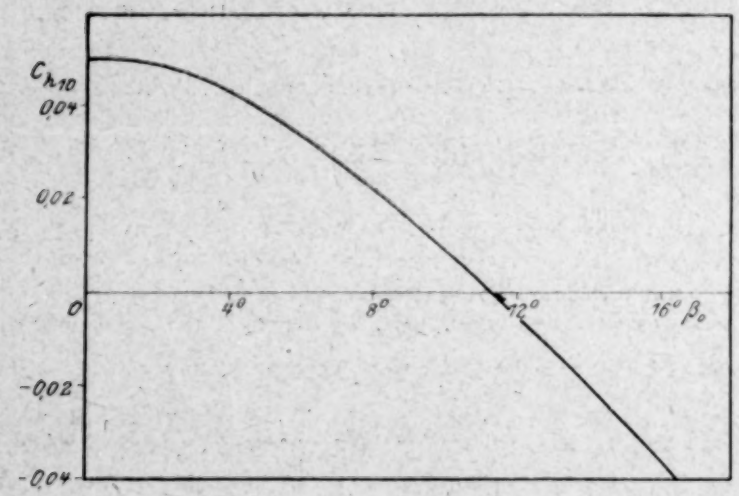


Abb. 6

Er findet den günstigsten Fall aus dem Lilienthalschen Polardiagramm, Abb. 4, durch mehrfache Drehung des Bezugssystems um den jeweiligen Winkel β und Aufsuchen des diesem Winkel entsprechenden kleinsten Widerstandes c_{h1}, da die Drehung des Bezugssystems um den Winkel β für c_{h1} die gleiche Bestimmungsgleichung liefert.

Die auf diese Weise ermittelten wagerechten Widerstandsbeiwerte c_{h1} sind in Abb. 5 abhängig von β eingetragen. Bei größeren positiven β-Werten wird c_{h1} negativ. Von diesen c_{h1}-Werten ist für verschiedene β_0 der zeitliche Mittelwert c_{h10} zu suchen. Da die Windrichtungsänderung nach einem von der Zeit abhängigen Sinusgesetz verläuft, wird dieser Mittelwert durch Eintragen gleicher Zeitabschnitte auf den Umfang eines Kreises, dessen Mittelpunkt auf der Ordinate für $\beta = 0$ liegt und dessen Radius durch β_0 gegeben ist, sowie durch Mittelwertsbildung der über den auf dem Kreisumfang eingetragenen Zeitabschnitten liegenden c_{h1}-Werte gewonnen.

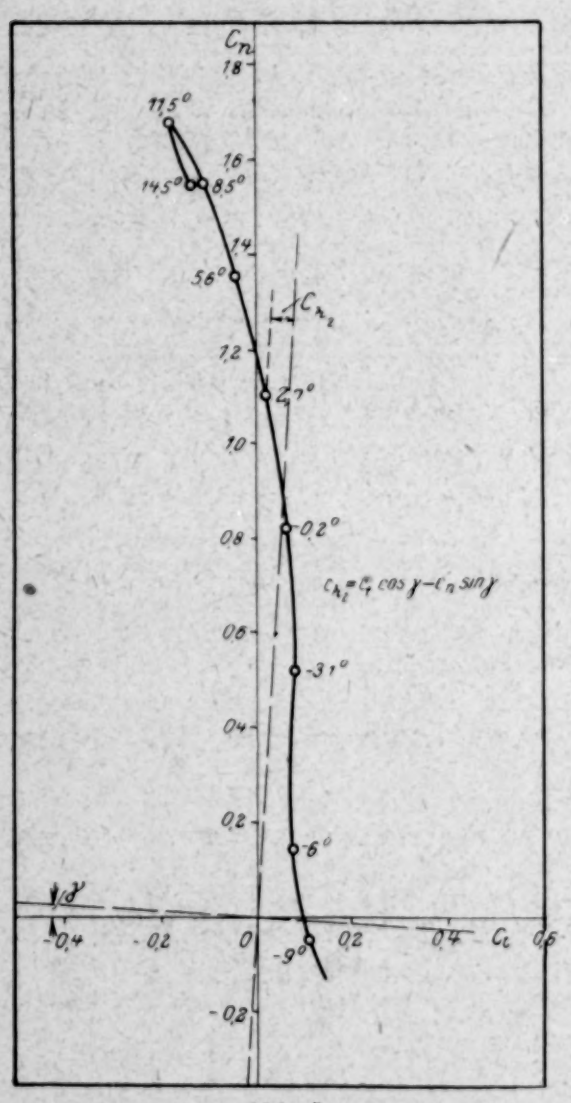


Abb. 7

Die c_{h10}-Werte sind in Abb. 6 abhängig von β_0 aufgetragen. Von $\beta_0 = 11{,}7^0$ ab wird c_{h10} negativ, d. h. es entsteht kein Widerstand, sondern Zug.

Beim einfachsten Fall geht Betz vom Knollerschen Polardiagramm aus, Abb. 7, in welchem als Abszisse die c_t- und als Ordinaten die c_n-Werte eingetragen sind. Nach einmaliger Drehung des Bezugssystems um den Winkel γ und durch Ablesung des auf dieses neue Bezugssystem bezogenen wagerechten Widerstandes c_{h2} bei verschiedenen Anstellwinkeln α werden nach der Beziehung $\beta = \alpha + \gamma$ diese Werte c_{h2} auch für veränderte β Werte gefunden. Die auf diese Weise ermittelten c_{h2}-Werte sind für $\gamma = 6^0$ und $\gamma = 3^0$ in Abb. 8 eingetragen.

Leider reichten die Göttinger Versuchsergebnisse für größere negative β-Werte nicht aus. Die Knollersche Polarkurve wurde extrapoliert. Da es vorkommen kann, daß die Polarkurve bei größeren negativen Anstellwinkeln abbricht, so sind die in Abb. 8 gestrichelt gezeichneten Kurvenzweige ungewiß. Bei der Unter-

suchung an Segelflugzeugen oder Flügelmodellen im Windkanal werden zweckmäßig größere Bereiche negativer Anstellwinkel, als es bei Untersuchungen für Motorflugzeuge notwendig ist, beachtet.

Wie vorhin wird der zeitliche Mittelwert c_{h30} für verschiedene β_0 errechnet und in Abb. 9 abhängig von β_0 aufgetragen.

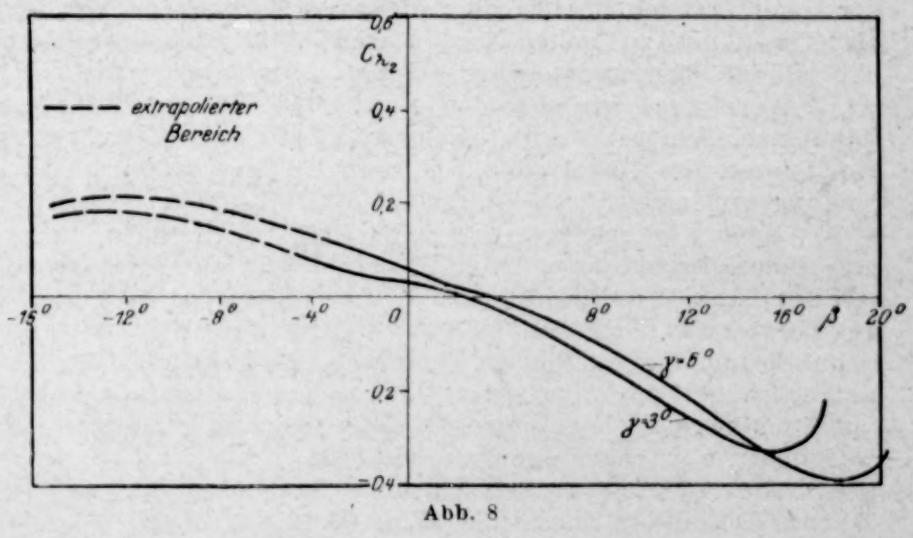


Abb. 8

Die Kurven der Abb. 9 sind in hohem Maße von der Extrapolation der Kurven der Abb. 8 abhängig und besitzen deshalb nur anschaulichen, aber keinen absoluten Wert.

Die Betrachtung der Abb. 9 ergibt, daß ebenfalls bei größeren β_0-Werten, negativer Widerstand, also Zug eintritt.

Der zur Zugerzeugung notwendige Schwankungsbereich β_0 ist sehr groß. Er könnte bei stärker gewölbten Flügeln kleiner werden. Leider ergeben aber stark gewölbte Flügel eine größere Druckpunktwanderung, d. i. bei wechselndem Auftriebsbeiwert größere Aenderung des Momentenbeiwertes der Luftkräfte, so daß die Flügelwölbung nicht übertrieben werden darf.

Die vorstehenden Betrachtungen haben nur dann Gültigkeit, wenn bei der wechselnden Windrichtung β_0 der zeitliche Mittelwert c_{v0} der Auftriebsbeiwerte c_v positiv bleibt.

Die c_v Werte sind nach Abb. 3 durch die Beziehungen

$c_v = c_w \sin\beta + c_a \cos\beta$ oder $c_v = c_t \sin\gamma + c_n \cos\gamma$ bezw. $c_v = c_w \sin(\alpha+\gamma) + c_a \sin(\alpha+\gamma)$

bestimmt und können in derselben Weise wie die c_h-Werte aus dem Lilienthalschen oder Knollerschen Polardiagramm (vergl. Abb. 4 und Abb. 7) entnommen werden.

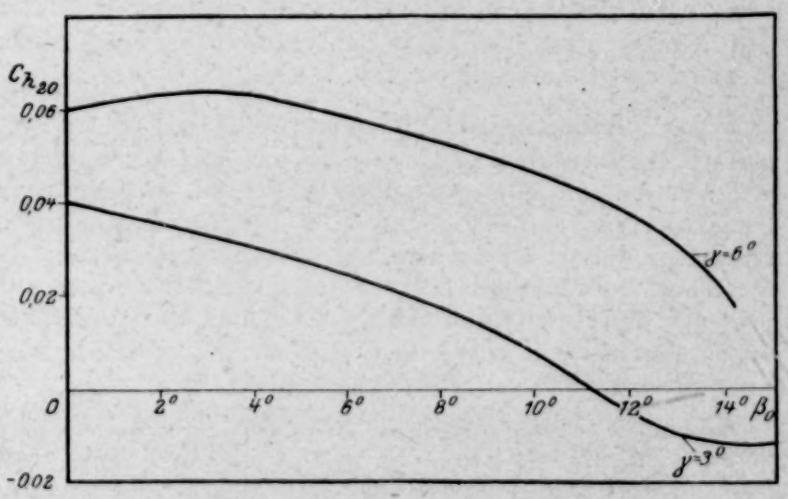


Abb. 9

Diese Betzschen Untersuchungen geben eine Erklärung für die von Otto Lilienthal und dessen Bruder Gustav Lilienthal gemachten Beobachtungen, daß an der Vorderkante gut abgerundete und hoch gewölbte Flügel sich im natürlichen Wind weit besser verhalten als am Rundlauf.

Der Knoller-Betzsche Beitrag zur Erklärung des Segelfluges deckt sich in vielem mit den aus zahlreichen und ausgezeichneten Naturbeobachtungen und eingehender Forschung des Vogelflügelbaues gezogenen Folgerungen Ahlborns, die in einer längeren, ihres reichhaltig gesammelten Stoffes wegen sehr lesenswerten Abhandlung[1]) niedergelegt sind. Leider beschränkt sich Ahlborn bei der Schilderung der Flügelspitzen, denen er die treibende Wirkung bei vorzüglich segelnden Vögeln zuspricht, darauf, diese Eigenschaft an wenig überzeugend gehaltenen, die Mechanik des Vortriebes darstellenden Abbildungen zu erläutern. Da beim Segelflug

[1]) Fr. Ahlborn, Der Segelflug, Erklärung des Segelflugs der Vögel, Die Möglichkeit des Fliegens ohne Motor. Berichte und Abhandlungen der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt, Heft 5, Juli 1921.

der Vögel lotrechte Schwankungen kaum wahrgenommen werden, zieht Ahlborn den Schluß, daß die in Windböen gewonnene Leistung durch die von der Natur in ihrem statischen Aufbau hierzu geeigneten Triebflügel in Zugleistung umgesetzt wird, während der innere Flügelteil, dem die Anpassungsfähigkeit an Windrichtungsschwankungen fehlt, als Tragflügel zu gelten hat, dessen Widerstandsleistung durch die Zugleistung der Treibflügel überwunden wird.

Vereinigen wir aber den günstigsten Fall von Betz, der auf die äußeren Triebflügel nach Ahlborn anzuwenden wäre, mit dem einfachsten Fall von Betz, welcher auf die inneren Tragflügel nach Ahlborn Geltung haben müßte, so erhalten wir eine Verbindung von mechanisch schlüssigen Erscheinungen.

Nach Fertigstellung dieses Berichtes erschien in der »Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt«, 1922, S. 80 und 95, eine lesenswerte Arbeit von R. Katzmayr »Ueber das Verhalten von Flügelflächen bei periodischen Aenderungen der Geschwindigkeitsrichtung«. Katzmayr gibt zwei am Wiener aeromechanischen Laboratorium durchgeführten Versuchsreihen bekannt. Bei der ersten Gruppe wurden die Versuchsflügel um eine ihrer Querausdehnung parallele Achse im gerade gerichteten Luftstrom periodisch geschwenkt. Bei der zweiten Gruppe wurde der Luftstrom durch geeignete Leitvorrichtungen auf die feststehenden Flügel periodisch abgelenkt.

Die Katzmayrschen Versuche hatten sehr bemerkenswerte Ergebnisse. Bei der ersten Anordnung wuchs der Widerstand der Flügel mit zunehmendem Schwenkwinkel, der Auftriebsbereich für verschiedene Anstellwinkel wurde mit zunehmendem Schwenkwinkel kleiner, und bei genügend groß gehaltenen Schwenkwinkel kleiner, und bei genügend groß gehaltenen Schwenkwinkeln wurde sogar eine Grenze für Auftrieb und Widerstand erreicht, bei welcher Anstellwinkel einflußlos waren. Diese Beobachtungen waren von der Schwingungszahl der Flügel unabhängig. Eine im gerade gerichteten Luftstrom vorgenommene, zur Flügelsehne parallele periodische Verschiebung der Flügel ergab eine geringe Verschlechterung der aerodynamischen Beiwerte.

Bei der zweiten Versuchsgruppe wurde eine Abnahme des Widerstandes, wiederholt sogar Vortrieb bei vorhandenem Auftrieb gemessen. Bei größeren Luftablenkungsbereichen verbesserten sich diese Beobachtungen. Bei gleichzeitiger periodischer Bewegung der Flügel und des Luftstroms war eine Verbesserung des Widerstands nicht zu erreichen.

Die Katzmayrschen Versuche geben noch keinen Aufschluß über die Gründe des Unterschieds in den Beobachtungen bei beiden Versuchsgruppen, die einander mechanisch gleich sein sollten.

3. Allgemeine Theorie. Während die Erklärung des Segelfluges nach Ahlborn, Betz und Knoller sich mit der Leistungsumsetzung am Flügel befaßt, geht v. Kármàn an die gestellten Aufgaben allgemein heran[1]) und läßt die unmittelbare Uebertragung seiner wichtigen Folgerungen auf das Flugzeug offen. Wir dürfen wohl erwarten, daß v. Kármàns Schüler, der erfolgreiche Segelflieger Klemperer, in seiner in Arbeit befindlichen Dissertation hierauf näher eingehen wird.

v. Kármàn fußt auf der zuerst von A. Bazin 1890, einige Jahre später auch von Lanchester gezeigten Vorrichtung (vergl. Abb. 10) zur Erläuterung des dynamischen

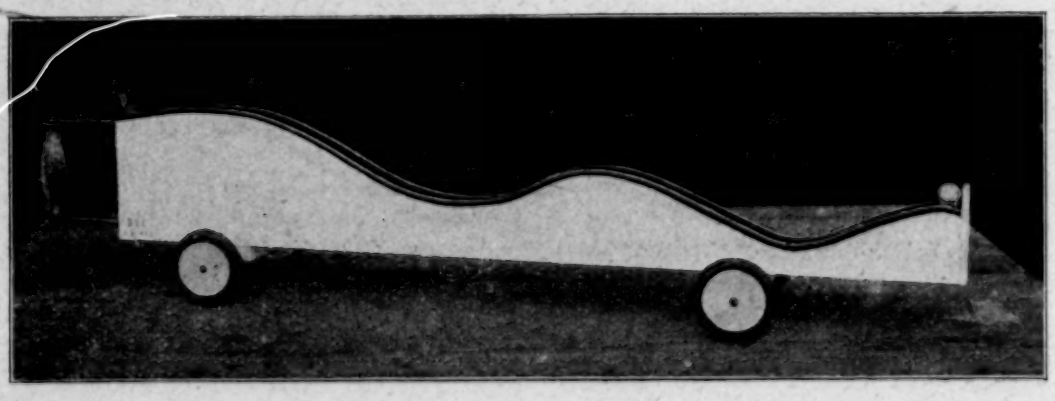


Abb. 10

[1]) Vergl. Anm. 2 auf S. 208.

Segelfluges. Eine in einer wellenförmigen Rille laufende Kugel wird durch geeignet beschleunigte und verzögerte wagerechte Bewegung der Rille vom tief gelegenen Anfangspunkt zum hoch gelegenen Endpunkt gehoben. Der rechnerisch am einfachsten zu handhabende Fall ist dann gegeben, wenn angenommen wird, daß die Bewegung (Windbewegung) der Unterlagen nach einem Sinusgesetz erfolgt:

$$u = u_0 + u_1 \sin(\lambda t).$$

Hierin sind wie vorhin $\lambda = \frac{2\pi}{T}$ und T die Dauer einer Periode.

Die Beschleunigung

$$b = \frac{du}{dt} = u_1 \lambda \cos(\lambda t)$$

wirkt auf die Kugel, welche die Masse m besitzt. Die Bewegung der Kugel gegen die Schiene erfolgt ebenfalls nach einem Sinusgesetz, aber um die Phase φ verschoben:

$$v = v_0 + v_1 \sin(\lambda t + \varphi).$$

Durch die beschleunigte Bewegung der Unterlage wirkt auf die Kugel eine entgegengesetzt gerichtete Kraft

$$P = -mb = -m\lambda u_1 \cos(\lambda t),$$

welche die Bewegung der Kugel auf ihrer um $\varkappa$ geneigten Unterlage mit der Geschwindigkeit $\frac{v}{\cos\varkappa}$ verschiebt (vergl. Abbild. 11).

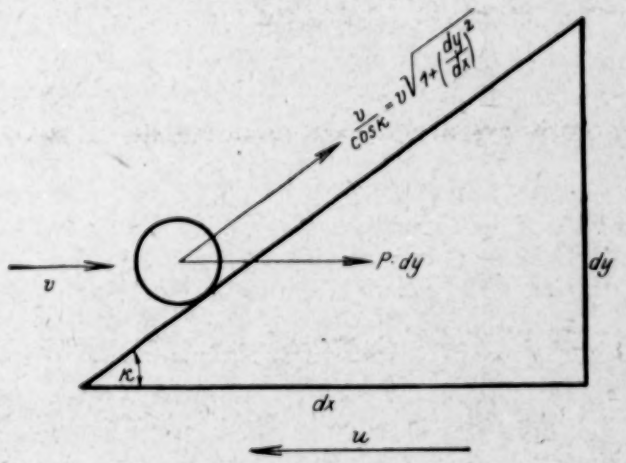


Abb. 11

v. Kármán stellt die Forderung, die Wellenbahn $y = f(x)$ so zu berechnen, daß die Kugelbewegung tatsächlich der für sie angeschriebenen Gleichung genügt, und untersucht die Bedingungen, unter welchen ein Steigen der Kugel, d. h. ein mechanischer Energiegewinn möglich ist. Zu diesem Zweck stellt er die Energiegleichung auf:

Potentielle Energie (mgy), vermehrt um die lebendige Kraft der Kugel $\left[\frac{1}{2} m \left(\frac{v}{\cos\varkappa}\right)^2\right]$ ergeben unter Vernachlässigung der Reibung diejenige Arbeit $\int_0^t P v\,dt$, welche mit dem Widerstand P bei der Geschwindigkeit v in einem betrachteten Zeitabschnitt 0 bis t geleistet wird:

$$mgy + \frac{1}{2} m \left[v_0 + v_1 \sin(\lambda t + \varphi)\right]^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = \text{konst.} - \frac{\lambda u_1}{g} \int_0^t [v_0 + v \sin(\lambda t + \varphi)] \cos(\lambda t)\, dt.$$

Umgeformt und für den Zeitabschnitt 0 bis t integriert:

$$y = \text{konst.} - \frac{1}{g}\left\{\frac{1}{2}[v_0 + v_1 \sin(\lambda t + \varphi)]^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] + u_1 \sin(\lambda t)\left[v_0 + \frac{v_1}{2}\sin\varphi\cos(\lambda t)\right] - \frac{u_1 v_1}{4}\cos\varphi\cos(2\lambda t)\right\} - \frac{u_1 v_1}{2g}\lambda t \sin\varphi.$$

Diese letzte Beziehung besitzt mit Ausnahme des letzten Gliedes mit der Zeit periodisch wechselnde Glieder. Der Höhengewinn während der Periode T ist durch das letzte Glied gegeben zu

$$\Delta y = \frac{\pi}{g} u_1 v_1 \sin\varphi.$$

Für die weitere Rechnung wird angenommen, daß v_1 und u_1 gegen v_0, sowie $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ gegen 1 klein sind:

Die Ausgangsbeziehung wird damit in erster Näherung

$$y_1 = y_0 - \frac{v_0}{g}(u_1 + v_1 \cos\varphi)\sin(\lambda t) + \frac{v_0 v_1}{g}\sin\varphi\cos(\lambda t),$$

oder abgekürzt

$$y_1 = y_0 - h\sin(\lambda t + \delta).$$

Hierin bedeutet h die halbe Wellenhöhe der lotrechten Schwingungsbewegung und ist durch

$$h = \frac{v_0}{g}\left[{u_1}^2 + 2u_1 v_1 \cos\varphi + {v_1}^2\right]$$

gegeben, während δ durch

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{v_1 \sin\varphi}{(u_1 + v_1\cos\varphi)}$$

bestimmt ist.

Durch Elimination von v_1 wird erhalten

$$\Delta y = \pi\frac{{u_1}^2}{g}\left[\cos\varphi + \sqrt{\left(\frac{hg}{u_1 v_0}\right)^2 - \sin^2\varphi}\right]\sin\varphi,$$

für $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{gh}{u_1 v_0}$ wird Δy zum Größtwert.

$$\underline{\Delta y = \pi h\frac{u_1}{v_0}}.$$

Dies wichtige Ergebnis sagt aus, daß der Höhengewinn während einer Periode durch das Geschwindigkeitsverhältnis der Böenschwankung zur mittleren Fortschreitungsgeschwindigkeit und die Höhe der Wellenbewegung beeinflußt ist.

Auf Segelflugzeuge angewendet, müßte die Forderung kleiner Fluggeschwindigkeit und möglichst großer Wellenhöhen gestellt werden, was mit wendigen Flugzeugen kleiner Flächenbelastung erreicht werden kann.

Eine zweite Art, aus böigem Winde Energie zum Anstieg zu gewinnen, ist die Kreisbewegung, die ebenfalls von v. Kármán erklärt worden ist. Klemperer hat hierfür eine schraubenförmig gewundene Röhre als veranschaulichendes Modell angegeben[1]), das in Abb. 12 wiedergegeben ist. In Abb. 13 ist die Wirkungsweise dargestellt. Das Schraubenrohr wird um eine außen gelegene parallele Drehachse gleichmäßig geschleudert. Die Zentrifugalbeschleunigung b setzt sich mit der Erdbeschleunigung g zu einer resultierenden Beschleunigung r zusammen, welche auf der um $\varkappa$ geneigten Bahn senk-

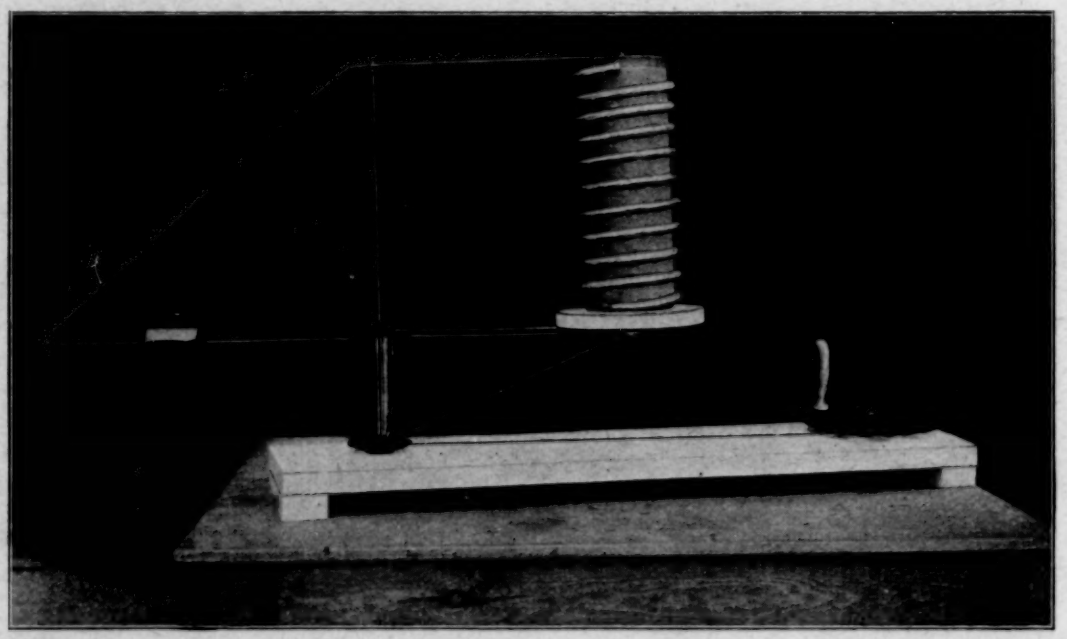


Abb. 12

[1] Vergl. Anm. 2 auf S. 208.

recht steht. Das Schraubenrohr muß sich so schnell um sich selbst drehen, daß die durch einen Ruck in Bewegung gesetzte Kugel aufsteigt. Die Beziehung besteht:

$$\operatorname{tg} \varkappa = \frac{b}{g}.$$

Zum Segelflug ausnutzbare Kreiswirbel sind selten. In folgendem wird gezeigt, daß auch durch hin- und herschwingende Bewegung ein schraubenförmiger Aufstieg der Kugel hervorgerufen werden kann. Bei dieser schwingenden Bewegung muß offenbar dafür gesorgt sein, daß die Tangentialbeschleunigung am Kreisumfang immer gleichgerichtet ist. Die Tangentialbeschleunigung b ist mit der Schwingungsbeschleunigung p durch die Beziehung verbunden:

$$b = p \sin \lambda t.$$

Die Beschleunigung p wechsele für sich nach der Regel

$$p = \lambda u_1 \sin (\lambda t),$$

so daß für b das Gesetz gilt:

$$b = \lambda u_1 \sin^2 (\lambda t).$$

Da die Sinusfunktion im Quadrat erscheint, ist gleichbleibendes Vorzeichen für b gesichert.

Die mittlere Beschleunigung ist gegeben durch die Beziehung

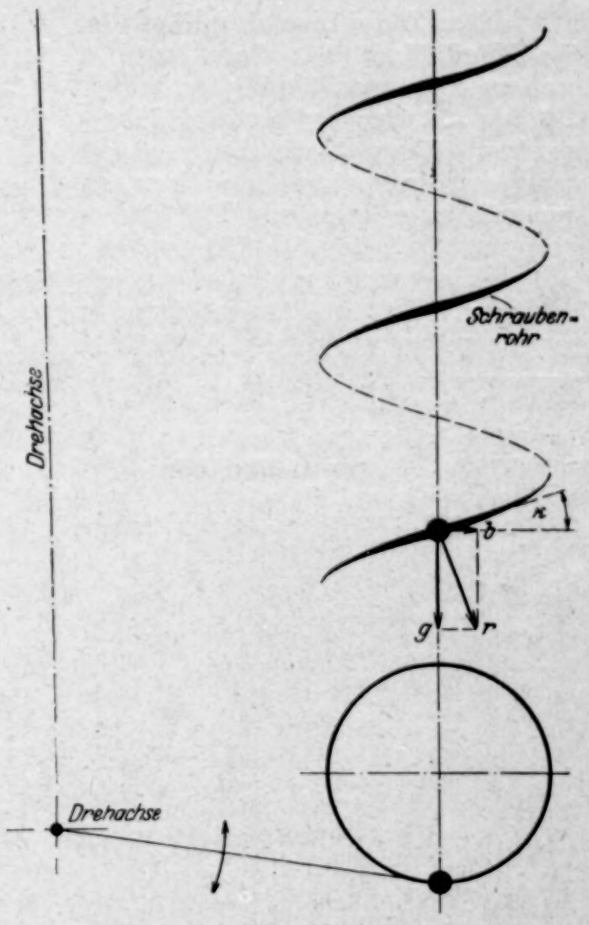


Abb. 13

$$b_m = \frac{2 \lambda u_1}{\lambda T} \int_{t=0}^{t=T/2} \sin^2 (\lambda t)\, d\,(\lambda t) = \frac{\lambda u_1}{2} = \pi \frac{u_1}{T}.$$

Bei Annahme dieses Schwingungsgesetzes ist die größte Beschleunigung

$$b_{max} = \lambda u_1 = 2 \pi \frac{u_1}{T},$$

also doppelt so groß wie die mittlere. Die mittlere Neigung der Schraubenlinie ist gegeben durch

$$\operatorname{tg} \varkappa = \frac{b_m}{g} = \pi \frac{u_1}{Tg}.$$

Ein Segelflug nach dieser Weise ist möglich, wenn das Flugzeug beim Richtungswechsel der Beschleunigungen sich stets zur Luvseite des Geschwindigkeitszuwachses wendet.

Ahlborn gibt in seiner Arbeit [1]) viele eigene Beobachtungen des kreisenden Segelfluges, den er ähnlich erklärt, an.

Endlich sei noch einer Segelflugart, des »Inversionsflugs« gedacht, die von Wolfmüller [2]) empfohlen wird. Wolfmüller arbeitet mit zwei durch eine Leine verbundenen Flugzeugen, die sich in Schichten verschiedener Windstärke befinden. Es ist einleuchtend, daß durch solch eine Vorrichtung gegenseitiges Schleppen eintritt. Leider hat diese, den Segelschiffen ähnlichste Art des Segelns wenig Aussicht auf Verwirklichung, da die Stabilitätsverhältnisse sehr schwer zu beherrschen, und da die Widerstände der Verbindungsleinen überwiegend sein werden. Trotzdem sind Segelflüge dieser Art über viele km Strecke zustande gekommen, als Fesseldrachengruppen, für meteorologische Aufstiege bestimmt, sich von ihrer Erdverbindung abgerissen hatten.

---

[1]) Vergl. Anm. 1 auf S. 213.

[2]) Al. Wolfmüller, Zur Segelflugentwicklung. Flugsport 1921, S. 26.

Der Rhön-Segelflug-Wettbewerb 1921 und die daran anschließenden Flüge haben die Möglichkeit des Segelflugs wiederum praktisch bestätigt[1]). Auf Flugzeugen mit großem Seitenverhältnis (bis herauf zu $\sim 10:1$) und niederer Flächenbelastung (zwischen ~ 6 bis $\sim 11\,\mathrm{kg\,m^{-2}}$) sind Flüge bis zu 21 min Dauer und 7,5 km Länge ausgeführt worden. Wenn auch die meisten Flüge auf größerer Höhe begonnen und tief im Tal endigten, so hatten die Führer unterwegs doch Gelegenheit, sowohl statisch, als auch dynamisch zu segeln. Für dieses Jahr sind wiederum Wettbewerbe geplant, welche geeignet sind, das Segelflugwesen weiter zu fördern.

Die baulichen Aufgaben beim Segelflugzeug sind mannigfach. Wir dürfen bestimmt erwarten, daß die Entwicklung dieser Flugzeuge auch rückwirkend den Verkehrsflugzeugen mit motorischem Antrieb in ihrem Aufbau zugute kommen wird. 155

[1]) W. Hoff, Bericht über den Rhön-Segelflug-Wettbewerb 1921. Berichte und Abhandlungen der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt, 6. Beiheft der Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, Januar 1922, S. 41. — W. v. Langsdorff, Rhön-Segelflug-Wettbewerb 1921, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, Bd. 12, Nr. 18, S. 278; Flugsport, Bd. 13, August 1921, Nr. 16, 17, 18, S. 348, 376, 394. — W. v. Langsdorff, Dr.-Ing. R. Eisenlohr, Luftfahrt, Bd. 25, September-Oktober 1921, Nr. 9, 10, S. 151, 168.

KURZE AUSZÜGE

Baumechanik.

Graphische Statik. — Das Seilpolygon. Die Grundlage der graphischen Statik bildet das Seilpolygon von Culmann, jene Konstruktion, die das Zusammensetzen von Kräften in der Ebene in so wunderbar einfacher Weise leistet. T. Bleckmann zeichnet das Seilpolygon für parallele Lasten abweichend vom üblichen Verfahren, indem er das Ziehen der Seilseiten als Parallele zu den Polstrahlen des Kräftepolygons vermeidet (Eng. News-Record 1920, aus Der Eisenbau 1921, S. 65 u. 66). Es wird benutzt, daß zwei aufeinander folgende Seilseiten auf einer zur Kraftrichtung parallelen Geraden eine Strecke abschneiden, die gleich dem statischen Moment der durch den Schnittpunkt der Seilstrahlen hindurchgehenden Kraft bezüglich dieser Achse ist. Trägt man also auf einer Geraden links und auf einer rechts von den Kräften die statischen Momente der einzelnen Kräfte für diese Achsen in umgekehrter Reihenfolge auf, so sind die durch kreuzweises Verbinden der so bestimmten Punkte erhaltenen Linien, die Seilseiten. — Das statische Moment der Kraft kann man als geometrische Proportionale aus dem Kräftepolygon finden. Es empfiehlt sich, zwei Kräftepolygone zu konstruieren, deren Pole in die Achsen zu legen und das linke nach rechts und das rechte nach links zu zeichnen. Die Richtungslinie einer Kraft schneidet dann in beiden Polygonen zwischen den der Kraft zugehörigen Polstrahlen, die statischen Momente bezüglich der beiden Achsen ab. — Mitunter mag diese Art des Auftragens vom Seilpolygon vielleicht Vorteile bieten.

Ueber die Lagerung von Raumfachwerken. Wenn der Aufbau eines Raumfachwerks mit ebenem Fußring dem Bildungsgesetz folgt, so genügt es zur Kennzeichnung der Stabilität den Fußring zu untersuchen. Ist dieser eine Gelenkpolygon von n Seiten, so ist mit n Stützstäben in der Lagerebene die notwendige Stabzahl für ein (stereo)statisch bestimmtes, gestütztes ebenes System vorhanden. Trotz der richtigen Stabzahl muß der Stabzug nicht stabil sein; er ist stabil, wenn sich die Stabkräfte bei jedem Angriff eindeutig ergeben. So ist ein regelmäßiges n-Eck mit n radialen Führungslagern bei einer geraden Anzahl von Stäben im allgemeinen labil (d. h. von endlicher Beweglichkeit), bei ungerader Seitenzahl stabil. Das einfachste Kriterium für die Stabilität liefert die Kinematik mit dem sog. »Plan der gedrehten Geschwindigkeiten«[1]). Trägt man bei einem Stab die unendlich klein gedachten Verschiebungen der Endpunkte um 90° gedreht auf, so ist die neue gedrehte Lage des Stabes parallel der ursprünglichen. Man erteilt nun bei dem zu untersuchenden Stabzug einem Knotenpunkt eine frei gewählte Verschiebung, die der Lagerbedingung entspricht und zeichnet der Stüzung gemäß den kinematischen Verschiebungsplan von Knoten zu Knoten fortschreitend. Kommt man zum letzten Punkt, so sieht man aus der graphischen Darstellung, ob die eingeleitete Verschiebung möglich war (das System labil ist) oder nicht (d. h. das System stabil ist). L. Geusen zeigt auf Grund geometrischer

[1]) Siehe hierüber: A. F. Zschetzsche, Handbuch der Baustatik, 1. Bd., Düsseldorf 1912, Art. 3 sowie Art. 9 (Methode der Polpläne); und vergl. demgegenüber das Kennzeichen der Verschieblichkeit bei H. Müller-Breslau, Graph. Statik der Baukonstruktionen, Bd. 1, 4. Aufl., Stuttgart 1905, S. 458.

Betrachtungen (Zur Berechnung von Fachwerkträgern, Zentralblatt der Bauverwaltung 1921, S. 273 bis 275) an den Beispielen von Sehnenvielecken mit radialen Führungslagern, sowie an symmetrischen Sehnenvielecken mit symmetrisch angebrachten Führungslagern nicht radialer Richtung, wann der Plan der gedrehten Geschwindigkeiten eine mögliche Verschiebung ergeben muß.

Berechnung eines Tragwerks, bei dem einzelne Stäbe biegungssteif ausgebildet sind. Ein Fachwerk ist nach üblicher Definition ein System von Stäben, die gelenkig miteinander verbunden und in den Gelenkstellen von Kräften ergriffen sind. Die Stäbe sind daher nur in ihrer Längsrichtung beansprucht. Im Bauwesen sind Stäbe eines Tragwerks häufig auch querbelastet. Sind die Knoten steif, so liegt ein Rahmentragwerk vor, dessen Berechnung hinlänglich geklärt ist. In praxi wird jedoch oft näherungsweise vorgegangen. R. Schick-Sterkrade berechnet ein als Kranbahnträger in Verwendung stehendes Tragsystem, das als Fachwerk aufgefaßt ein (stereo)statisch bestimmtes parallelgurtiges Strebenfachwerk wäre, bei dem aber der in gleiche Feldweiten unterteilte Obergurt Querlasten aufzunehmen hat und biegungssteif ist (Berechnung von Fachwerkträgern mit biegungsfestem Obergurt, Kranbahnträger, Der Bauingenieur 1921, S. 93 bis 97 und S. 126 bis 130). Es wird vorausgesetzt, daß Untergurt- und Füllungsstäbe miteinander gelenkig verbunden, sowie daß die Füllungsstäbe am Obergurt gelenkig angeschlossen sind. Das Tragwerk ist also ein durchlaufender Träger, der in den Knoten von einem Fachwerk elastisch gestützt ist; bei n-Feldern im Obergurt ist es n-1fach (stereo) statisch unbestimmt. Als Hauptsystem wird der mit unveränderlichem Trägheitmoment durchgehende Obergurt als Balken auf zwei Stützen gewählt; als Ueberzählige, die in seinen Knotenpunkten durch die Unterstützung hervorgerufenen Momente. Die Berechnung erfolgt mittels der Elastizitätsgleichungen von Maxwell-Mohr. Durch eine zahlenmäßige Vergleichsrechnung wird gezeigt, daß es zulässig ist, das Unterstützungsfachwerk durch einen Stab von konstantem Trägheitsmoment zu ersetzen. Die Größe dieses Trägheitsmoments wird aus der Bedingung bestimmt, daß die Winkeländerung an einem Knoten infolge des daselbst wirkenden Moments »Eins«, beim System mit dem Ersatzstab dieselbe sein soll, wie beim tatsächlich vorhandenen System. Die Wahl des Knotenpunkts ist hierbei nicht von großem Einfluß. Jetzt läßt sich die Rechnung leicht erledigen. Ist im Knoten n das Biegungsmoment für den Freiträger $\mathfrak{M}_n$ und X_n die Ueberzählige, so ist das Moment: $M_n = \mathfrak{M}_n + X_n$. Aus den Elastizitätsgleichungen ergibt sich $X_n = \varphi \cdot \eta_n$, wobei $\varphi = J_2 : (J_1 + J_2)$, J_1 und J_2 die Trägheitsmomente des Obergurts bzw. des Ersatzstabes und η_n einen unbekannten Zahlenfaktor vorstellen. Sind die Knoten fest unterstützt, so ist $J_2 = \infty$ und das Biegungsmoment in n: $M_n' = \mathfrak{M}_n + \eta_n$. Daher ist $M_n = \varphi \cdot M_n' + (1 - \varphi)\, \mathfrak{M}_n$ und somit die Aufgabe auf den kontinuierlichen Träger mit festen Stützen hingeleitet. — Daß der Einfluß der Längskräfte im Obergurt nicht beachtet ist, entspricht der gebräuchlichen Berechnungsweise von Rahmentragwerken. Von Interesse wäre es aber jedenfalls, die Längskräfte mit ihren Ausbiegungen zu berücksichtigen, da auf diese Weise auch der Knickfestigkeit des Systems näher getreten werden könnte.

Die Berechnung des biegungssteifen Stabzugs. Der biegungssteife, an seinen Enden eingespannte dreifach (stereo)statisch unbestimmte Stabzug läßt bekanntlich eine äußerst bequeme Behandlung zu, da es möglich ist, die drei Ueberzähligen je aus einer Gleichung zu erhalten. H. Müller-Breslau[1]) berechnet den Stabzug (oder geschlossenen Rahmen) mit Hilfe des Satzes von der kleinsten Formänderungsarbeit. Es wird das Koordinatensystem x, y, in dessen Ursprung die Ueberzähligen angreifen, so gewählt, daß der Koordinatenanfangspunkt mit dem Schwerpunkt der sog. Gewichte $ds : J$ zusammenfällt und die Achsen x und y Hauptachsen für den Stabzug sind (ds ist das Stabelement, J das Trägheitsmoment des Querschnitts). Hierdurch werden die drei Unbekannten von einander unabhängig. O. Mohr[2]) zeigt, daß, wenn bei der Formänderung des Rahmens nur die Stabbiegungen in Betracht kommen, die Drehungsgewichte $M\,ds : EJ$ eine Gleichgewichtsgruppe bilden (M ist das Biegungsmoment, welches auf die Stabstrecke ds einwirkt, E der Elastizitätsmodul des Materials). Es muß also die Momentensumme der Drehungsgewichte inbezug auf drei beliebig gewählte Achsen der Rahmenebene, die sich nicht in einem Punkt schneiden, gleich Null sein. Man kann so aus drei Gleichungen drei willkürlich gewählte Ueberzählige bestimmen, wenn man die Gewichte als Funktion jener Ueberzähligen einführt. Werden die drei Schwerpunkte der von den einzelnen Unbekannten abhängigen Drehungsgewichte berechnet und die Momentengleichungen auf drei Achsen bezogen, die durch je zwei der Schwerpunkte hindurchgehen, so entstehen Gleichungen von denen jede nur eine Unbekannte enthält. Der Einfluß der Stabdehnungen wird mit Einführung von Dehnungsgewichten berücksichtigt, die in gleichwertige Drehungsgewichte verwandelt mit den früheren Drehungsgewichten ein Gleichgewichtssystem bilden.

G. Spiegel will in Anlehnung an das Mohrsche Verfahren die Berechnung des eingespannten Stabzuges dadurch erleichtern, daß er ein einfach statisch unbestimmtes Hauptsystem, den einerseits eingespannten, andererseits mittels Gleitlager gestützten Träger wählt (Zur

---

[1]) Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, 4. Aufl., Leipzig 1904, S. 122 bis 143.

[2]) Abhandlungen aus dem Gebiete der Techn. Mechanik, 2. Aufl., Berlin 1914, Abhandlung 13.

Berechnung biegungssteifer Stabzüge. Der Bauingenieur 1921, S. 40 bis 46). Hier möge eine grundsätzliche Bemerkung Platz finden. Man kann durch Zurückführen auf ein statisch unbestimmtes Hauptsystem wohl die Ueberzähligen etappenweise berechnen, aber man kann ihre Anzahl hierdurch doch nicht verringern. Spiegel hat diesbezüglich offenbar einen Fehler begangen; auch die Hinstellung von Gleichungen, die nur das Superpositionsgesetz verkörpern, als »Bestimmungsgleichungen« ist nicht zutreffend. (Mehrteilige Rahmen, Berlin 1920, auf S. 17.)

In geschickter Weise berechnet B. Enyedi den eingespannten Bogenträger nach dem Verfahren von Mohr. (Beitrag zur Berechnung des eingespannten Bogenträgers auf Grund der Elastizitätstheorie. Der Eisenbau 1921, S. 34 bis 43.) Angenommen wird — wie es bei gewölbten Brücken in der Regel der Fall ist — als Bogenachse eine symmetrische flache Parabel, sowie daß die Vertikalprojektion der Trägheitsmomente der Querschnitte einen konstanten Wert hat. Dadurch wird es möglich, die Ueberzähligen des eingespannten Stabzugs in geschlossener Form zu erhalten. Enyedi zerlegt den Angriff in vier Teilangriffe, herrrührend von den drei Unbekannten (den beiden Einspannmomenten und dem Horizontalschub) und den Lasten. Bei bloßer Berücksichtigung der Biegung sind die Drehungsgewichte sämtlicher Teilsysteme zusammen ein Gleichgewichtssystem. Durch Aufstellen von drei Momentengleichungen werden die Ueberzähligen bestimmt

Ratzersdorfer. 76

Elektrotechnik.

Eisenhaltige Schwingungskreise. Die Arbeit von J. Biermanns »Die Resonanzspannungen bei eisenhaltiger Induktivität« (Archiv für Elektrotechnik, X. Bd., S. 30) behandelt das Problem des eisenhaltigen Schwingungskreises, das durch die Petersensche Erdschlußdrossel zur Kompensierung des Erdschlußstroms in Hochspannungsnetzen neuerdings von praktischer Bedeutung geworden ist. Für die analytische Erfassung des Zusammenhangs zwischen dem Magnetisierungsstrom i und dem Kraftfluß im Eisenkern der Drossel wird der Ansatz gemacht

$$i = \sum_{k=1}^{k=\infty} \pm A_k \varphi^k.$$

Dabei dürfen nur die ungeraden Potenzen genommen werden, da die Magnetisierungskurve, abgesehen von der Hysteresis, im ersten und dritten Quadranten verläuft. Für praktische Zwecke genügt es, die ersten drei Glieder der Reihe zu berücksichtigen, so daß die Magnetisierungskurve durch die Funktion

$$i = \frac{z}{L}(\varphi - a\varphi^3 + b\varphi^5) \quad \ldots \quad (1\,a)$$

dargestellt werden kann (z Windungszahl der Drossel, L auf den geradlinigen Teil der Magnetisierungskurve bezogene Eigeninduktivität).

Die obige Gleichung gilt für die statische Magnetisierungskurve. Für die Wechselstrommagnetisierungskurve wird die Gleichung

$$\tilde{i} = \frac{z}{L}\left(\tilde{\varphi} - \frac{3}{4}a\tilde{\varphi}^3 + \frac{5}{8}b\tilde{\varphi}^5\right) \quad \ldots \quad (1\,b)$$

abgeleitet, wobei $\tilde{i}$ den Maximalwert der Grundwelle des Magnetisierungsstroms und $\tilde{\varphi}$ den Maximalwert des Flusses bedeuten.

Durch Integration der Schwingungsgleichung

$$z\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = 0$$

werden zunächst die freien Schwingungen des eisenhaltigen Schwingungskreises bestimmt. Die Ergebnisse können wie folgt zusammengefaßt werden: Die Drosselspulenspannung verläuft nach einer abgeflachten Sinuskurve, während die Kurvenform des die Drosselspulenwicklung durchsetzenden Flusses φ spitzer als die Sinuskurve ist. Durch Einsetzen der für φ erhaltenen Werte in die Gleichung (1a) ergibt sich der im Schwingungskreis fließende Strom, der eine außerordentlich spitze Kurvenform besitzt. Die Frequenz der Schwingungen ist keine konstante, sondern steigt mit wachsender Amplitude an. Die auftretenden Schwingungen können in eine Grundschwingung und eine unendliche Anzahl von Oberschwingungen zerlegt werden, doch darf man aber trotzdem nur von jeweils einer einzigen Eigenfrequenz des eisenhaltigen Schwingungskreises sprechen, da die Differentialgleichung des Problems keine lineare ist, so daß die verschiedenen Oberschwingungen nicht unabhängig von der Grundschwingung existieren können.

Anschließend daran wird das Verhalten des eisenhaltigen Schwingungskreises bei erzwungenen Schwingungen behandelt, welches grundverschieden von dem des gewöhnlichen Schwingungskreises ist. Die Resonanzspannungen des letzteren werden nur durch den Ohmschen Widerstand begrenzt und können daher unter Umständen sehr hohe Werte annehmen. Beim eisenhaltigen Schwingungskreis setzt zunächst die Eisensättigung einem unbegrenzten Anwachsen der Spannung ein Ziel, ferner ist die Eigenfrequenz stark mit der Höhe der Resonanzspannung veränderlich, so daß der Schwingungskreis, falls er sich einmal in Resonanz befunden hat, sich beim weiteren Anwachsen der Spannung wieder aus der Resonanzlage entfernt (er flieht sozusagen die Resonanz).

An einem Beispiel wird die graphische Ermittlung der Resonanzüberspannungen gezeigt. Wenn bei ungesättigtem Eisen Eigenfrequenz und erzwungene Frequenz gleich sind, tritt eine Spannungserhöhung in dem behandelten Fall überhaupt nicht auf. Ueberspannungen von mäßiger Höhe sind zu erwarten, wenn im ungesättigten Zustand die Eigenfrequenz kleiner ist als die erzwungene Frequenz. Es treten dabei, wie K. W. Wagner gezeigt hat,

drei Resonanzpunkte auf, von denen aber nur zwei stabilen Gleichgewichtslagen entsprechen.

Da die numerische Auswertung der entwickelten Formeln ziemlich umständlich ist, wird auf eine näherungsweise Berechnung der Resonanzüberspannungen hingewiesen, welche eine sehr gute Uebereinstimmung mit den Formeln der strengen Theorie ergibt. Noch bequemer ist das zum Schluß angegebene graphische Verfahren, welches die angenäherte Bestimmung der im widerstandlosen eisenhaltigen Schwingungskreis auftretenden Resonanzüberspannungen ermöglicht.

Dämpferwicklung einer Mehrphasen-Synchronmaschine im Parallelbetrieb. M. Liwschitz berechnet (Archiv für Elektrotechnik, X. Bd., S. 96) für die Dämpferwicklung einer Mehrphasen-Synchronmaschine mit ausgeprägten Polen das Drehmoment während des Pendelns im Parallelbetrieb und den Einfluß der Anordnung der Dämpferwicklung (Käfigwicklung und Einzelpoldämpfung)) auf die Größe dieses Drehmoments. Um zu praktisch verwendbaren Formeln zu gelangen, wird die Streuung und die veränderliche magnetische Leitfähigkeit längs des Ankerumfangs berücksichtigt.

Scheibenförmige Wirbelstrombremse. Die Bremskraft der Wirbelstrombremse steigt anfänglich proportional der Drehzahl an; bei weiterer Steigerung der Drehzahl erreicht die Bremskraft ein Maximum (kritische Geschwindigkeit, kritische Bremskraft) und nimmt dann für größere Geschwindigkeiten wieder ab. Diese Erscheinung ist auf die Rückwirkung der Wirbelströme zurückzuführen. In einer Arbeit von W. Zimmermann (Archiv für Elektrotechnik, X. Bd., S. 133) werden nun Formeln von Rüdenberg (Wirbelströmung berücksichtigt), Beckmann und Rogowski (Wirbelströmung vernachlässigt) für die scheibenförmige Wirbelstrombremse auf ihre Uebereinstimmung mit Versuchsergebnissen an einer Pasqualini-Bremse und an einer Siemens-Bremse verglichen. Die Abweichungen zwischen Rechnung und Versuch sind recht beträchtlich, so daß die verschiedenen Formeln wohl nur mit großer Vorsicht für praktische Rechnungen zu gebrauchen sind.

Ausgleichsvorgänge beim Parallelschalten von Synchronmaschinen. J. Biermanns untersucht die beim falschen Parallelschalten von Synchronmaschinen auftretenden Kurzschlußvorgänge, welche die schwerste Beanspruchung der Maschine und der betroffenen Leitungsteile darstellen (Archiv für Elektrotechnik, X. Bd., S. 185). Um die mathematische Behandlung zu erleichtern, wird eine Zweiphasenmaschine von einfachster Bauart mit konstantem Luftspalt und verteilter Erregerwicklung vorausgesetzt, deren Ständer und Läufer lamelliert sind. Außerdem wird der Einfluß der magnetischen Sättigung und die Eisenverluste vernachlässigt. Im Anschluß an die theoretischen Ergebnisse werden auch die verschiedenen Schutz- und Vorbeugungsmaßnahmen einer kritischen Betrachtung unterzogen.

Die den zeitlichen Ablauf der Erscheinung beim falschen Parallelschalten charakterisierenden Gleichungen stimmen mit den vom Verfasser für den plötzlichen Kurzschlußstrom abgeleiteten Gesetzen (A. f. E., Bd. VI) überein. Die Größe der Ausgleichströme hängt selbstverständlich von der Phasenlage im Augenblick des Parallelschaltens ab. Beim Parallelschalten in richtiger Phasenlage treten überhaupt keine Ausgleichströme auf. Bei einer Phasenverschiebung α von 60° zwischen Netz- und Maschinen-EMK treten ebenso große Ströme wie beim plötzlichen Kurzschluß auf. Beim Parallelschalten in Phasenopposition werden die Ueberströme genau doppelt so groß als beim plötzlichen Kurzschluß (unendlich ergiebiges Netz vorausgesetzt). Aus der Tatsache, daß doppelte Ströme vierfache Kräfte auf die Wickelköpfe usw. zur Folge haben, während die modernen Maschinen, die beim plötzlichen Kurzschluß auftretenden Beanspruchungen gerade aushalten, folgt, daß die Maschinen dem ungehinderten Einfluß des falschen Parallelschaltens entzogen werden müssen. Hierfür kommen automatische Synchronisiereinrichtungen und Schutzreaktanzen in Frage. Der ausreichenden Dimensionierung der letzteren stehen aber die hohen Anschaffungskosten und die starke Einengung des Regulierbereichs der Generatoren im Wege. Mit dem als Schutzmittel empfohlenen Vorstufenschalter läßt sich dagegen nur eine bescheidene Schutzwirkung erzielen.

Die beim falschen Parallelschalten auftretenden Kontrastwirkungen zwischen Ständer und Läufer der Maschine sind denen beim plötzlichen Kurzschluß sehr ähnlich, nur tritt außerdem noch ein gewaltiges synchronisierendes Moment auf, das den Induktor nach dem Parallelschalten in seine richtige Lage relativ zum Vektor der Netz-EMK zu drehen sucht. Die für die resultierende Kontrastwirkung abgeleitete Gleichung setzt sich aus drei Summanden zusammen, von denen der erste der magnetischen Kraftwirkung zwischen den am Ständer und Läufer haftenden Anteilen des gemeinsamen magnetischen Feldes entspricht; der zweite Summand stellt das durch die Wicklungsverluste bedingte bremsende Moment und der dritte Summand das synchronisierende Moment dar. Weitaus den höchsten Wert kann der erste Summand erreichen, doch wechselt die Kontrastwirkung zwischen Ständer- und Läuferfeld ihre Richtung so schnell, daß sie fast vollkommen von der kinetischen Energie des Läufers aufgenommen wird und daher die Maschine nur verhältnismäßig wenig beansprucht. Das bremsende Moment wird am größten beim Parallelschalten in Phasenopposition und verschwindet beim Schalten in der Nähe des Synchronismus. Das synchronisierende Moment dagegen wird beim Parallel-

schalten im Synchronismus und in Phasenopposition gleich 0 und erreicht seinen größten Betrag für $\alpha = 90^0$.

In letzten Teil der Arbeit untersucht der Verfasser das Einschwingen des Läufers in die synchrone Lage unter Annahme eines kleinen Winkels α. Es ergibt sich dabei, daß bei nennenswerter Größe des Vorstufenwiderstandes der Läufer überhaupt nicht in die synchrone Lage einschwingt, sondern nach einer Reihe anschwellender Schwingungen vollständig außer Tritt fällt. Kafka. 181

KLEINE MITTEILUNGEN

Verhalten reziproker Kräftepläne bei Zerlegung des Fachwerkes. Für die Vorzeichen-Bestimmung der Stabspannungen in einem Cremonaschen Kräfteplan wird folgende Bemerkung zweckdienlich sein, da sie in einfacherer Weise, als es die meisten Lehrbücher tun, die Aufgabe zu lösen gestattet.

Wir denken uns, wie üblich, die äußeren Kräfte durch außerhalb des Fachwerks liegende, unendlich lange Druck- bezw. Zugstäbe ersetzt. Sollte einer oder der andere der so gedachten Kraftstäbe andere Stäbe des Fachwerkes oder andere Kraftstäbe schneiden, so werde der Kräfteplan gleich unter Heranziehung entsprechender Schurscher gedachter Knotenpunkte[1]) gezeichnet, um jede Unstimmigkeit auszuschalten.

Die allgemeinen Schnitte, durch die wir das Fachwerk zerlegen wollen und die den Gegenstand unserer Untersuchung bilden, sind sich selbst nicht überschneidende, sonst aber ganz beliebige geschlossene ebene Kurven, welche einen oder mehrere der Stäbe (Kraftstäbe) schneiden. Durch jeden solchen Schnitt wird das Fachwerk in zwei Teile geteilt, die jeder für sich im Gleichgewicht sein müssen. Unser Hauptsatz sagt nun folgendes aus: Für jeden in die Fachwerkebene gelegten »allgemeinen Schnitt« finden sich die beiden (geschlossenen, Pfeilfolge aufweisenden, sich voneinander nur im Pfeilsinne unterscheidenden) Gleichgewichtspolygone im reziproken Kräfteplan fertig vor und zwar so, daß die Kraftvektoren im Gleichgewichtspolygone die nämliche zyklische Reihenfolge aufweisen wie die der Reihe nach durch den Schnitt getroffenen Stäbe[2]).

Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich aus folgender bekannter Eigenschaft (siehe z. B. Müller-Breslau, Graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. I, S. 218) reziproker Kräftepläne folgern: Die an einem Knotenpunkte angreifenden Kräfte folgen einander im Kraftplan in der nämlichen Reihenfolge, in der man ihnen bei Umkreisung des Knotenpunktes begegnet. Wenn man nun bedenkt, daß infolge der oben in anderem Zusammenhange schon gebrauchten Schurschen Erweiterung der Methode der reziproken Kräftepläne zwei sich kreuzende Stäbe stets einen »Knotenpunkt« gemeinsam haben, so sieht man sofort, daß zwei nacheinander folgende Stabschnittpunkte unseres Schnittes entweder einem und demselben Stabe, oder zwei im selben Knotenpunkt zusammenlaufenden Stäben angehören, woraus unter Heranziehung der oben angeführten Eigenschaft der reziproken Figuren unser Satz unmittelbar folgt.

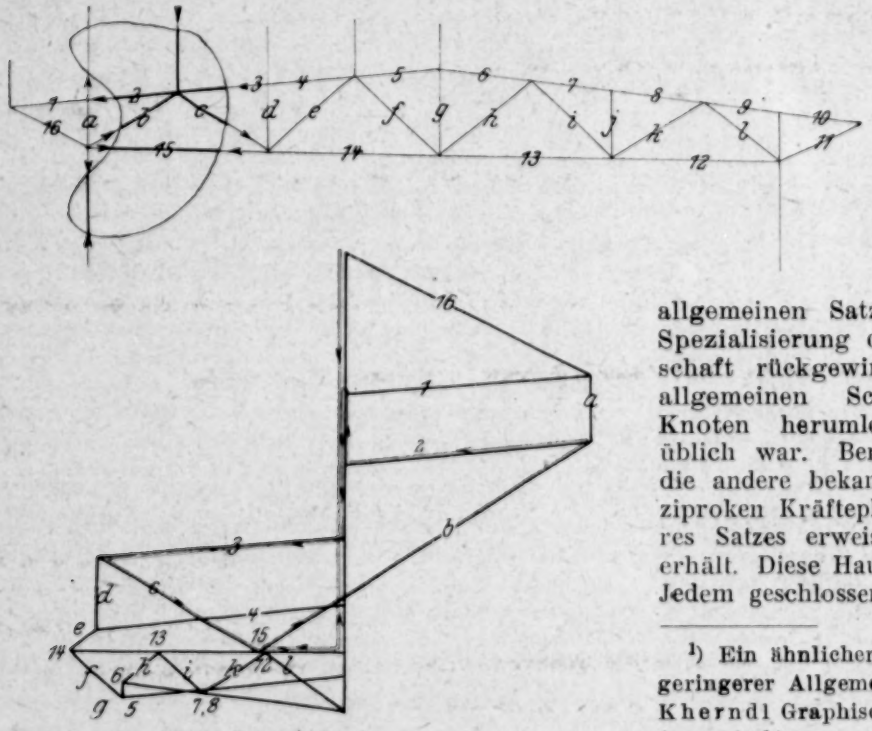


Abb. 1

Aus dem gewonnenen allgemeinen Satz läßt sich natürlich durch Spezialisierung die oben angewandte Eigenschaft rückgewinnen, indem man unseren allgemeinen Schnitt einfach um einen Knoten herumlegt, wie es auch bisher üblich war. Bemerkenswerter ist, daß auch die andere bekannte Haupteigenschaft der reziproken Kräftepläne sich als Spezialfall unseres Satzes erweist und somit statischen Sinn erhält. Diese Haupteigenschaft ist die folgende: Jedem geschlossenen, durch Stäbe nicht unter-

[1]) Siehe z. B. L. Henneberg: Graphische Statik starrer Systeme, Leipzig 1911, oder F. Schur: Vorlesungen über graphische Statik, Leipzig 1915.

[1]) Ein ähnlicher Zusammenhang, aber von viel geringerer Allgemeinheit findet sich angedeutet in Kherndl Graphische Statik der Baukonstruktionen (ungarisch).

brochenen Polygonzuge der Fachwerkfigur entspricht im Kräfteplan ein Punkt. Um diesen Satz aus unserem allgemeinen Satz zu erhalten, muß man also den allgemeinen Schnitt so wählen, daß er bloß Stäbe eines und desselben nicht unterbrochenen ebenen Polygons schneidet (Abb. 2). Man sieht ohne weiteres, daß diese Bedingung identisch ist mit jener, daß der Schnitt jenen getroffenen Stab unmittelbar nacheinander 2 mal oder $2n$-mal schneiden muß, wo n eine ganze Zahl. Bei einem solchen Schnitte kehrt nämlich unser Gleichgewichtspolygon nach Erledigung eines Stabes immer wieder in denselben Punkt zurück und dieser Punkt ist eben der dem geschlossenen Polygon entsprechende Bildpunkt. In unserer Ausdrucksweise möchten wir also diese Haupteigenschaft wie folgt formulieren: Jedem solchen Schnitt, welcher unmittelbar nacheinander 2 mal, 4 mal ... oder $2n$-mal die einzelnen Stäbe der Fachwerkfigur trifft, entspricht im Kräfteplan ein konzentrischer Kraftbüschel.

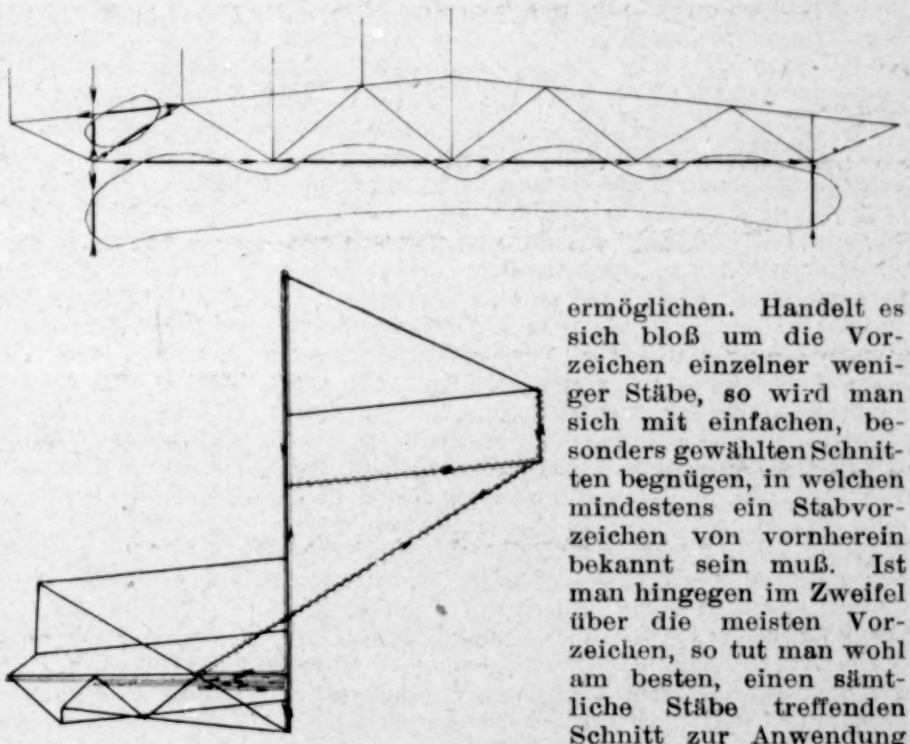


Abb. 2

In Abb. 3 ist ein solcher Schnitt gelegt, welcher sämtliche Stäbe des Fachwerkes trifft, so daß sich also der ganze Kräfteplan als Gleichgewichtspolygon in der in der Abbildung angedeuteten Weise deuten läßt.

Es ist unmittelbar einleuchtend, daß all diese Eigenschaften geeignet sind, um in schwierigeren Fällen, wo keine der bekannten Faustregeln zur Vorzeichenbestimmung genügt, diese ohne von Knotenpunkt zu Knotenpunkt vorschreiten zu müssen, zu ermöglichen. Handelt es sich bloß um die Vorzeichen einzelner weniger Stäbe, so wird man sich mit einfachen, besonders gewählten Schnitten begnügen, in welchen mindestens ein Stabvorzeichen von vornherein bekannt sein muß. Ist man hingegen im Zweifel über die meisten Vorzeichen, so tut man wohl am besten, einen sämtliche Stäbe treffenden Schnitt zur Anwendung zu bringen. Selbstverständlich sind auch die bekannten Vorzeichenregeln der Füllungsstäbe in unserem Satze mit enthalten und lassen sich mit seiner Hilfe auch auf Fachwerke mit Zwischensystemen unschwer sinngemäß erweitern.

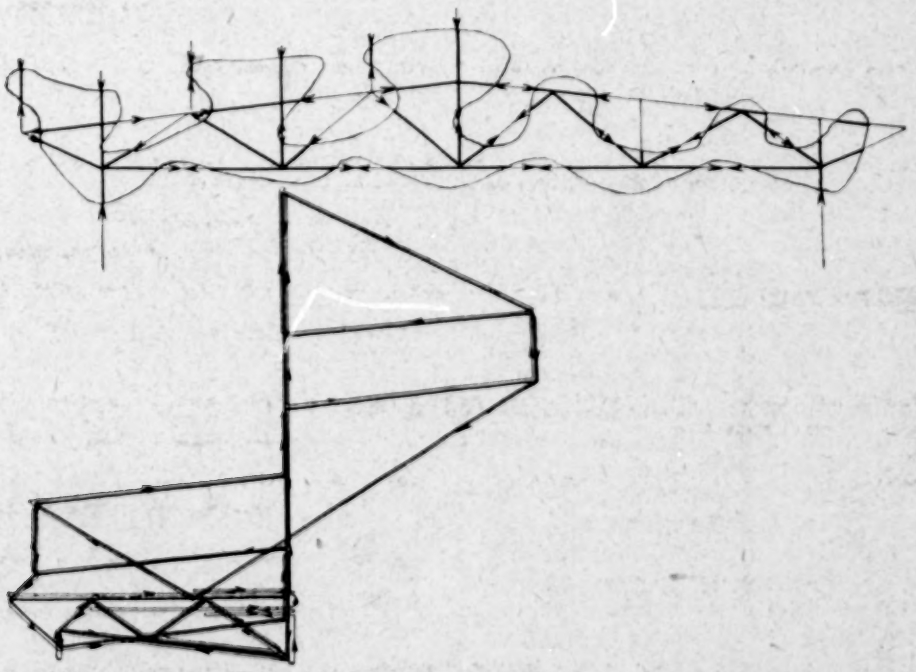


Abb. 3

Stettin. P. Neményi. 127

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr. HILDA **GEIRINGER,** Die Gedankenwelt der Mathematik. Die Bücher der Arbeitsgemeinschaft, im Einvernehmen mit dem Preußischen Ministerium für Wissenschaft, Kunst und Volksbildung herausgegeben von Dr. Werner Picht, Bd. 2. Verlag der Arbeitsgemeinschaft, Berlin und Frankfurt a. M. 1922. 199 S.

Das deutsche Schrifttum ist gewiß nicht reich an Büchern, die, ohne trivial oder unlesbar zu werden, zu dem Ganzen einer Wissenschaft Stellung zu gewinnen und diese darzulegen suchen. Ist ein solches Unternehmen schon in jedem Fall schwierig, so scheint es fast eine Unmöglichkeit gegenüber einer Wissenschaft, die wie die Mathematik sich dem Außenstehenden als ein ganz unzugängliches und undurchdringliches Geheimnis darstellt. Ja hier, wo der Eintritt in das Innere des Wissenschaftsgebiets Vorbereitungen von großer Gründlichkeit und Dauer erfordert, wird es schon zum Problem, was überhaupt sachlich gesagt werden kann ohne Benutzung der merkwürdigen Sprache und der Zeichen, deren Kenntnis dem Nichtmathematiker so völlig verschlossen ist.

Der Verfasserin, die die Anregung zu ihrer Arbeit wohl aus der Volkshochschulbewegung geschöpft hat, ist es nun in der Tat gelungen, ein vernünftiges und lesbares Buch zu schreiben, das über die Kreise hinaus, für die es ursprünglich gedacht war, Interesse beanspruchen darf. Sie beginnt mit einer kurzen Uebersicht über die Entstehung und erste Weiterbildung der Mathematik aus praktischen Gesichtspunkten heraus, wobei sie sich als eine treue und überzeugte Anhängerin Machs erweist. Von Machschen Ideen großenteils beherrscht ist auch der zweite, der Hauptteil des Buches, der den mathematischen Methoden gewidmet ist. Hier sucht die Verfasserin sehr richtig zwischen der »werdenden Wissenschaft« und dem zurzeit vorliegenden System der Mathematik zu unterscheiden; eine etwas schärfere Durchführung dieser Gegenüberstellung wäre wohl erwünscht und auch möglich gewesen. Die gegenwärtige Mathematik erscheint im Sinne Machs als ein Gebäude, das aus ursprünglich äußeren Erfahrungsinhalten durch allmähliche Abstraktion geschaffen, durch immer schärfer werdende Kritik befestigt, schließlich mittels konsequent durchgebildeter Axiomatik ökonomisch und wohnlich eingerichtet wurde. An dem Beispiel der Geometrie, deren Grundbegriffe und deren logische Möglichkeiten in den letzten Jahrzehnten besonders eingehend durchforscht worden sind, wird dieser Gedankengang in dem Buch breit ausgeführt. Die Geometrie bildet ja auch bei Mach und fast überall, wo von den Grundlagen der Mathematik die Rede ist, den bevorzugten Gegenstand der Betrachtung. Die Frage muß aufgeworfen werden, ob man damit wirklich das spezifisch Mathematische erschöpft, oder nicht viel eher nur den der Mathematik am nächsten stehenden Zweig der Naturwissenschaft behandelt? Auffallend ist es zumindest, daß man für das Gesamtgebiet der Geometrie in dem berühmten Erlanger Programm von Klein ein durchgreifendes Einteilungsprinzip besitzt, wie es für jedes naturwissenschaftliche Teilgebiet mit klar umgrenztem stofflichen Inhalt selbstverständlich ist, während es kaum gelingen dürfte, Aehnliches etwa für den heutigen Problemkreis der Analysis zu leisten.

Auf sicherere und für den größeren Leserkreis gewiß verständlichere Gebiete führen die Bemerkungen über die Anwendungen und die praktischen Leistungen der Mathematik. Ob die Rolle, die hier der Kleinschen Unterscheidung zwischen Präzisions- und Approximationsmathematik zugeschrieben wird, berechtigt ist, muß freilich dahingestellt bleiben. Sehr vernünftig ist die im Buche deutlich betonte Notwendigkeit der Beschränkung der Anwendungen auf solche Fragen, in denen die quantitative Betrachtungsweise, also die Mathematik, am Platze ist; in der Tat schadet nichts dem Ansehen der Mathematik so sehr wie das häufig auftretende Bestreben, ihre Formen und Verfahren auf Gebieten zur Geltung zu bringen, für die sie nicht geeignet sind. Noch einmal wendet sich der Gedankengang der abstrakten philosophischen Seite zu in dem Schlußabschnitt über die »Bedeutung der reinen Mathematik«. Hier bekennt die Verfasserin, daß sie neben den Machschen biologisch-ökonomischen Wurzeln der Wissenschaft für das Entstehen der Mathematik auch das Vorhandensein psychischer Voraussetzungen annimmt, deren Erforschung und Aufklärung sie sich von einer Anwendung psychoanalytischer Methoden (!) verspricht. Ein kurzer Anhang behandelt didaktische Fragen, hauptsächlich den Unterricht in der Volkshochschule betreffend, woran sich noch ein ausführliches Verzeichnis einschlägiger Werke knüpft. — Dem Verlag kann ich den Vorwurf nicht ersparen, daß er das Buch mit einer großen Zahl sinnstörender Druckfehler hat erscheinen lassen.

Zusammenfassend wird man sagen dürfen, daß das Werkchen, wenn man auch da und dort etwas klarere und reifere Urteile wünschen würde, eine schöne Leistung darstellt, eine originelle und erfreuliche Bereicherung der Literatur, wert der Beachtung, wert der Verbreitung und vor allen Dingen: wert gelesen zu werden. Mises. 178

Dr. GEORG **SCHEFFERS,** o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin, Lehrbuch der darstellenden Geometrie in zwei Bänden. Erster Band mit 404 Abbildungen im Text. Berlin 1919, Julius Springer. IX + 423 S.

Scheffers Buch, von dem hier zunächst der erste Band besprochen werden soll, ist als eine wertvolle Bereicherung der Literatur

über darstellende Geometrie zu bezeichnen. Der Verfasser weiß dem viel behandelten Stoffe mannigfache, neue Seiten abzugewinnen, die Darstellung verhindert Klarheit und Sorgfalt mit mathematischer Strenge und ist eingehend und ausführlich, ohne doch in Weitschweifigkeit sich zu verlieren, die Abbildungen genügen in bezug auf Ausführung und Bildwirkung allen Ansprüchen, zahlreiche historische Notizen mit den genauen Lebensdaten der einzelnen Forscher bieten eine sehr dankenswerte Beigabe. Das ganze Buch wird getragen von dem Geiste einer geometrischen Anschaulichkeit, wie er in unserer fast nur noch analytisch denkenden Zeit sympathisch zu begrüßen ist. Das Buch kann dem Mathematiker und auch dem Techniker empfohlen werden, der vor einer strengen Darstellung nicht zurückschreckt. Von den anderen bekannten Lehrbüchern über darstellende Geometrie unterscheidet sich das vorliegende Werk nach der vom Verfasser selbst ausgesprochenen Ansicht dadurch, daß es die Projektion in einer Tafel, sowohl die orthogonale wie die schiefe, ausführlich erörtert, bevor zum Zweitafel-System übergegangen wird. Dementsprechend ist mehr als die Hälfte dieses Bandes, nämlich 245 Seiten, der Projektion in einer Tafel gewidmet. Der Berichterstatter stimmt mit dem Verfasser darin überein, daß er es ebenfalls für pädagogisch richtig hält, mit der Projekiton in einerr Tafel zu beginnen, doch glaubt er, daß es genügt, diese kotierte Projektion nur soweit zu behandeln, daß sie für das Zweitafel-System vorbereitet. Man hat dann später immer noch die Möglichkeit, die eine oder andere Aufgabe bloß in einer Tafel durchzuführen.

Im einzelnen gliedert sich der Inhalt des ersten Bandes wie folgt. An die Behandlung der Grundbegriffe der senkrechten Projektion schließt sich ein Abschnitt über Dächer; hier wird in beachtenswerter Weise das mathematische Problem von dem der Dachausmittlung geschieden. Betrachtungen über einfache Böschungsflächen und Böschungskörper, sowie über Sonnenuhren führen über zur rechtwinkligen Axonometrie. Sodann wird der Begriff des quadratischen Momentes eingeführt, der aus dem Trägheitsmoment der Mechanik sich ergibt, wenn man die in den einzelnen Punkten konzentrierten Massen alle gleich der Einheit nimmt und er liefert ein Kennzeichen dafür, wann drei durch einen Punkt gehende Strecken die Projektion dreier durch eine Ecke gehender Würfelkanten sind. An einige Bemerkungen über regelmäßige Körper und Kristalle schließt sich eine längere Betrachtung der Ellipse, die als senkrechte Projektion des Kreises eingeführt wird; es gelangt auch die Momentenellipse zur Besprechung, welche der Culmannschen Trägheitsellipse ähnlich ist. Das 2. Kapitel behandelt die Kavalierperspektive, welche sodann zur Konstruktion der Schatten in Parallelbeleuchtung verwendet wird. Hier müßte der rein abstrakte Charakter der Parallelbeleuchtung, welche man bei technischen Zeichnungen ganz allgemein benutzt, schärfer betont werden; sie darf nicht, wie es S. 140 geschieht, mit der Beleuchtung durch die Sonne identifiziert werden. Nachdem sodann die Affinität und ihre Anwendungen besprochen, wird in bemerkenswerter Weise (§ 5) die freie Parallelprojektion behandelt. Daran schließt sich die allgemeine Axonometrie (Pohlkescher Satz) sowie ein Abschnitt aus der neueren Geometrie (harmonische Elemente, Involution).

Nun wendet sich die Darstellung der Projektion in zwei Tafeln zu. Erwähnung verdient § 3 (S. 292), in dem verschiedene Aufgaben aus der Geometrie des Raumes teilweise sehr originell gelöst werden. So bereitet der Verfasser die Betrachtung der abwickelbaren Fläche dadurch vor, daß er (S. 304) vorher eine Folge von Winkelfeldern und ihre Abwicklung darstellt. Von krummen Gebilden finden der Umdrehungskegel und der Umdrehungszylinder, sowie der allgemeine Kegel und der elliptische Zylinder Behandlung. Merkwürdig ist es, daß für den schiefen Kreiskegel und für den schiefen Kreiszylinder gerade die einfachsten Methoden der Abwicklung nicht erwähnt sind. Versehentlich wird mehrmals beim schiefen Kreiskegel die Linie, welche die Spitze des Kegels mit dem Mittelpunkte des Kreises verbindet, als Kegelachse bezeichnet (S. 346, 372, 373, 375). Sodann werden die Kegelschnitte behandelt. In einfacher Weise wird (S. 372) gezeigt, daß auch der schiefe Kreiskegel keine anderen ebenen Schnitte liefert wie der gerade Kreiskegel. Schattenkonstruktionen in Grund- und Aufriß, sowie eine nochmalige Erörterung der rechtwinkligen Axonometrie bilden den Schluß.

München, Januar 1922

Karl Doehlemann. 150

Professor P. B. **FISCHER,** Berlin-Lichterfelde, Einführung in die darstellende Geometrie. Mit 59 Abbildungen im Text, 90 Seiten. Aus Natur und Geisteswelt, Bd. 541. Leipzig u. Berlin 1921, B. G. Teubner.

Der Verfasser behandelt in einer sehr guten, alles wesentliche berücksichtigenden und vielfach originellen Darstellung die senkrechte Projektion auf eine Tafel, dann ganz kurz die Zentralprojektion (freie Perspektive) und sodann die Mongesche Zweitafelmethode. Erledigt werden die Grundaufgaben, sowie einfache Schnitte mit Prismen, Zylindern, Pyramiden und Kegeln. Kleine, aber doch genügend deutliche Abbildungen sind diesem Abschnitt beigegeben. Dagegen hat sich der Verfasser, wohl durch die mißlichen äußeren Verhältnisse beeinflußt, verleiten lassen, bei der Projektion auf eine Tafel mit den Abbildungen zu sparen. Es ist aber ganz undenkbar, daß man etwa bei dem Begriff der Projektion oder bei der Umlegung einer Ebene oder bei der Aufgabe, den Schnitt einer Geraden mit einer Ebene zu zeichnen, auf die Abbildung verzichten und sich mit einer Beschreibung begnügen kann. Paradox ausgedrückt könnte man eher auf den

Text als auf die Abbildung verzichten. Abb. 29 enthält ein kleines Versehen. Bei den Anwendungen des Pohlkeschen Satzes (S. 76) wäre, um Mißverständnisse zu vermeiden, darauf hinzuweisen, daß die betreffenden Parallel-Perspektiven nicht das durch Grund- und Aufriß gegebene Objekt, sondern ein dazu ähnliches wiedergeben.

München, Dezember 1921.

Karl Doehlemann. 139

NACHRICHTEN

Versammlung in Leipzig September 1922. Für die in der dritten Septemberwoche stattfindende Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte sind bisher die folgenden Vorträge aus dem Gebiete der angewandten Mathematik und Mechanik angemeldet (in alphabetischer Reihenfolge):

E. Artin-Göttingen: Ueber einen Fall von geodätischen Linien mit quasiergodischem Verlauf.

L. Hopf-Aachen: Messung der hydraulischen Rauhigkeit.

A. Nâdai-Göttingen: Theorie der Plattenbiegung und ihre experimentelle Bestätigung.

H. Reißner-Charlottenburg: Spannungsverteilung in offenen Zylinderschalen.

C. Runge-Göttingen: Graphische Methoden der Bahnbestimmung von Planetoiden.

W. Schachenmeier-München: Neuere Nietversuche.

L. v. Schrutka-Brünn: Ueber die reduzierten Fehlergleichungen.

W. Sternberg-Heidelberg: Ueber Randwertaufgaben der mathematischen Physik.

E. Trefftz-Aachen: Schwingungsprobleme und Integralgleichungen.

E. Waelsch-Brünn: Analysen des drei- und des vierdimensionalen Vektorraumes.

Diese Vorträge werden voraussichtlich am Donnerstag, den 21. September in einer Vor- und Nachmittagssitzung der Abteilung I (Reine und angewandte Mathematik) gehalten werden, soweit sie nicht der Abteilung III (Angewandte Physik) überwiesen werden.

Der im Vorjahre eingesetzte Vorbereitungsausschuß bestehend aus den Herren v. Mises, Prandtl und Reißner hat an die Fachvertreter an den deutschen Technischen Hochschulen ein Rundschreiben versandt, in dem zur Anmeldung von Vorträgen und zur Teilnahme an der Versammlung aufgefordert wird. Jeder der Genannten nimmt Anmeldungen von Vorträgen entgegen. Erwünscht sind in erster Reihe Mitteilungen über eigene Forschungsergebnisse auf einem der einschlägigen Gebiete.

Neuordnung an den Technischen Hochschulen Preußens. Die seit langem im Gange befindlichen Reformen an den Preußischen Technischen Hochschulen sind nunmehr durch einen Erlaß des zuständigen Ministeriums über die Schaffung von »Fakultäten« und die Neuordnung der Diplomprüfungen zu einem gewissen Abschluß gelangt. Die bisherigen sechs bis acht Abteilungen der einzelnen Technischen Hochschulen werden zu vier Fakultäten zusammengefaßt und zwar zu einer Fakultät für »allgemeine Wissenschaften«, einer Fakultät für »Bauwesen«, einer Fakultät für »Maschinenwirtschaft« und einer Fakultät für »Stoffwirtschaft«. Damit soll vor allem der scharfen Trennung, die in der Aus-Fachrichtungen zur Geltung kam, entgegengearbeitet werden. — Gegenüber den starren bisherigen Unterrichts- und Prüfungsplänen der einzelnen Abteilungen tritt nach der neuen Diplomprüfungsordnung bedeutend größere Freiheit, indem der einzelne Studierende berechtigt ist, eine Zusammenstellung von Prüfungsfächern ganz frei zu wählen und sie zwei Semester vor Ablegung des Examens der Fakultät zur Genehmigung vorzulegen. Allerdings werden in einem Anhang der Diplomprüfungsordnung bestimmte Zusammenstellungen, die einer besonderen Genehmigung nicht mehr bedürfen, angeführt. Unter diesen interessieren uns hauptsächlich die beiden an letzter Stelle stehenden für die »Fachrichtung Physik« und »Fachrichtung Mathematik«. Es war ein lange von einsichtigen Technikern angestrebtes Ziel, die Möglichkeit zu schaffen, daß einzelne hierfür besonders veranlagte Studierende eine weitergehende theoretische Ausbildung erfahren und sie beim Examen verwerten können. Diesem Gesichtspunkt ist nunmehr durch die neue Diplomprüfungsordnung reichlich Rechnung getragen. Sie gibt für die Fachrichtung Mathematik folgende Zusammenstellung von Lehrfächern bezw. Prüfungsgegenständen: A. für die Vorprüfung. Uebungsergebnisse: 1. Reine Mathematik. 2. Darstellende Geometrie. 3. Physik. 4. Mechanik einschließlich graphischer Statik. 5. Mathematisches Praktikum. 6. Vermessungskunde oder Astronomie oder Festigkeitslehre oder politische Arithmetik (in Uebereinstimmung mit Ziffer 6 der mündlichen Prüfung). Mündliche Prüfung: 1. Reine Mathematik. 2. Angewandte Analysis. 3. Darstellende Geometrie. 4. Mechanik. 5. Experimentalphysik. 6. Vermessungskunde oder Astronomie oder Festigkeitslehre oder politische Arithmetik (nach Wahl, jedoch in Uebereinstimmung mit Ziffer 6 Vorprüfung-Uebungsergebnisse). B. Hauptprüfung. Uebungsergebnisse: I. Pflichtfächer: 1. Nachweis der Teilnahme am Mathematischen Seminar. 2. Praktische Mathematik oder Versicherungsmathematik. 3. Theoretische Physik oder aus einem Gebiete der Technik. II. Wahlfächer: 4. Aus dem technischen Wahlfach der münd-

lichen Prüfung. Mündliche Prüfung: I. Pflichtfächer: 1. Sondergebiete der reinen Mathematik. 2. Angewandte Mathematik oder Versicherungsmathematik. 3. Theoretische Physik. II. Wahlfächer: 4. Mindestens ein Fach aus dem Gebiet der Technik oder der Volks- und Privatwirtschaftslehre.

Für die Fachrichtung Physik wird ein ähnlich aufgebauter Plan gegeben, der in der Vorprüfung Uebungsergebnisse hauptsächlich aus dem chemischen Laboratorium, dem elektrotechnischen oder Maschinen-Laboratorium und Vorlage von einfachen Zeichnungen aus dem Gebiete des Maschinenbaues oder der darstellenden Geometrie verlangt; in der mündlichen Prüfung anorganische Chemie, Grundzüge der Elektrotechnik und der beschreibenden Maschinenlehre; endlich in der Hauptprüfung fordert: Uebungsergebnisse I. Pflichtfächer: 1. Allgemeine Physik und physikalische Chemie. 2. Theoretische Physik oder höhere Mechanik oder theoretische Elektrotechnik oder theoretische Wärmelehre. II. Wahlfächer: 3. Aus mindestens einem Wahlfache der mündlichen Prüfung. Mündliche Prüfung. I. Pflichtfächer: Uebungsergebnisse aus den Wahlfächern. 1. Allgemeine Physik einschließlich physikalischer Chemie. 2. Theoretische Physik oder höhere Mechanik oder theoretische Elektrotechnik oder theoretische Wärmelehre. 3. Reine oder angewandte Mathematik oder Chemie. II. Wahlfächer: 4. Mindestens ein technisches Fach.

Die Lehr- und Prüfungspläne allein können natürlich nicht ausreichen, um die Entwicklung wie sie gewünscht wird, sicher zu stellen. Man muß hoffen, daß durch verständnisvolles Zusammenwirken der Dozenten, der Studierenden und der Behörden das Ziel, der Industrie gründlich theoretisch durchgebildete Ingenieure zuzuführen, erreicht werden wird.

Praktische Verwendung der Nomographie. Der Ausschuß für wirtschaftliche Fertigung der beim Reichskuratorium für Wirtschaftlichkeit in Industrie und Handwerk besteht, hat seit längerer Zeit die Nomographie in sein Arbeitsgebiet einbezogen und bereits eine große Anzahl von Rechentafeln herausgegeben, die in der Industrie Anklang gefunden haben. Um weitere Klärung über die Anwendung der Nomographie und die Möglichkeit der weiteren Ausnutzung dieses Hilfsmittels auf noch nicht bearbeiteten Gebieten herbeizuführen, ist vor kurzem beim Ausschuß für wirtschaftliche Fertigung ein »Arbeitsausschuß für graphische Rechenmethoden« gegründet worden, in dem Herr Dipl.-Ing. Winkel, Berlin, den Vorsitz übernommen hat. Die Durchführung der Arbeiten ist so gedacht, daß die Fragen von einzelnen Mitarbeitern in zusammenfassenden Berichten vorgetragen werden und in einer darauf folgenden Aussprache die Ansicht der übrigen Ausschußmitglieder zum Ausdruck gebracht wird. Außerdem soll laufend über die neu erschienene Literatur, die augenblicklich in verschiedenen Zeitschriften verstreut ist, Bericht erstattet werden. Die Mitarbeit im Ausschuß ist ehrenamtlich. Die Beiträge, die von den einzelnen Mitarbeitern auf Anregungen des Ausschusses geleistet werden, z. B. Vorträge, Ausarbeiten von Rechentafeln usw., bleiben ihr geistiges Eigentum.

Den Arbeiten des Ausschusses, der mit seiner Tätigkeit dazu beitragen will, den in der Praxis arbeitenden Ingenieuren Hilfsmittel für ihre rechnerischen Arbeiten zu schaffen, kann man nur recht reichen Erfolg wünschen.

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Bezeichnungen für Vektorgrößen.[1]) Zu dem in dieser Zeitschrift 1, 1921, S. 421 bis 422 veröffentlichten Entwurf XX des Ausschusses für Einheiten und Formelgrößen sei folgendes bemerkt:

1. Die Festsetzung von gothischen Buchstaben für Vektoren verstößt gegen die Regel, daß Formelzeichen möglichst so gewählt werden müssen, daß sie für internationale Verwendung in Betracht kommen können. Dies ist nun bei den gothischen Buchstaben nicht der Fall. Es mag in Deutschland wohl weniger bekannt sein, daß den Ausländern, die nicht Mathematiker, Physiker oder Sprachgelehrte sind, die gothischen Buchstaben, besonders die geschriebenen Zeichen, sehr wenig geläufig sind. Auch besitzen die meisten ausländischen Druckereien nur eine sehr geringe Anzahl gothischer Typen. Es ist also durchaus ausgeschlossen, daß jemals die gothische Schrift für Vektoren allgemeine Verwendung finden könnte. Dagegen verfügen alle Druckereien über fette lateinische Buchstaben, entweder vertikale oder schräge (Italien). Es sei also die fette vertikale oder schräge Schrift für alle Größen mit mehreren Bestimmungszahlen angenommen, in der Handschrift verwende man dazu einen Strich über dem Buchstaben. Die Bezeichnung von Vektoren durch griechische Buchstaben soll überhaupt vermieden werden, da meistens keine deutlich fetten griechischen Typen vorhanden sind und es in einem Buche sehr störend wirkt, wenn eine und dieselbe Größenart das eine Mal durch fetten Druck, das andere Mal durch Ueberstreichen gekennzeichnet wird. Die überstrichenen griechischen Buchstaben sind übrigens zu einem anderen Zweck nötig (vergl. 5). Eine Schwierigkeit entsteht, wo durch früheren Beschluß ein griechischer Buchstabe für einen Skalar festgelegt ist, z. B. ω für

[1]) Vgl. a. die Zuschriften von L. Prandtl, L. Schrutka und C. Boehm, ds. Zeitschr. 2, 1922, S. 161 bis 164.

die Winkelgeschwindigkeit. Diese Schwierigkeit läßt sich beseitigen, indem man zwar für den Winkelgeschwindigkeitsvektor einen lateinischen Buchstaben festsetzt, z. B. **u** (nach Föppl) oder **w** (ähnelt ω), neben u und w aber auch die Bezeichnung ω für den Betrag des Vektors zuläßt. Etwas ähnliches geschieht ja auch bei den Bestimmungszahlen des Radiusvektors **r**, die auch durch x, y und z angedeutet werden dürfen.

Es empfiehlt sich ferner, die skalaren Größen im allgemeinen mit schrägen lateinischen oder griechischen Buchstaben zu bezeichnen und die vertikalen Buchstaben zur Bezeichnung von Punkten, Geraden und Ebenen zu verwenden. Eine Regel ohne Ausnahme darf hier aber nicht aufgestellt werden, da der Autor die Freiheit behalten muß, bestimmte Gruppen von skalaren Größen durch vertikalen Druck hervorzuheben.

2. Zur Bezeichnung des Betrages eines einzelnen Vektors **a**, **A** verwende man stets den korrespondierenden schrägen Buchstaben, a, A, und nur in Verbindungen zwei vertikale Striche, z. B. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$. Letztere Bezeichnung ist doch für den allgemeinen Gebrauch viel zu schwerfällig.

3. Die Bezeichnung $\mathbf{a}^0$ für den zu **a** gehörigen Einheitsvektor, die sich nur auf eine sehr entfernte Analogie berufen kann, ist nicht nur irreführend, sondern direkt falsch. Jeder Vektor kann als Quaternion mit Skalarteil Null aufgefaßt werden und in der Quaternionenrechnung, wo bekanntlich die Potenzierung eines Vektors Bedeutung hat, ist daher $\mathbf{a}^0 = 1$. Es ist nun gar kein Grund vorhanden, für den Einheitsvektor gerade eine Bezeichnung zu wählen, die schon eine vollkommen bestimmte andere Bedeutung hat. Nur die Schreibweise $\mathbf{a}_1$ ist zu empfehlen, da $\mathbf{a}_1$ für andere Zwecke nötig ist (vergl. 11) und die 0 in $\mathbf{a}_0$ überhaupt keine Bedeutung hätte, der Index 0 überdies oft zur Andeutung von Initialwerten nötig ist.

5. 6. Mit der Festsetzung des skalaren Produktes: $ab\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})$ statt $-ab\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})$ nimmt man den alten Gibbsschen Standpunkt ein, der sich wissenschaftlich als unhaltbar und dazu praktisch als sehr unzweckmäßig erwiesen hat. Es dürfte bekannt sein, daß Gibbs, als er das Hamiltonsche quaternionische Produkt in zwei Teile zerlegte und diese richtig als selbstberechtigte Produkte erkannte, leider in ganz unberechtigter und durchaus unbegründeter Weise das richtige Hamiltonsche Minuszeichen in ein Pluszeichen verwandelt hat. Die Schüler Hamiltons haben sich damals vergeblich bemüht, den Vektoranalytikern das Unberechtigte dieses Ansatzes kar zu machen, es war das auch unmöglich, solange man glaubte, daß Zahlensysteme nur probierenderweise durch einen guten Griff zu Stande kommen könnten. Es hat sich aber später gezeigt, daß eine direkte Analysis für irgend welche geometrischen Größen genau auf gruppentheoretischem Wege berechnet werden kann, sobald die Größen vollkommen definiert sind. Es rührt dieses daher, daß nach dem von F. Klein 1872 gefundenen Klassifizierungsprinzip jede geometrische Größe zu einer ganz bestimmten Transformationsgruppe gehört, und daß sie ohne Angabe der zugehörigen Gruppe überhaupt nicht exakt definiert werden kann. Ist die Gruppe aber gegeben, so läßt sich auch das zugehörige Zahlensystem, das vollständig von der Gruppe abhängt, direkt berechnen. Führt man dies aus für die Gruppe der Drehungen in drei Dimensionen, so entsteht die gewöhnliche Vektoranalysis, und zwar mit dem Minuszeichen im skalaren Produkt[1]). Für höhere Dimensionenzahlen lassen sich in derselben Weise und ebenso einfach direkte Analysen bilden, die alle analog gebaut sind und so ineinander passen, daß jede höhere sämtliche niederen in sich enthält[2]).

Durch Zerlegung der bei dieser Rechnung zunächst auftretenden stets assoziativen Multiplikationen entstehen $n-1$ Teilmultiplikationen. Werden in dem gefundenen Systeme alle Größen gestrichen, die bei der speziellaffinen Gruppe zerstört werden, so entsteht eine Analysis, die bis auf einige Vorzeichenwechsel mit der Graßmannschen Ausdehnungslehre übereinstimmt[3]). Für den Mathematiker würden nun schon diese wenigen Tatsachen genügen, die dreidimensionale Vektoranalysis mit dem $-$-Zeichen als die von wissenschaftlichem Standpunkte einzig richtige zu erkennen. Der Praktiker verlangt aber noch mehr, er will wissen, was ihm die Wiedereinführung des $-$-Zeichens für direkte Vorteile bei der Rechnung bringt. An erster Stelle ist da die Tatsache zu erwähnen, daß infolge des zu Anfang fälschlich eingeführten $+$-Zeichens die ganze Vektoranalysis von $-$-Zeichen durchspickt wird, die in der unübersichtlichsten Weise verteilt sind. Es ist denn auch in der Gibbsschen Vektoranalysis durchaus unmöglich, eine allgemeine Regel zum Ausschreiben von Produkten von mehr als drei Faktoren anzugeben; für diese Produkte hat man immer Tabellen zu verwenden oder man muß die Formel, ausgehend von den drei Hauptregeln für Produkte von drei Vektoren stets aufs neue ableiten. Schon eine dieser Hauptregeln: $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = -(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,\mathbf{c}+(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{c})\,\mathbf{b}$ (Gibbs) macht dem Anfänger, der immer wieder die Stelle des $-$-Zeichens falsch behält, Schwierigkeiten, wie ja jeder, der Vektoranalysis doziert hat, hinlänglich erfahren hat.

Nun liegt dies nur an dem $+$-Zeichen. Bei Verwendung des richtigen $-$-Zei-

---

[1]) Zum erstenmal ausgeführt in meinen »Grundlagen des Vektor- und Affinoranalysis« Leipzig 1914.

[2]) Ausführlich dargestellt in »Die Zahlensysteme der geometrischen Größen« Nieuw Archief voor Wiskunde 13 (1919) S. 141 bis 156, 249 bis 266.

[3]) Graßmann trifft kein Vorwurf. Da er von einer anderen Gruppe ausging (der linearen homogenen) konnte er unmöglich vorhersehen, daß sein System durch Vorzeichenänderungen, die wesentlich der orthogonalen Gruppe entstammen, bedeutend, in den komplizierten (Müllerschen) Formeln sogar ganz bedeutend, vereinfacht werden konnte.

chens lassen sich sämtliche Produkte mit mehr als drei Faktoren, sowie die erwähnte Hauptregel ohne Tabellen und ohne Gedächtnisarbeit sofort ausschreiben.

Dies soll gezeigt werden. Nennen wir Produkte der Form $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,.\,\mathbf{c}$ Hauptprodukte. Hauptprodukte mit mehr als drei Faktoren kommen in der dreidimensionalen Vektoranalysis nicht vor. Ein Hauptprodukt mit i Faktoren läßt $i!$ Anordnungen der Faktoren zu, davon für $i>1$ die Hälfte mit dem $+$-Zeichen, die andere Hälfte mit dem $-$-Zeichen. Jede solche Anordnung heiße eine Permutation, z. B. $\mathbf{abc}$, $\mathbf{bca}$, $\mathbf{cab}$, $-\mathbf{acb}$, $-\mathbf{bac}$, $-\mathbf{cba}$.

Wir definieren nun die Begriffe erste, zweite und dritte Ueberschiebung zweier Permutationen.

Die erste Ueberschiebung zweier Permutationen, z. B. $\mathbf{abc}$ und $\mathbf{de}$ werde erhalten, indem die beiden benachbarten Faktoren, hier $\mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$, ein skalares Produkt bilden (mit dem $+$-Zeichen definiert), die anderen in der bestehenden Reihenfolge ein Hauptprodukt, also $(\mathbf{c}\,.\,\mathbf{d})\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,.\,\mathbf{e}$.

Die zweite Ueberschiebung entstehe, indem zuerst die beiden benachbarten, sodann die beiden nächsten ein skalares Produkt bilden, und die übrigen ein Hauptprodukt, also hier $(\mathbf{c}\,.\,\mathbf{d})\,(\mathbf{b}\,.\,\mathbf{e})\,\mathbf{a}$.

Die dritte Ueberschiebung entstehe, indem nacheinander drei skalare Produkte gebildet werden. Für $\mathbf{abc}$ und $\mathbf{def}$ also: $(\mathbf{c}\,.\,\mathbf{d})\,(\mathbf{b}\,.\,\mathbf{e})\,(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{f})$.

Es gilt nun die einfache Regel:

Das skalare Produkt zweier Hauptprodukte, das nicht selbst wieder Hauptprodukt ist (also nicht $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,.\,\mathbf{c}$), entsteht durch Summierung der höchsten Ueberschiebungen sämtlicher Permutationen der beiden Faktoren, wobei alle mehrfach auftretenden Produktbildungen einfach zu zählen sind. Für das vektorische Produkt gilt das gleiche in bezug auf die **ersten** Ueberschiebungen.

Man schreibt also z. B. direkt ohne Gedächtnisarbeit und ohne Tabellen an:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{b}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a}\times\mathbf{d}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\,\mathbf{a}\times\mathbf{c}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}\times\mathbf{d}+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})\,\mathbf{b}\times\mathbf{c}$$

$$\{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\}\,\mathbf{d}=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\,\mathbf{c}\times\mathbf{a}+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})\,\mathbf{b}\times\mathbf{c}.$$

Erst durch diese Ueberschiebungsregel[1]) wird die Vektoranalysis ein ebenso brauchbares Instrument wie die gewöhnlich Algebra, die sich ja ebenfalls ohne Tabellen verwenden läßt. Besonders bei den Differentiationsformeln ist die Ueberschiebungsregel nützlich. Man schreibt z. B. sofort an:

$$(\mathbf{a}\times\nabla)\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\times\nabla_I)\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})+(\mathbf{a}\times\nabla_{II})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\nabla\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}-\{(\mathbf{d}\cdot\nabla)\,\mathbf{c}\}\cdot\mathbf{a}+\{(\mathbf{c}\cdot\nabla)\,\mathbf{d}\}\cdot\mathbf{a}-(\nabla\cdot\mathbf{d})\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.$$

Sämtliche Umformungen mit ∇ werden in derselben Weise spielend leicht erhalten ohne Rechnung und ohne daß man irgend eine Formel zu behalten oder nachzuschlagen hätte.

An zweiter Stelle ist darauf hinzuweisen, daß die Multiplikation $\dot\times=\cdot+\times$, die quaternionische Multiplikation, bei Verwendung des $\dot\times$-Zeichens die assoziative Eigenschaft bekommt und mit Hülfe dieser Eigenschaft sich viele Rechnungen bedeutend kürzer und eleganter gestalten. Die Schraubachse der Bewegung eines starren Körpers berechnet sich z. B. folgendermaßen. Es sei:

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{w}\times\mathbf{r}$$

die Gleichung der Bewegung. Für einen Punkt der Schraubachse ist $\mathbf{v}\parallel\mathbf{w}$, also:

$$\mathbf{w}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{r})=\mathbf{v}_0\times\mathbf{w}.$$

Nun ist jedenfalls

$$\mathbf{w}\,(\mathbf{w}\,.\,\mathbf{r})=\lambda\,\mathbf{w},$$

wo λ ein unbekannter Parameter ist. Addition ergibt:

$$\mathbf{w}\,\dot\times\,(\mathbf{w}\,\dot\times\,\mathbf{r})=(\mathbf{w}\,\dot\times\,\mathbf{w})\,\dot\times\,\mathbf{r}=(\mathbf{w}\cdot\mathbf{w})\,\mathbf{r}=-w^2\mathbf{r}=\mathbf{v}_0\times\mathbf{w}+\lambda\,\mathbf{w},$$

oder

$$\mathbf{r}=-\frac{1}{w^2}\,(\mathbf{v}_0\times\mathbf{w}+\lambda\,\mathbf{w}).$$

In derselben Weise bestimmt man die Zentralachse eines Systems von Kräften[1]).

Die Multiplikationstabelle der quaternionischen Multiplikation ist:

↗	1	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$
1	-1	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$
$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_1$	-1	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$
$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	-1	$\mathbf{i}_1$
$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	-1

Die wichtigste Eigenschaft nach der assoziativen ist, daß ein quaternionisches Produkt von reellen Faktoren nur Null ist, wenn einer der Faktoren Null ist. Es existieren demzufolge zwei eindeutige Divisionen.

Zerlegung von $\nabla\,\dot\times\,\nabla\,\dot\times\,\mathbf{v}$ ergibt in der einfachsten Weise den Hauptsatz des zweiten Differentialquotienten:

$$\nabla^2\cdot\mathbf{v}=(\nabla\cdot\nabla)\,\mathbf{v}=(\nabla\,\dot\times\,\nabla)\,\dot\times\,\mathbf{v}=\nabla\,\dot\times\,(\nabla\,\dot\times\,\mathbf{v})=\nabla\,(\nabla\cdot\mathbf{v})+\nabla\times(\nabla\times\mathbf{v})=\text{grad conv }\mathbf{v}+\text{rot rot }\mathbf{v}.$$

Es verdient Beachtung, daß die $-$-Zeichen, die in der Gibbsschen Vektoranalysis bei der

[1]) Zuerst veröffentlicht »Arch. der Math. und Physik« 25 (1916) S. 243 bis 260.

[1]) Es wäre ein Irrtum zu meinen, daß nur das skalare Produkt mit dem $+$-Zeichen sich zu Anfang der Vektoralgebra in plausibler Weise an Hand der Formel für die Arbeit einer Kraft definieren läßt. Für den Mechanismus, der die Kraft ausübt, ist die geleistete Arbeit eine Energieabgabe und also von vornherein mit dem $-$-Zeichen behaftet. Das $+$-Zeichen entsteht nur, wenn man die Energiebilanz betrachtet für das System, welches die Kraft nicht ausübt, und ist also sogar weniger plausibel als das $-$-Zeichen.

Behandlung der Vektorfelder überall auftauchen, da —grad div an die Stelle von grad conv kommt, restlos verschwinden. Die Zerlegung eines Vektorfeldes lautet z. B.:

$$\mathbf{v} = \text{grad pot conv } \mathbf{v} + \text{rot pot rot } \mathbf{v},$$

wo pot der Integraloperator $\int_{\infty} \frac{d\tau \ldots}{4\pi a}$ ist. Die Integrationstabellen der wirbelfreien Reihe p, $\mathbf{v}$, q und der quellenfreien Reihe $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ sind:

	p	$\mathbf{v}$	q
p	conv grad pot p conv pot grad p pot conv grad p	conv pot $\mathbf{v}$ pot conv $\mathbf{v}$	pot q
$\mathbf{v}$	grad p	grad conv pot $\mathbf{v}$ grad pot conv $\mathbf{v}$ pot grad conv $\mathbf{v}$	grad pot q pot grad q
q	conv grad p	conv $\mathbf{v}$	conv grad pot q conv pot grad q pot conv grad q

	$\mathbf{a}$	$\mathbf{v}$	$\mathbf{w}$
$\mathbf{a}$	rot rot pot $\mathbf{a}$ rot pot rot $\mathbf{a}$ pot rot rot $\mathbf{a}$	rot pot $\mathbf{v}$ pot rot $\mathbf{v}$	pot $\mathbf{w}$
$\mathbf{v}$	rot $\mathbf{a}$	rot rot pot $\mathbf{a}$ rot pot rot $\mathbf{a}$ pot rot rot $\mathbf{a}$	rot pot $\mathbf{w}$ pot rot $\mathbf{w}$
$\mathbf{w}$	rot rot $\mathbf{a}$	rot $\mathbf{v}$	rot rot pot $\mathbf{w}$ rot pot rot $\mathbf{w}$ pot rot rot $\mathbf{w}$

Alle —-Zeichen sind verschwunden und die Analogie zwischen Quellen und Wirbeln wird nicht mehr durch unnötige Vorzeichenwechsel getrübt[1]).

Da nun schon in der Vektoranalysis selbst naturgemäß drei Produkte vorkommen, $\cdot$, $\times$ und $\overset{\cdot}{\times}$, ist die Andeutung der Art des Produktes durch Klammern unzweckmäßig. Uebrigens verstößt diese Bezeichnung gegen die Regel, daß keine Bezeichnungen festgesetzt werden dürfen, die spätere Erweiterungen nicht zulassen. Schon bei Erweiterung zur gewöhnlichen Affinoranalysis (bis zu Größen zweiten Grades) käme man in Schwierigkeiten, wenn man auch dort die Produkte nur durch Klammern unterscheiden wollte.

Auch die Bezeichnung $\mathbf{a}\,\mathbf{b}$ für das skalare Produkt ist zu verwerfen, diese Bezeichnung muß unbedingt freigehalten werden für das allgemeine (dyadische) Produkt zweier Vektoren der Affinoranalysis. Aus diesem Grunde ist auch die Bezeichnung $\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}$ für das Parallelepipedeum zu verwerfen. Will man hier durchaus kürzen, so könnte $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\,.\,\mathbf{c}$ empfohlen werden, da $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\,.\,\mathbf{c})$ doch Null ist. Richtiger und besonders Anfängern dringend zu empfehlen ist $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,.\,\mathbf{c}$.

7, 8). ∇ ist für sich kein Operator, sondern ein Operatorkern, der erst durch Zufügung einer Multiplikation zu einem Operator ergänzt wird. Dem —-Zeichen im skalaren Produkt entsprechend ist für $\nabla\cdot$ wirkend auf Vektoren wieder die ursprüngliche Maxwellsche Bezeichnung conv einzuführen.

Die Schwierigkeiten, auf welche die Vorbereitungskommission bei der Festlegung der Wirkungssphäre der Operatoren $\nabla\cdot$ und $\nabla\times$ gestoßen ist und die dazu geführt haben, daß über diese Wirkungssphäre überhaupt nichts festgesetzt ist, entstehen einzig und allein durch Verwendung von Klammern zur Andeutung der Art eines Produktes statt zur Gruppierung der Faktoren. Nur daher kommen Formeln wie die in der Erläuterung zu 8 vorkommende:

$$[\nabla\,\mathfrak{A}]\,[\nabla\,\mathfrak{B}] = \text{rot}\,\mathfrak{A}\ \text{rot}\,\mathfrak{B} - \mathfrak{A}\ \text{rot rot}\,\mathfrak{B},$$

wo das erste ∇ links ruhig über ∇-urschließende Klammern hinwegdifferenziert, was dem gewöhnlichen mathematischen Brauch direkt entgegengesetzt ist. Es muß mit Nachdruck darauf hingewiesen werden, daß die Vektoranalytiker, durch solche vollkommen unnötige Abweichungen von dem gewöhnlichen mathematischen Brauch der Vektoranalysis und dem rechnenden Praktiker den größten Schaden bereiten. Verwendet man Klammern nur dazu, wozu sie bestimmt sind, d. h. nur zu Gruppierungszwecken, so kommen solche Unzuträglichkeiten niemals vor. Es kann, wie in untenstehendem Entwurf angegeben ist, eine einfache Regel für die differenzierende Wirkung festgesetzt werden.

Eine solche Festsetzung ist geboten, wenn man überhaupt Bezeichnungen für Vektorgrößen festsetzen will; denn gerade Unterschiede in der Auffassung der Differentiation führen, viel eher als Unterschiede in den Bezeichnungen, zu Mißverständnissen und Fehlern.

Ausdrücke wie $\nabla_{\mathbf{a}}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ werden schwerfällig, wenn der zu differenzierende Faktor einen Index trägt oder zusammengesetzt ist, z. B.:

$$\nabla_{\frac{\mathbf{r}}{r^m}}\times\left(\mathbf{a}\times\frac{\mathbf{r}}{r^m}\right).$$

Besser ist es, durch einen Index anzugeben welche Stellung der Faktor im Produkt einnimmt:

$$\nabla_{II}\times\left(\mathbf{a}\times\frac{\mathbf{r}}{r^m}\right).$$

Es ist ein römischer Index zu wählen, da die arabischen Indizes zu einem anderen Zwecke nötig sind (vergl. 11).

9. Die Bezeichnung Grad φ, Div $\mathbf{a}$ und Rot $\mathbf{a}$ für die an Unstetigkeitsflächen auftretenden Differenzen sind durchaus unnötig. Die Ausdrücke:

$$\mathbf{n}\,(\varphi_2-\varphi_1),\quad \mathbf{n}\,.\,(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1),\quad \mathbf{n}\times(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1)$$

[1]) Es konnte hier nur an einigen wenigen Beispielen der Vorzug des —-Zeichens demonstriert werden. Für mehrere Beispiele siehe man meine von Dr. Manders herausgegebenen Vorlesungen über Vektoranalysis (Nijgh & van Ditmar, Rotterdam, 1920).

genügen vollkommen, sind fast nicht länger und lassen deutlich erkennen, worum es sich handelt. Dagegen sind die Bezeichnungen Grad usw. irreführend, da sie an grad, div und rot erinnern sollen, während doch Grad, Div und Rot gar keine Differentialoperatoren sind und auch den formalen Gesetzen dieser Operatoren in keiner Weise unterworfen sind. Aus demselben Grunde ist die Verwendung des Zeichens ∇ hier inkorrekt. Man soll die Einführung solcher Abkürzungen dem persönlichen Ermessen der Autoren überlassen, nicht aber Bezeichnungen vorschreiben, die nicht direkt nötig sind und deren Nutzen nicht allgemein anerkannt ist.

10. Das Alphabet enthält nicht so viele Buchstaben, daß man sich den Luxus erlauben könnte, drei Buchstaben $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ein für allemal festzulegen und damit dem anderweitigen Gebrauche zu entziehen, wo ein Buchstabe mit drei Indizes $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ vollkommen ausreicht. Uebrigens sind die Indizes 1, 2, 3 ohnehin für die Bezeichnung der Bestimmungszahlen vorzuziehen (vergl. 11). Die vorgeschlagene Bezeichnung hat doch den Vorteil, daß sie für mehr als drei Dimensionen verwendbar bleibt.

11. Die Projektion eines Vektors ist selbstverständlich ein Vektor, der Ausdruck »vektorielle Projektion« enthält also eine Bestimmung zu viel. Die Komponente eines Vektors ist ebenfalls ein Vektor, der Ausdruck »skalare Komponente« ist also direkt falsch, gemeint sind hier die Bestimmungszahlen in Bezug auf ein rechtwinkliges Achsenkrenz. Da Zahlenindizes sich schneller schreiben lassen als Buchstabenindizes, weniger Raum beanspruchen und auch für höhere Dimensionenzahl verwendbar sind, ist 1, 2, 3 statt x, y, z zu wählen. Es ist nicht klar, warum die Wahl des rechts- oder linkswendigen Achsenkreuzes nicht festgelegt ist. Wenn es irgend eine Sache gibt, die nichts mit den zugrunde liegenden Begriffen zu tun hat und nur durch eine Festsetzung geregelt werden kann, so ist es wohl gerade diese Wahl.

* * *

Entwurf.

1. Skalare werden im Druck mit nicht-fetten schrägen Buchstaben bezeichnet: a, A.

   Vektoren werden im Druck mit vertikalen fetten lateinischen Buchstaben bezeichnet: $\mathbf{a}, \mathbf{A}$. Schriftlich verwende man überstrichene Buchstaben.

   Quaternionen werden im Druck mit überstrichenen griechischen Buchstaben bezeichnet oder, wenn deutlich fette Buchstaben vorhanden sind, mit fetten griechischen Buchstaben: $\overline{\alpha}$ oder $\boldsymbol{\alpha}$.

2. Der Betrag eines Vektors $\mathbf{a}$ wird mit a bezeichnet, in Verbindungen mit $|\mathbf{a}|$, z. B. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$. Der Betrag eines Quaternions $\overline{\alpha}$ wird mit α_m bezeichnet, in Verbindungen mit $|\overline{\alpha}|$, z. B.: $|\overline{\alpha}+\overline{\beta}|$.

3. Der zum Vektor $\mathbf{a}$ gehörige Einheitsvektor wird mit $\mathbf{a}_1$ bezeichnet: $\mathbf{a} = a\,\mathbf{a}_1$. Bei besonderen Einheitsvektoren kann der Index $_1$ fortgelassen werden, z. B. $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$.

   Der zum Quaternion $\overline{\alpha}$ gehörige Einheitsquaternion mit $\overline{\alpha}_1$ bezeichnet, der zugehörige Einheitsvektor mit $\mathbf{a}_1$, der zugehörige Winkel mit α: $\overline{\alpha} = \alpha_m\,\overline{\alpha}_1 = \alpha_m(\cos\alpha + \mathbf{a}_1 \sin\alpha)$.

4. Zur Darstellung der Vektorsummen und Vektordifferenzen dienen die gewöhnlichen Plus- und Minuszeichen: $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

5. Das Zeichen für das skalare Produkt ist $\cdot$. Es ist $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -ab\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Zwischen einem Vektor und einem Skalar und zwischen zwei Skalaren kann das Zeichen fortgelassen werden. $\mathbf{a}^2\cdot$ bedeutet $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = -a^2$.

6. Das Zeichen für das vektorische Produkt ist $\times$, für das quaternionische Produkt $\overset{\times}{\cdot}$. Das vektorische Produkt zweier Skalare oder eines Skalars mit einem Vektor ist Null. Es ist also $\overset{\times}{\cdot} = \cdot + \times$.

7. Der Hamiltonsche Operatorkern wird mit ∇ (sprich Nabla) bezeichnet. Der Operator $\nabla\cdot$ wirkend auf einen Skalar bezw. Vektor wird auch mit grad bezw. conv bezeichnet, der Operator $\nabla\times$ auch mit rot. Man schreibt nicht $\mathrm{rot}^2\,\mathbf{a}$ sondern rot rot $\mathbf{a}$. Wirkt ein Operator nur differenzierend auf den ersten, zweiten usw. Faktor eines Produktes, so wird dies durch einen römischen Index angegeben, z. B. $\nabla_I \times (\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathrm{rot}_I(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$. $-\nabla^2\cdot$ kann durch $\triangle$ ersetzt werden. Der Integraloperator $\int_\infty \frac{d\tau\ldots}{4\pi a}$ wird mit pot bezeichnet.

8. Die differenzierende Wirkung der Operatoren erstreckt sich bis zur nächstfolgenden schließenden Klammer, deren zugehörende öffnende Klammer ∇ vorangeht.

9. Die Maßvektoren (drei zueinander senkrechte Einheitsvektoren) werden mit $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ und $\mathbf{i}_3$ bezeichnet.

10. Die Projektion eines Vektors $\mathbf{a}$ auf die x-Achse werde mit $\mathbf{a}_1$ bezeichnet, die zur x-Achse gehörige Bestimmungszahl mit a_1 usw. Der Skalarteil eines Quaternions $\overline{\alpha}$ wird mit α_0 bezeichnet, die anderen Bestimmungszahlen mit α_1 usw. Es ist also

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3$$

$$\overline{\alpha} = \alpha_0 + \alpha_1\mathbf{i}_1 + \alpha_2\mathbf{i}_2 + \alpha_3\mathbf{i}_3.$$

    Für die Bestimmungszahlen des Vektors $\mathbf{r}$ kann auch x, y, z geschrieben werden.

    Es werde im allgemeinen stets ein rechtswendiges Achsenkreuz bevorzugt.

Delft. van Schouten. 175

Kippsicherheit und Achterbildung an geschlossenen Kreisringen. Der Aufsatz von Hencky über Kippsicherheit und Achterbildung an geschlossenen Kreisringen[1]) bildet ein

[1]) Diese Zeitschr., 1921, S. 451.

vorzüglich durchgeführtes Beispiel für die Anwendung moderner Vektoralgebra, für das insbesondere wir von der älteren Generation dem Verfasser zu Dank verpflichtet sind. Ferner erkennt man, daß die Abschätzung von vermeintlichen Nebeneinflüssen auf Grund reiner »Anschauung« zu erheblichen Abweichungen von der Wirklichkeit führen kann. Im Zusammenhang hiermit verdient Erwähnung, daß die von mir entwickelten Formeln[2]), in welchen die Torsionssteifheit vernachlässigt war, einen richtigen mechanischen Sinn beibehalten, wenn man, wie im Wesen der behandelten Aufgabe liegt, voraussetzt, daß der knickende Kreisring durch die Zugstangen oder sonstwie, an der freien Verdrehung verhindert wird. Setzt man in den Gl. (1) von Hencky $\chi = 0$, also dauernd $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}'$, und fügt man zum Moment D ein um die Tangente drehendes Zwangmoment vom Betrage dF, auf die Ringlänge $a\,d\vartheta$ wirkend, hinzu, so bleibt die erste der Gleichgewichtsbedingungen (6): $Va = M' + D$ unverändert und führt auf die Differentialgleichung

$$\zeta^{(IV)} + \zeta''\left(\omega - \frac{1}{\lambda}\right) + \zeta\omega = 0.$$

Ist die Drehfestigkeit verschwindend klein, d. h. $C = 0$, so entsteht, wie man sich leicht überzeugt, gerade die von mir benutzte Differentialgleichung. Die Knickkraft bei Achterbildung nimmt dann den Wert

$$T_k = \frac{16}{3}\frac{JE}{a^2}$$

an. Die zweite Gleichgewichtsbedingung (6) muß das Zwangsmoment F berücksichtigen, und dient zu dessen Bestimmung.

Setzt man voraus, was etwa für ein Fahrrad nicht ganz unzutreffend sein mag, daß durch die Zwangsführung der Querschnittshauptachse die Neigung ζ aufgeprägt wird, so vereinfacht sich die Differentialgleichung mit $\chi = \zeta$ in

$$\zeta^{(IV)} + \zeta''(\omega + 1) + \zeta\omega = 0,$$

woraus sich die Knickkraft

$$T_k = 4\,\frac{JE}{a^2},$$

also merkwürdigerweise unabhängig von der Drehsteifheit erweist. Die Formeln von Hencky werden sich sicher noch in manchen anderen Sonderfällen als fruchtbar erweisen.

Zürich, 16. Februar 1922. 166

A. Stodola.

Herr Hencky, dem diese Zuschrift vor der Veröffentlichung vorgelegen hat, verzichtet auf eine Erwiderung. **Der Herausgeber.**

[1]) Dampfturbinen, IV. Aufl., S. 619.

Der adiabatische Elastizitätsmodul. In der auf S. 331 des 4. Heftes erwähnten Arbeit von Domke über die »Ergänzungsenergie elastischer Systeme« werden isothermische und adiabatische Aenderungen solcher Systeme untersucht und dabei der adiabatische Elastizitätsmodul definiert, der den isothermischen um ein geringes übertrifft.

Ich gestatte mir, darauf hinzuweisen, daß ich bereits in Heft 38 der Zeitschrift für Instrumentenkunde, Jahrg. 1918, S. 110, auf Grund einfacher diagrammatischer Betrachtungen des Verhaltens eines geraden elastischen Stabes obigen Begriff eingeführt und benutzt habe. Diese Betrachtungen verfolgten den Zweck, das den Ingenieuren bislang nur wenig geläufige Gebiet der Thermodynamik fester Körper auf eine ähnliche Weise näher zu bringen, wie es bei den idealen Gasen mit Hilfe des $p = v$-Diagrammes geschieht, und zwar im besonderen unter Rücksichtnahme auf die Vorgänge in den Spiralen der Chronometer-Unruhen. Dabei zeigt sich, daß die Adiabate im Spannungs-Dehnungs-Diagramm etwas steiler verläuft als die Isotherme, so daß man eben berechtigt ist, von einem adiabatischen Elastizitätsmodul E_a zu sprechen, der nach den dort durchgeführten Ueberlegungen die Größe hat:

$$E_a = E_{is} \cdot \left[1 + \frac{A\,\alpha^2\,E_{is}\,T}{c_p\,\gamma}\right] \text{kg/m}^2,$$

worin A das kalorische Aequivalent der Arbeit, α den Wärmeausdehnungskoeffizienten, γ das spezifische Gewicht, c_p die spezifische Wärme bei konstanter Zugbeanpruchung und T die absolute Temperatur bedeuten.

Bei der Anwendung zeigt sich, daß z. B. ein gewöhnlicher eingespannter Balken von der Länge l sich unter der Einwirkung eines reinen Momentes (Unruhspirale mit Phillipsscher Endkurve) zunächst nur eine Biegung um $\frac{Ml}{E_a J}$ Bogeneinheiten erleidet, die aber während der Abwanderung der Wärme aus den Druck- in die Zugfasern allmählich auf den Wert $\frac{Ml}{E_{is} J}$ anwächst, wobei die Entropie um $3 \cdot \frac{A\alpha l M}{h}$ Wärmeeinheiten pro Grad zunimmt. Hierin ist h die klein gedachte Trägerdicke. Daß dieser Vorgang auf die Funktionen des seine eigenen Fehler summierenden Chronometers von größerem Einfluß ist, als sich nach seiner geringen Beachtung erwarten ließe, liegt auf der Hand.

Hamburg, den 12. Oktober 1921. Technische Staatslehranstalten. Bock. 115

(Redaktionsschluß 30. Juni 1922.)

Berichtigung.

In dem Aufsatz: Zeichnerische Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen usw., S. 134, Zeile 17 und Zeile 10 von unten, lies:

$$A^2 + B^2 + A\frac{\partial B}{\partial \varphi} - B\frac{\partial A}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{statt} \quad A^2 + B^2 = A\frac{\partial B}{\partial \varphi} - B\frac{\partial A}{\partial \varphi}.$$

Neuendorff.

Verantwortlich für die Schriftleitung Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43.
Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

Bd. 2 **Ende August 1922** **Heft 4**

233

Inhalt:

	Seite
Hauptaufsätze. M. Schuler: Der Kreiselkompaß unter Einfluß der Schiffschwingungen	233
Fr. Schilling: Ueber eine Aufgabe der malerischen Perspektive des Leone Battista Alberti	250
E. Trefftz: Ueber die Wirkung einer Abrundung auf die Torsionsspannungen in der inneren Ecke eines Winkeleisens	263
C. Weber: Spannungsverteilung in Blechen mit mehreren kreisrunden Löchern	267
F. Noether: Ueber ein Problem der Stromleitung	274
R. Courant: Zur Theorie der kleinen Schwingungen	278
E. J. Gumbel: Wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen zum Strahlungsgesetz	286
Zusammenfassende Berichte. H. Hencky: Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie	292
C. Weber: Bisherige Lösungen des Torsionsproblems	299
Kurze Auszüge. Elastizität und Festigkeit	302
Kleine Mitteilungen. Aus dem Inst. f. angew. Mathem. a. d. Univers. Berlin: v. Mises: Die Bewegung des Dollarkurses seit 1918 — Friesecke: Zeichnerische Ermittlung von Fourier-Koeffizienten — Bergmann: Das Quadratwurzelziehen auf der Rechenmaschine	306
Buchbesprechungen. Eichelberg: Die thermischen Eigenschaften des Wasserdampfes — Meth: Theorie der Planetenbewegung — Timerding: Die Fallgesetze, ihre Geschichte und ihre Bedeutung — Riebesell: Steuer-Mathematik — Zimm: Ueber die Strömungsvorgänge im freien Luftstrahl — Charlier: Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik	317
Nachrichten	320
Zuschrift an den Herausgeber	323

HAUPTAUFSÄTZE

Der Kreiselkompaß unter Einfluß der Schiffschwingungen.

Von **M. SCHULER** in Kiel.

Schon bei dem Magnetkompaß war es ein schwieriges Problem, die Einwirkungen der Rollbewegung des Schiffes auf den Kompaß möglichst zu vermindern. In früherer Zeit, als Kompasse mit nur einer einzigen Nadel verwendet wurden, ergaben sich große Fehlweisungen des Magnetkompasses bei Schlingerbewegungen des Schiffes. Ein bedeutender Fortschritt wurde dadurch erzielt, daß man statt einer Magnetnadel zwei verwendete und diese so anordnete, daß das Trägheits-Ellipsoid des Kompaß-Systems zu einem Rotations-Ellipsoid wurde; man machte das Trägheitsmoment in der Nord-Süd-Ebene gleich dem Trägheitsmoment in der Ost-West-Ebene. Diese neue Rose, »die Normalrose der britischen Admiralität« wurde in den Vierziger-Jahren des vorigen Jahrhunderts auf allen englischen Kriegsschiffen eingeführt.

Daß bei ungleichen Trägheitsmomenten Fehler der Kompaßweisung entstehen müssen, ergibt sich aus dem Kreiselgesetze, nach dem frei rotierende Körper nur um die Achse ihres größten oder kleinsten Trägheitsmomentes stabil rotieren können[1]). In allen anderen Fällen bewegt sich der Körper gegenüber dem im Raume feststehenden Impulsvektor. Infolgedessen wird auch ein schwingender Körper sich gegenüber der Schwingungsebene verdrehen, wenn er nicht um eine Hauptträgheitsachse schwingt. Und eine Kompaßrose, die durch einen äußeren Anstoß in Schwingungen um eine beliebige horizontale Achse versetzt wurde, wird nur dann keine Drehungen um die vertikale Achse ausführen, wenn jene horizontale Achse immer größte (oder kleinste) Trägheitsachse ist, was nur bei einem Rotationsellipsoid eintritt. Dagegen muß eine Kompaßrose mit verschiedenen Trägheitsmomenten das Bestreben zeigen, eine Hauptträgheitsachse in die Ebene einzustellen, in der sie durch den Seegang in Schwingungen versetzt wurde.

Ein weiterer, bedeutender Fortschritt wurde durch die Konstruktion von W. Thomsons Trockenrose erzielt, der durch geschickte Anordnung der Magnete die Schwingungsdauer der Rose um die Vertikalachse bis auf 38 Sekunden erhöhte, während

[1]) Poinsot, Théorie nouvelle de la rotation d'un corps, Paris 1834. Klein u. Sommerfeld, Theorie des Kreisels, Leipzig 1897, Bd. I, S 130.

die alten Rosen nur 18 Sekunden besaßen. Dadurch wird bewirkt, daß die Kompaßrose bei schlingerndem Schiffe bedeutend ruhiger liegt, da ihre Eigenschwingungsdauer unter allen Umständen größer ist als die langsamsten Schlingerbewegungen des Schiffes[1]).

Bei der Konstruktion der Kreiselkompasse machte man sich die Erfahrungen am Magnetkompaß zunutze und glich die Trägheitsmomente in der Nord-Süd- und in der Ost-West-Ebene sorgfältig aus. Die Eigenschwingungszeit der Kompaßrose um den Meridian betrug ungefähr 80 Minuten, so daß die Forderungen von W. Thomson für den Magnetkompaß in idealer Weise beim Kreiselkompaß erfüllt waren. Trotzdem zeigten die Kreiselkompasse bei schwerem Seegang unter bestimmten Verhältnissen Fehler, die nicht auf Zufälligkeiten zurückgeführt werden konnten; denn auf allen mit dem Kreiselkompaß ausgerüsteten Schiffen von gleicher Bauart ergab sich bei gleichem Kurse und gleichem Seegang derselbe Fehler, sowohl der Größe wie der Richtung nach. Daraufhin angestellte Untersuchungen im Laboratorium bestätigten diese Erfahrungen und zeigten auch, daß durch eine Aenderung der Trägheitsmomente des Kompasses keine nennenswerte Aenderung des Fehlers hervorgerufen wurde. Es mußte also noch eine weitere, auf den Kreiselgesetzen beruhende Fehlerursache vorhanden sein.

Die einzige an dem Kompaßsystem angreifende eingeprägte Kraft ist die Schwerkraft, die den Kreisel in der horizontalen Lage fesselt und ihn bei Auslenkungen wieder in diese zurückzuführen sucht. Die Wirkung der Schwere schwankt aber an Bord eines schlingernden Schiffes infolge der auftretenden Beschleunigungsdrücke, sowohl der Größe wie der Richtung nach. Nur im augenblicklichen Drehpunkt des Schiffes ist dies nicht der Fall. Es wird aber nie möglich sein, den Kompaß genau in diesem Punkt aufzustellen, zumal dieser nach Ladung des Schiffes, Art und Richtung des Seeganges wechselt. Somit schien es das Wahrscheinlichste, daß diese Schwankungen der Schwere die beobachteten Fehler des Kompasses verursachten. Es zeigen nun kurze Rechnungen, daß Schwankungen in der absoluten Größe der Schwere keinen nennenswerten Fehler verursachen können. Diese müssen also auf Schwankungen in der Richtung der Schwere, d. h. also auf die horizontalen Komponenten der Beschleunigung zurückgeführt werden. Solche Beschleunigungen entstehen bei schlingerndem Schiff, wenn der Kompaß über oder unter dem Drehpunkt des Schiffes aufgestellt ist. Aber auch durch das Hin- und Herwerfen des Schiffes im Seegang oder durch periodische Verringerung der Schiffsgeschwindigkeit beim Durchschneiden der Wellenberge entstehen horizontale Beschleunigungen. Schließlich sei noch an die Schiffsschwankungen erinnert, die durch Maschinenerschütterungen, nicht gut ausbalanzierte Propeller und ähnliches entstehen. Die hierdurch verursachten Beschleunigungen sind zwar sowohl der Schwingungszeit wie dem Ausschlag nach von ganz anderer Größenordnung, für die mathematische Behandlung macht dies aber keinen Unterschied.

Um die Fehler zu bestimmen und gleichzeitig Mittel und Wege zu finden sie zu beseitigen, sind vom Verfasser nachfolgende Berechnungen durchgeführt worden. Dabei sind verschiedene Konstruktionen von Anschütz und von Sperry zugrunde gelegt, der Rechnungsgang und die erhaltenen Ergebnisse gelten aber ganz allgemein, und es lassen sich auf gleiche Weise auch die Fehler anderer Kreiselkompaßkonstruktionen bestimmen.

Die wichtigsten Ergebnisse der Rechnung sind kurz folgende:

1. Die Größe des Fehlers bei einem bestimmten Störungsmoment hängt nicht von den Trägheitsmomenten ab, sondern von den Schwingungszeiten des Kompasses um seine horizontalen Hauptachsen bei laufendem Kreisel.

2. Die Fehler werden am größten bei interkardinalen Störungsmomenten und verschwinden bei kardinalen Störungsmomenten.

3. Durch richtige Anordnung mehrerer Kreisel lassen sich die Fehler fast völlig kompensieren.

Der folgenden Rechnung soll zuerst die Konstruktion des Anschützschen Einkreiselkompasses zugrunde gelegt werden, wie sie in dem Jahrbuch der schiffbautechnischen Gesellschaft 1909 beschrieben ist[2]). Die Konstruktion ist in Abb. 1 schematisch

---

[1]) W. Thomson, On the perturbations of the Kompass produced by the rolling of the ship, 1874.

[2]) Weitere Beschreibungen: E. Klein u. A. Sommerfeld, »Ueber die Theorie des Kreisels«, Heft 4, S. 845 u. f. »Beschreibung des Kreiselkompasses« von Anschütz & Co., 1910 im Selbstverlag der Firma. »Der Kreiselkompaß als neueste Entwicklungsstufe des Kompaßwesens«, Nauticus 1913, von Connemann. »Lehrbuch für den Unterricht in der Navigation an der Kaiserlichen Marine-Schule«, 5. Teil, IV, von H. Maurer.

dargestellt. Der Kompaß besteht aus einem Kreisel mit horizontaler Achse, die mittels eines in Quecksilber schwimmenden Ringes um jede Achse drehbar aufgehängt ist. Die Kreiselachse wird durch das Schwere-Moment mga in der Horizontalebene gefesselt. Dabei bedeutet mg das Gewicht des Kompaß-Systems und a den Abstand von Aufhängepunkt zu Schwerpunkt. Bei laufendem Kreisel stellt sich die Kreiselachse in die Nord-Süd-Richtung ein und hat eine kleine Elevation gegen die Horizontale, die sich nach den Kreiselgesetzen errechnet zu:

$$\beta_0 = \frac{J}{mga} u \sin \varphi.$$

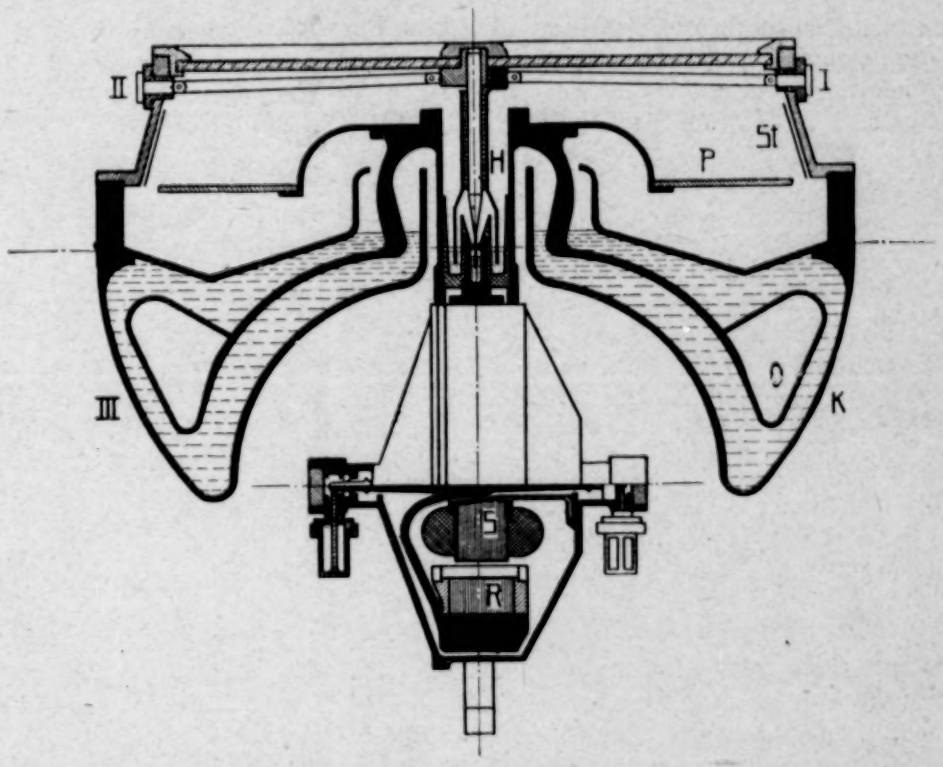


Abb. 1. Der Einkreiselkompaß von Anschütz & Co.
R Schwungkörper mit eingepreßtem Rotor; *S* Stator an der Kappe befestigt; *P* Rose; *O* Ringförmiger Schwimmer; *K* Schwimmerkessel, enthält Quecksilber; *St* Steuerstrich; *H* Mittelstift und Stromzuführung

Dabei ist J der Impuls des Kreisels, u die Winkelgeschwindigkeit der Erde und φ die geographische Breite.

Um die nachfolgenden Betrachtungen nicht unnötig kompliziert zu machen, wollen wir annehmen, daß der stets sehr kleine Winkel β_0 zu vernachlässigen sei, und auch bei laufendem Kreisel die Gleichgewichtslage der Kreiselachse in der Horizontalebene liege. Der Einfluß der Inklination für den Magnetkompaß ist von W. Thomson ausführlich behandelt. Seine Gleichungen gelten ohne weiteres auch für den Kreiselkompaß, wenn man nur die entsprechenden Werte für »Richtkraft« und »Inklination« ($= \beta_0$) einsetzt. Ein nachweisbarer Fehler des Kompasses kann nach den Betrachtungen von Thomson nicht entstehen.

I. Einkreisel-Kompasse.

1. Anschütz-Kompaß mit Einem Kreisel. Abb. 2 stellt die Draufsicht auf die Kompaßrose dar. Mit $N-S$ ist die Richtung der Kreiselachse bezeichnet. Unter einem Winkel ε hierzu liegt die Ebene des erzwingenden Kräftepaares (in der Abbildung mit EE bezeichnet); senkrecht zu dieser steht der Momenten-Vektor M. Das Moment sei dargestellt durch die Funktion $M \sin Nt$. In der Praxis werden die Störungsmomente allerdings keine einfachen Sinusfunktionen sein, jedoch läßt sich, wie bekannt, jede beliebige periodische Funktion in eine Reihe von Sinusfunktionen zerlegen. Es ist demnach nur notwendig, für jedes einzelne Glied der Reihe den Fehler getrennt zu ermitteln und den resultierenden Fehler durch Addition der Einzelresultate zu bilden; daß dies erlaubt ist, wird später bewiesen.

$\frac{N}{2\pi}$ ist die »Periodenzahl« des erzwingenden Momentes. Das Moment zerlegt sich nun in 2 Komponenten

$$M \sin Nt \sin \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

um die Rotationsachse und

$$- M \sin Nt \cos \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

um die Knotenlinie des Kreisels. Hierbei ist angenommen, daß der Momenten-Vektor M in der Horizontalebene liegt.

Das letztere Moment allein verursacht kleine Schwingungen des Kreiselkompasses um den Meridian. Es führt hierbei zu ganz unbedeutenden Störungen der Kompaß-

weisung, die durch Versuche nicht mehr nachweisbar sind. Sie können bei der folgenden Betrachtung vernachlässigt werden[1]). Das Moment um die Rotationsachse des Kreisels verursacht die wesentlichen erzwungenen Schwingungen des Kompaß-Systemes, die sich berechnen lassen. Zur Aufstellung der Gleichung betrachten wir Abb. 3.

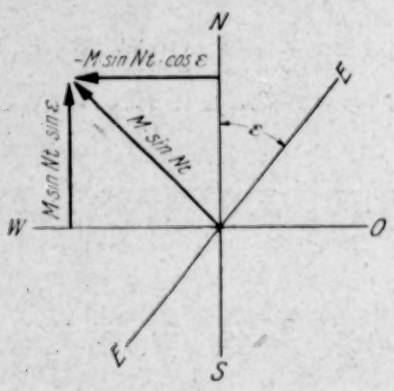


Abb. 2

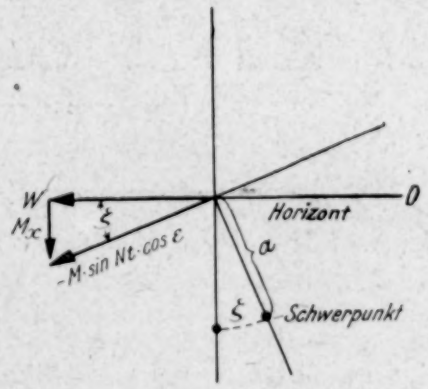


Abb. 3

Das Bild gibt einen vertikalen Schnitt durch das Kompaß-System in der O.-W.-Ebene, a ist die Schwerpunktstieferlage, ζ der Winkel, um den das System um die Rotationsachse aus der Horizontalebene gedreht ist. Für ζ lautet die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen:

$$A\frac{d^2\zeta}{dt^2} + f\frac{d\zeta}{dt} + m\,g\,a\,\zeta = M \sin Nt \sin\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Hier bedeutet A das Trägheitsmoment der Anordnung um die Schwingungsachse, f den Koeffizienten der Flüssigkeitsreibung und $m\,g\,a$ das Schweremoment des Kompasses. Aus diesem Ansatz geht hervor, daß der Schwerpunkt Schwingungen in der Ost-West Ebene um seine Mittellage ausführen muß. Da nun die erzwingenden Momente aus Beschleunigungsdrücken hervorgehen, die am Schwerpunkt angreifen, so neigt sich ihre Komponente in der Ost-West-Richtung $= -M \sin Nt \cos\varepsilon$ um diesen Winkel ζ, und es entsteht hierbei eine Vertikal-Komponente:

$$M_x = -M \sin Nt \cos\varepsilon \sin\zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Allerdings stimmt nun unsere Zerlegung Gl. (1) und (2) nicht mehr genau, da diese in der Horizontalebene vorgenommen wurde, während sich die Ebene des Momenten-Vektors um den Winkel ζ hierzu neigt. Es wäre also ein Korrekturglied mit $\cos\zeta$ hinzuzusetzen. In der Praxis wird jedoch der Winkel ζ immer nur wenige Grade betragen, so daß unser Ansatz genau genug stimmt. Aus dem gleichen Grunde ist auch in der Gl. (3) der Winkel ζ statt des sinus eingeführt. Es ist nun möglich, aus Gl. (3) den Winkel ζ zu berechnen und in Gl. (4) einzusetzen; man erhält dann die Größe des Momentes M_x. Zu diesem Zwecke haben wir die Differentialgleichung (3) aufzulösen. Bezeichnen wir mit n_0 die Eigenschwingungszahl des Systems um die Rotationsachse des Kreisels (in der Ebene des Winkels ζ), d. h. die Anzahl ganzer ungedämpfter Schwingungen in 2π Sekunden, die das System nach einem Anstoß sich selbst überlassen ausführt, dann erhalten wir:

$$\zeta = \frac{M \sin\varepsilon}{A} \frac{\sin(Nt-\psi)}{\sqrt{(n_0^2-N^2)^2 + N^2\left(\frac{f}{A}\right)^2}} = \frac{M \sin\varepsilon}{A\,N_1^2} \sin(Nt-\psi) = \zeta_0 \sin(Nt-\psi) \quad . \quad (5).$$

Der in der Gleichung vorkommende Winkel ψ ist die Phasenverschiebung des erregenden Momentes gegen die Rosenschwingung, ζ_0 der Maximalwert von ζ:

$$\zeta_0 = \frac{M \sin\varepsilon}{A\,N_1^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Nachdem wir nun den Winkel ζ errechnet haben, greifen wir auf unsere Gleichung (4) zurück. Da ζ klein bleiben soll, so können wir auch hier sinus mit Winkel vertauschen und erhalten:

---

[1]) Näheres siehe S. 246.

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -M \sin Nt \cos\varepsilon\, \zeta_0 \sin(Nt-\psi) \\ &= -M \sin^2 Nt \cos\varepsilon \cos\psi\, \zeta_0 + \frac{M}{2} \cos\varepsilon\, \zeta_0 \sin 2Nt \sin\psi \\ &= -\frac{M}{2}\zeta_0 \cos\varepsilon \cos\psi + \frac{M}{2}\zeta_0 \cos(2Nt-\psi)\cos\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (7).$$

Setzen wir noch den Wert ζ_0 aus Gl. (6) ein, so ergibt sich:

$$M_x = \frac{M^2 \sin 2\varepsilon}{4 A N_1^2}[\cos(2Nt-\psi) - \cos\psi] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8).$$

Das erste Glied enthält die periodische Funktion cos $(2Nt-\psi)$, d. h. das Moment hat die doppelte Periodenzahl wie das Störungsmoment. Es kann jedoch bei der langen Schwingungszeit des Kreiselkompasses keinen Weisungsfehler des Kompasses hervorrufen, da es periodisch sowohl positiv wie negativ wird. Dagegen enthält das zweite Glied keine periodische Funktion mehr; es hängt nur ab von der Größe des erzwingenden Momentes, dem Trägheitsmoment des Systems um die Rotationsachse, dem Verhältnis der Eigenschwingungszahl des Systems zu der des Störungsmoments und von der Reibung f. Es wird ein Maximum für $\varepsilon = 45^0$, also wenn die Störungsmomente in die Interkardinalkurse fallen und verschwindet für $\varepsilon = 0^0$, 90^0, 180^0 und 270^0. Um eine handlichere Form zu bekommen, wollen wir den Ausdruck $\frac{\cos\psi}{A N_1^2}$ umformen. Es gilt nun:

$$N_1^4 = (n_0^2 - N^2)^2 + N^2\left(\frac{f}{A}\right)^2; \quad A = \frac{m g a}{n_0^2}; \quad \sigma = \frac{f}{A}; \quad \cos\psi = \frac{n_0^2 - N^2}{N_1^2} \quad (9).$$

Setzen wir diese Größen ein, so erhalten wir:

$$\frac{\cos\psi}{A N_1^2} = \frac{1}{m g a}\left(\frac{n_0}{N}\right)^2 \frac{\left(\frac{n_0}{N}\right)^2 - 1}{\left[\left(\frac{n_0}{N}\right)^2 - 1\right]^2 + \frac{\sigma^2}{N^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10).$$

In der Regel ist nun der Reibungsfaktor des Systems um die Nord-Süd-Achse in der Flüssigkeit nicht bekannt, sondern nur das logarithmische Dekrement λ der Schwingung. Wir setzen deshalb $\sigma = 2 n_0' \frac{\lambda}{\pi}$, wo n_0' die gedämpfte Schwingungszeit der Rose um die Nord-Süd-Richtung bedeutet, oder da gilt:

$$n_0' = n_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2}},$$

so wird

$$\sigma = \frac{2 n_0}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 + 1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11).$$

Setzen wir nun diesen Wert in (10) ein, so erhalten wir

$$\frac{\cos\psi}{A N_1^2} = \frac{1}{m g a}\left(\frac{n_0}{N}\right)^2 \frac{\left(\frac{n_0}{N}\right)^2 - 1}{\left[\left(\frac{n_0}{N}\right)^2 - 1\right]^2 + \left(\frac{n_0}{N}\right)^2 \frac{4}{\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{m g a}\Xi \quad . \; . \; . \; (12).$$

Die Größe Ξ ist nur mehr vom Verhältnis der Schwingungszahlen $\frac{n_0}{N}$ und von dem logarithmischen Dekrement der Schwingung λ abhängig. Wir greifen wieder zu unserer Gleichung (8) zurück. Mit Benutzung der eben errechneten Größen ergibt sich das Moment, das den Kompaß aus seiner Richtung bringt, gleich dem zweiten Gliede der Gleichung (8):

$$M_{x1} = -M^2 \sin 2\varepsilon \frac{1}{4 m g a}\Xi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13).$$

Die Gleichgewichtslage des Kompasses ergibt sich aus der Bedingung, daß die Richtkraft gleich sein muß dem Störungsmoment. Der Kompaßfehler ist gleich dem Abstand der Gleichgewichtslage vom Meridian, wenn die Störung solange anhält, daß der Kompaß einschwingen kann. Bei kurzen Störungen erhält man den Fehler durch Ver-

folgung der Schwingungskurve des Kompasses nach der neuen Gleichgewichtslage. Dies macht keine Schwierigkeit. Es genügt, den Fehlerwinkel α_0 der Gleichgewichtslage zu kennen. Er bestimmt sich aus der Gleichung:

$$\sin \alpha_0 = - \frac{M^2 \sin 2\varepsilon \, \Xi}{4 m g a R}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14),$$

wenn R die Richtkraft des Kompasses bedeutet. Bestehen die erzwingenden Momente in Beschleunigungsdrücken, was beim Kompaß immer der Fall ist, so kann man setzen

$$M \sin Nt = ma\gamma \sin Nt,$$

worin γ die größte Beschleunigung ist, und es wird für diesen Fall:

$$\sin \alpha_0 = - \frac{m g a}{4R} \left(\frac{\gamma}{g}\right)^2 \sin 2\varepsilon \, \Xi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15).$$

Nun ist aber für den Kompaß:

$$\frac{m g a}{R} = \left(\frac{2\pi}{T_s} \frac{1}{U \cos \varphi}\right)^2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16),$$

wenn T_s die ungedämpfte Schwingungszeit des Kompasses, U die Rotationsgeschwindigkeit der Erde und φ die geographische Breite bedeutet, und mit Verwendung dieser Größen schreibt sich Gl. (15):

$$\sin \alpha_0 = - \left(\frac{\pi}{T_s} \frac{1}{U \cos \varphi}\right)^2 \left(\frac{\gamma}{g}\right)^2 \sin 2\varepsilon \, \Xi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17).$$

2. Diskussion der Fehlergleichung. Um nun den Kompaßfehler α_0 möglichst klein zu halten, wäre es nötig, T_s groß zu machen. Dies ist aber für den Kompaß ungünstig, da dadurch die Einstellungszeit zu sehr verlängert wird. Andererseits nützt es gar nichts, den Kreisel zu vergrößern oder die Richtkraft des Kompasses zu vermehren, da diese Größen in Gl. (17) gar nicht vorkommen. Das einzige Glied, über das wir noch verfügen, ist die Funktion Ξ, die von dem Verhältnis der Schwingungszahlen $\frac{n_0}{N}$ abhängt. Die Funktion Ξ kann in Kurven abhängig von $\frac{n_0}{N}$ dargestellt werden. Es ergibt sich, daß Ξ klein wird, wenn N ein bedeutendes Vielfaches gegen n_0 wird, d. h. die Eigenschwingungszahl des Systems um die Nord-Süd-Linie muß sehr klein gewählt werden. Nach der Rechnung wird der Fehler zu Null, wenn n_0 verschwindend klein wird. Dies ist selbstverständlich, da wir bei den Ableitungen der Gleichungen davon ausgegangen sind, daß das Kompaß-System nur Schwingungen um die Kreiselachse ausführen kann, während um die Ost-West-Achse keine Schwingungen erfolgen sollen. Wir wissen nun aus der Pendellehre, daß bei periodischen Anstößen dann keine Drehbewegungen um die Vertikale resultieren, wenn die Trägheitsmomente des Körpers in allen Achsen der Horizontalebene vollkommen gleich sind. Dieser Satz ist in unserem Falle dahingehend zu erweitern, daß auch die Schwingungszeiten eines Kreiselkompasses sowohl in der Vertikalebene durch Nord-Süd, wie in der Vertikalebene durch Ost-West gleich sein müssen. Da nun die Kompaßschwingung gegenüber der Schwingung des Systems um Nord-Süd für unendlich lang angesehen wurde, so ergibt die Rechnung den idealen Wert n_0 unendlich klein. In der Praxis reicht zur Herabdrückung des Fehlers durch Schiffsbewegungen schon eine grobe Annäherung an den Idealfall aus, wie Zahlenbeispiele leicht beweisen. Für $\frac{n_0}{N} = {}^1/_{10}$ werden die Fehler bereits unbedeutend. Eine so kleine Schwingungszahl kann jedoch durch Vergrößerung der Trägheitsmomente nicht mehr erreicht werden. Es ist notwendig, die Rose um die Nord-Süd-Linie als Kreiselpendel auszubilden.

Aus dieser Ueberlegung ist die Konstruktion des Dreikreiselkompasses hervorgegangen. Die Schwingungszeit der Rose um die Nord-Süd-Achse ist durch Kreiselkräfte auf etwa 60 Sekunden verlängert. Da die Schlingerperiode des Schiffes höchstens 12 Sekunden beträgt, so wird das Verhältnis $\frac{n_0}{N}$ kleiner als ${}^1/_5$. Hierfür ergibt sich $\Xi = - 0{,}042$. Dieser Wert ist allerdings für den Einkreiselkompaß berechnet und bildet für den Dreikreiselkompaß nur eine grobe Annäherung. Die genaue Fehlerberechnung des Dreikreiselkompasses ist später durchgeführt.

Für $\frac{n_0}{N} = \infty$ wird $\Xi = 1$, der Winkel α_0 wird negativ, die Kreiselachse sucht sich senkrecht zur Erschütterungsebene zu stellen.

In der Nähe von $\frac{n_0}{N} = 1$ wächst Ξ sehr stark, die Größe des Wertes hängt fast nur von der Dämpfung ab, wie dies bei allen erzwungenen Schwingungen der Fall ist.

Für $\frac{n_0}{N} = 1$ wird Ξ zu 0. Wir haben Harmonie zwischen Störungsmoment und Eigenschwingung der Rose.

Für $\frac{n_0}{N} < 1$ wird Ξ negativ, der Winkel α_1 positiv. Die Kreiselachse sucht sich in die Erschütterungsebene zu stellen. Die Kurve nähert sich auf dieser Seite asymptotisch dem Werte 0.

Wenn man den Kompaß genau für ein bestimmtes Erschütterungsmoment harmonisch abstimmt, so können demnach auch keine Fehler entstehen. In der Praxis ist dies jedoch nicht möglich, da die Schlingerperiode des Schiffes sich je nach dem Seegang ändert und in der Nähe des harmonischen Punktes die Funktion Ξ gerade die größten Werte annimmt. Als einzig sicherer Weg bleibt demnach, wie oben schon dargelegt, nur die Möglichkeit, das Verhältnis $\frac{n_0}{N}$ möglichst klein zu machen.

Zum Schluß sei noch der Beweis erbracht, daß es erlaubt ist, für eine Fouriersche Reihe den Fehler jedes Gliedes getrennt zu bestimmen und den resultierenden Fehler durch Addition der Einzelresultate zu bilden. Greifen wir auf Gl. (7) zurück, welche uns das Fehlermoment M_x angibt, und führen wir statt der einfachen sinus-Funktion die Reihe ein, von der nur die beiden ersten Glieder angeschrieben sind, so haben wir

$$M_x = [M_1 \sin Nt + M_2 \sin(2Nt + \varphi_2) + \ldots] \\ [\zeta_1 \sin(Nt - \psi_1) + \zeta_2 \sin(2Nt + \varphi_2 - \psi_2) + \ldots] \cos\varepsilon.$$

Multiplizieren wir aus und schreiben wieder nur die ersten vier Glieder an, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} M_x = \quad & M_1 \zeta_1 \sin Nt \sin(Nt - \psi_1) \cos\varepsilon \\ & + M_2 \zeta_1 \sin(2Nt + \varphi_2) \sin(Nt - \psi_1) \cos\varepsilon \\ & + M_1 \zeta_2 \sin Nt \sin(2Nt + \varphi_2 - \psi_2) \cos\varepsilon \\ & + M_2 \zeta_2 \sin(2Nt + \varphi_2) \sin(2Nt + \varphi_2 - \psi_2) \cos\varepsilon \\ & + \ldots \end{aligned}$$

Das erste Glied gibt den Fehler der Grundwelle der Fourierschen Reihe. Es deckt sich genau mit der bisher behandelten Fehlergleichung. Das 4. Glied entspricht im Aufbau dem ersten Gliede, wenn man für $(2Nt + \varphi_2)$ einen neuen Winkel setzt. Dies ergibt offenbar den Fehler der zweiten Welle der Fourierschen Reihe. Unsere oben aufgestellte Behauptung ist also nur dann richtig, wenn das 2. und 3. Glied zu Null werden. Wenn wir die Produkte auflösen, so erhalten wir keine quadratischen Winkelfunktionen der veränderlichen t, sondern nur Produkte verschiedener Schwingungszahlen wie etwa: $\sin 2Nt \sin Nt$. Dies sind aber periodische Funktionen, deren Integrale über die ganze Wellenlänge zu Null werden. Sie können also keinen Kompaßfehler verursachen. Was hier für das 2. Glied der Fourierschen Reihe bewiesen wurde, gilt natürlich für jedes beliebige Glied. Der gesamte Fehler kann also durch Addition der getrennt bestimmten Fehler der einzelnen Glieder der Reihe gefunden werden.

In ähnlicher Weise wie die Fehler des Einkreiselkompasses von Anschütz können auch diejenigen anderer Kompaßkonstruktionen mit einem Kreisel berechnet werden. Man gelangt dann gleichfalls zu einer Funktion, welche für die betreffende Konstruktion charakteristisch ist. So hat zum Beispiel der Verfasser die Fehlerkurve des amerikanischen Sperry-Kompasses berechnet, der hauptsächlich in Entente-Ländern eine größere Verbreitung gefunden hat. Bei den späteren Kurven ist die Funktion dieses Kompasses mit Σ bezeichnet.

II. Der Mehrkreisel-Kompaß.

Bei der Berechnung der Schlingerfehler des Einkreiselkompasses ergab sich, daß der Fehler um so kleiner wird, je größer die Eigenschwingungszeit des Kompaß-Systems um Nord-Süd gewählt wird. Eine lange Schwingungszeit eines Pendels erhält man aber am einfachsten durch Einbau von Kreiseln zur Stabilisierung: durch Ausbildung des Pendels zu einem »Kreiselpendel«. Demgemäß konstruiert man die Rose um die Nord-Süd-Linie als Kreiselpendel und gelangt so zu Zwei- und Dreikreisel-Apparaten. Um nun die Fehler eines solchen Kompasses bei Seegang errechnen zu können, müssen wir die

Bewegungen eines Kreiselpendels unter Einfluß periodischer Anstöße kennen. Diese Aufgabe soll demnach erst allgemein behandelt werden, da sie für viele andere Konstruktionen ebenfalls von Bedeutung ist.

1. Freie Schwingungen eines Kreiselpendels. Ein Kreiselpendel besteht aus einem Pendel P, in das ein Kreisel K mit vertikaler Rotationsachse eingebaut ist. Das Pendel schwingt um die Zapfen $1\,1'$, während der Kreiselrahmen um die dazu senkrechten Zapfen $2\,2'$ ausschlagen kann. Wir haben es also mit einem Kreiselverband von drei Freiheitsgraden zu tun. Der Ausschlagwinkel des Pendels zur Vertikalen sei mit φ, der des Kreiselrahmens zur Vertikalen mit χ bezeichnet. Das Pendel sei in der Vertikalen durch das Schweremoment $m_1 g s_1$ gefesselt, der Kreiselrahmen in der dazu senkrechten Ebene durch das Schweremoment $m_2 g s_2$. Um die Zapfen $1\,1'$ wirkt also ein äußeres Moment $m_1 g s_1 \sin\varphi$, um die Zapfen $2\,2'$ ein äußeres Moment $m_2 g s_2 \sin\chi$, beide Momente suchen die Kreiselachse in die Vertikale zurückzuführen. Das Trägheitsmoment des Verbandes um die Achse $1\,1'$ sei Θ_1, um die Zapfen $2\,2'$ Θ_2; der Impuls des Kreisels $= J$. Die Reibung, welche in den Lagern $1\,1'$ und $2\,2'$ entsteht, sei vernachlässigt. Die Winkel φ und χ sollen so klein bleiben, daß Sinus und Winkel vertauscht werden können und der Kosinus den Wert 1 behält. Die Rechnung ist demnach nur mehr streng genau für den Grenzfall kleiner Winkel.

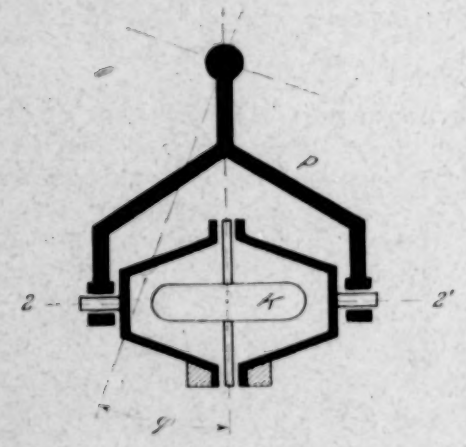


Abb. 4

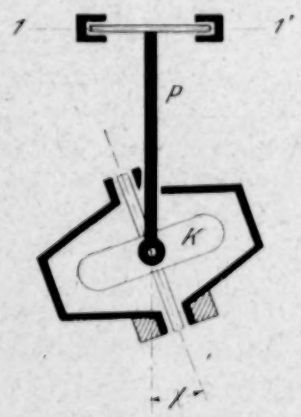


Abb. 5

Dieser Kreiselverband kann freie Schwingungen ausführen. Um dieselben zu errechnen, stellen wir die Eulerschen Gleichungen um die Zapfen $1\,1'$ und $2\,2'$ auf.

Wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + m_1 s_1 g \varphi + J \frac{d\chi}{dt} = 0 \\ \Theta_2 \frac{d^2\chi}{dt^2} + m_2 s_2 g \chi - J \frac{d\varphi}{dt} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (18).$$

Diese Gleichungen dividieren wir durch Θ_1 bezw. Θ_2 und führen die Schwingungszahlen des Kreiselpendels in der Ebene des Winkels φ und χ bei nichtlaufendem Kreisel ein. Dann erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} n_1' &= \sqrt{\frac{m_1 s_1 g}{\Theta_1}} = \text{Schwingungszahl in der Ebene des Winkels } \varphi \\ n_2' &= \sqrt{\frac{m_2 s_2 g}{\Theta_2}} = \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \chi \end{aligned}\right\} \quad . \quad (19).$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + n_1'^2 \varphi + \frac{J}{\Theta_1} \frac{d\chi}{dt} = 0 \\ \frac{d^2\chi}{dt^2} + n_2'^2 \chi - \frac{J}{\Theta_2} \frac{d\varphi}{dt} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (20).$$

Die Lösung dieser Gleichungen ist bekannt. Wir wissen, daß wir Schwingungen erhalten müssen und setzen demnach:

$$\varphi = \Phi e^{int}; \quad \chi = X e^{int}.$$

So schreiben sich die Gl. (20):

$$\Phi(-n^2 + n_1'^2) + in X \frac{J}{\Theta_1} = 0$$

$$X(-n^2 + n_2'^2) - in\Phi \frac{J}{\Theta_2} = 0.$$

Daraus erhalten wir:

$$\frac{\Phi}{X} = \frac{-inJ}{(-n^2 + n_1'^2)\,\Theta_1} = \frac{(-n^2 + n_2'^2)\,\Theta_2}{inJ} \quad \ldots\ldots (21),$$

und die gesuchte Schwingungszahl n des Kreiselpendels ergibt sich aus der Gleichung 4. Grades:

$$n^4 - n^2\left(n_1'^2 + n_2'^2 + \frac{J^2}{\Theta_1\,\Theta_2}\right) + n_1'^2\,n_2'^2 = 0 \quad \ldots\ldots (22).$$

Schreiben wir zur Abkürzung:

$$n_1'^2 + n_2'^2 + \frac{J^2}{\Theta_1\,\Theta_2} = a \text{ und } n_1'^2\,n_2'^2 = b,$$

dann errechnen sich die Schwingungszahlen des Kreiselpendels zu:

$$n_1 = \sqrt{\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}}, \quad n_2 = \sqrt{\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \quad \ldots\ldots (23).$$

Der Ausschlagwinkel des Kreiselpendels wird:

$$\varphi = \Phi_1 \sin n_1 t + \Phi_2 \sin (n_2 t + \nu) \quad \ldots\ldots (24).$$

Das Pendel vollführt also zwei übereinander gelagerte Schwingungen mit den Schwingungszahlen n_1 und n_2, wobei Ausschlag und Phasenverschiebung beider Schwingungen völlig unabhängig voneinander sind. Erstere Schwingung ist die langsamere, sie ist als Grund- oder Präzessionsschwingung, letztere als Nutationsschwingung des Kreiselpendels bezeichnet. ν ist der Phasenverschiebungswinkel der beiden Schwingungen zu Beginn der Zeit. Φ_1 und Φ_2 sind die maximalen Ausschläge der Präzessions- bezw. Nutationsschwingung.

Der Ausschlagwinkel χ des Kreiselrahmens wird durch eine ähnlich aufgebaute Gleichung bestimmt:

$$\chi = X_1 \cos n_1 t + X_2 \cos (n_2 t + \nu) \quad \ldots\ldots (25).$$

Die Schwingungen in der Ebene des Winkels φ und in der des Winkels χ sind zeitlich um 90^0 versetzt, wenn die Reibung gleich 0 gesetzt wird. Dies zeigt der Faktor $-i$ der Gl. (21). Aus dieser Gleichung ergibt sich ferner das Verhältnis des Maximalausschlages Φ_1 zu dem Maximalausschlag X_1 bezw. Φ_2 zu X_2:

$$\frac{\Phi_1}{X_1} = \frac{-n_1}{(n_1^2 - n_1'^2)}\,\frac{J}{\Theta_1}; \quad \frac{\Phi_2}{X_2} = \frac{-n_2}{(n_2^2 - n_1'^2)}\,\frac{J}{\Theta_1} \quad \ldots\ldots (26).$$

Ferner gilt die Beziehung:

$$n_1^2 + n_2^2 = a = n_1'^2 + n_2'^2 + \frac{J^2}{\Theta_1\,\Theta_2} \text{ und } n_1^2\,n_2^2 = b = n_1'^2\,n_2'^2 \quad \ldots (27).$$

Die letzte Gleichung sagt aus: Das Produkt der Schwingungszahlen des Pendels in der Ebene des Winkels φ und χ bei nichtlaufendem Kreisel ist gleich dem Produkt von Präzessionsschwingungszahl und Nutationsschwingungszahl bei laufendem Kreisel. Man hat in dieser Gleichung ein einfaches Mittel, die Nutationsschwingungszahl zu errechnen, wenn sie sich der direkten Beobachtung entzieht.

Für den Fall, daß der Kreiselimpuls groß wird, gelten folgende Näherungsgleichungen:

$$n_1 \sim \frac{g\sqrt{m_1\,s_1\,m_2\,s_2}}{J}; \quad \frac{\Phi_1}{X_1} \sim \sqrt{\frac{m_2\,s_2}{m_1\,s_1}} \quad \ldots\ldots (28),$$

$$n_2 \sim \frac{J}{\sqrt{\Theta_1\,\Theta_2}}; \quad \frac{\Phi_2}{X_2} \sim \sqrt{\frac{\Theta_2}{\Theta_1}} \quad \ldots\ldots (29).$$

2. Erzwungene Schwingungen eines Kreiselpendels. Es soll nun ein äußeres periodisches Moment um die Zapfen 11′ auf das Kreiselpendel wirken. Dasselbe sei dargestellt durch die Funktion $M \sin Nt$. Um die erzwungenen Schwingungen zu berechnen, kehren wir wieder zu den Eulerschen Gleichungen zurück. Sie lauten jetzt:

$$\Theta_1\frac{d^2\varphi}{dt^2} + m_1\,s_1\,g\,\varphi + J\frac{d\chi}{dt} = M \sin Nt; \quad \Theta_2\frac{d^2\chi}{dt^2} + m_2\,s_2\,g\,\chi - J\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad (30)$$

oder in anderer Fassung mit Einführung der Schwingungszahlen:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + n_1'^2\,\varphi + \frac{J}{\Theta_1}\frac{d\chi}{dt} = \frac{M}{\Theta_1} \sin Nt; \quad \frac{d^2\chi}{dt^2} + \quad \frac{J}{\Theta_2}{}^a t = 0 \quad \ldots (31).$$

Setzen wir ähnlich wie früher:

$\varphi = \varphi_0 e^{iNt}$; $\chi = \chi_0 e^{iNt}$; und statt $M \sin Nt$ schreiben wir $M e^{iNt}$,

dann erhalten wir:

$$\varphi_0 (-N^2 + n_1'^2) + iN\chi_0 \frac{J}{\Theta_1} = \frac{M}{\Theta_1}; \qquad \chi_0 (-N^2 + n_2'^2) - iN\varphi_0 \frac{J}{\Theta_2} = 0.$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{\chi_0}{\varphi_0} = \frac{iN}{(n_2'^2 - N^2)} \frac{J}{\Theta_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

und mit Benutzung von (27)

$$\varphi_0 = \frac{(n_2'^2 - N^2)}{\left[N^4 + n_1'^2 n_2'^2 - N^2 \left(n_1'^2 + n_2'^2 + \frac{J^2}{\Theta_1 \Theta_2}\right)\right]} \frac{M}{\Theta_1} = \frac{n_1'^2 (n_2'^2 - N^2)}{[N^4 - N^2 (n_1^2 + n_2^2 + n_1^2 n_2^2]} \frac{M}{m_1 g s_1} \quad (33).$$

φ_0 ist die Amplitude der erzwungenen Schwingung, deren Gleichung lautet:

$$\varphi = \varphi_0 \sin Nt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33\,a).$$

Wie bei allen erzwungenen Schwingungen, so stimmt auch beim Kreiselpendel die Periode der erzwungenen Schwingungen mit der Periode des Störungsmomentes überein. Die Schwingungen sind auch phasengleich mit dem Störungsmoment, da wir von Reibungskräften abgesehen haben. Ueber diese Schwingung lagert sich bei einem Anstoß noch die freie Schwingung des Kreiselpendels, die wir im vorherigen Abschnitt berechnet haben.

Die durch die Gl. (33) und (33 a) dargestellte Bewegung zeigt große Aehnlichkeit mit der erzwungenen Schwingung eines Doppelpendels. φ_0 wird unendlich für $N = n_1$ und $N = n_2$, d. h. wenn Rosonanz zwischen dem Störungsmoment und der Präzessions- oder Nutationsschwingung des Kreiselpendels vorhanden ist. Vor allem fällt bei der Gleichung aber auf, daß φ_0 den Wert 0 ergibt, wenn $N = n_2'$, und zwar gilt dies in allen Fällen, solange der Impuls des Kreisels nicht verschwindet. Die Belastungsfähigkeit des Kreiselpendels ergibt sich aus der Bedingung, daß der Winkel χ_0 keine unzulässigen Größen annehmen darf. Dieser errechnet sich aus Gl. (32). Die beiden Unendlichkeitsstellen heben sich gegenseitig auf, und wir erhalten endliche Werte für den Winkel χ_0 auch im Falle $N = n_2'$, nämlich:

$$\chi_0 = \frac{-iM}{n_2' J} \text{ für } n_2' = N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34).$$

Die Amplitude der erzwungenen Kreiselschwingung in der Ebene χ wird um so kleiner, je größer die Stabilität und der Impuls des Kreiselpendels gewählt wird. Der Ausschlag in der Ebene χ ist um eine Viertel-Periode gegenüber dem störenden Moment verzögert.

In diesem besonderen Falle also, wenn das erzwingende Moment in Resonanz mit den Schwingungen steht, die das Kreiselpendel bei nichtlaufendem Kreisel in der zum Moment senkrechten Ebene ausführt, bleibt das Pendel in der Ebene, in der das Moment wirkt, vollkommen in Ruhe und schwingt nur in der dazu senkrechten Ebene. In der Praxis ist diese vollkommene Resonanz allerdings nie zu erzielen. Man erhält bei einem Experiment immer Schwebungen, deren Perioden um so länger werden, je mehr man sich dem Fall der Resonanz nähert. Immerhin besteht in diesem Differenzglied $(n_2'^2 - N^2)$ der Hauptunterschied der hier abgeleiteten Gleichung gegenüber der Gleichung, welche für die erzwungene Schwingung des Fadenpendels gilt.

Wir wollen nun Gl. (33) so umformen, daß der Pendelausschlag abhängig von dem Verhältnis der Schwingungszahlen dargestellt ist.

Man erhält dann:

$$\varphi_0 = \frac{1 - \left(\frac{N}{n_2'}\right)^2}{\left(\frac{N}{n_1}\right)^2 \left(\frac{N}{n_2}\right)^2 - \left(\frac{N}{n_1}\right)^2 - \left(\frac{N}{n_2}\right)^2 + 1} \frac{M}{m_1 s_1 g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35).$$

Errechnet man für ein Fadenpendel von der Schwingungszahl n und dem Schweremoment msg den Schwingungsausschlag für ein erzwingendes Moment $M \sin Nt$, so erhält man den Schwingungsausschlag

$$H = \frac{1}{1 - \left(\frac{N}{n}\right)^2} \frac{M}{msg}.$$

Nennt man die von dem Verhältnis der Schwingungszahlen abhängige Funktion $\frac{1}{1 - \left(\frac{N}{n}\right)^2} = \Xi$, so kann man dieselbe als Kurve darstellen. Dies ist bei der Fehlerberechnung des Einkreiselkompasses bereits geschehen. Dementsprechend soll nun abkürzungsweise gesetzt werden:

$$\Xi_1 = \frac{1}{1 - \left(\frac{N}{n_1}\right)^2}; \quad \Xi_2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{N}{n_2}\right)^2}; \quad \Xi_2' = \frac{1}{1 - \left(\frac{N}{n_2'}\right)^2} \quad \ldots \quad (36).$$

Die Werte Ξ_1, Ξ_2 und Ξ_2' können aus den Kurven abgegriffen werden. Setzt man diese Größen in Gl. (35) ein, so ergibt sich für den Ausschlag des Kreiselpendels:

$$\varphi_0 = \left[1 - \left(\frac{N}{n_2'}\right)^2\right] \Xi_1 \Xi_2 \frac{M}{m_1 s_1 g} = \frac{\Xi_1 \Xi_2}{\Xi_2'} \frac{M}{m_1 s_1 g} \quad \ldots \quad (37).$$

Im allgemeinen wird man von einem Kreiselpendel möglichste Ruhe gegen alle äußeren Störungsmomente verlangen. Hierfür ist vor allen Dingen die Funktion Ξ_1 maßgebend. Bei einigermaßen schnell laufendem Kreisel kann dagegen in fast allen Fällen $\Xi_2 = 1$ gesetzt werden, da für ein Verhältnis $\frac{N}{n_2} = {}^1/_{10}$ der Fehler, der durch diese Vernachlässigung entsteht, nur mehr 1 vH wird. n_2 ist aber immer eine sehr große Zahl, denn die Nutationsschwingungen entziehen sich in den meisten Fällen überhaupt der optischen Beobachtung. Dagegen ist der Wert Ξ_2' für den Schwingungsausschlag von großer Bedeutung. Kann man vollkommene Harmonie, d. h. ungefähr auf 1 vH Genauigkeit erreichen, so wird der Wert Ξ_2' etwa 50, und man erhält dadurch nur ganz kleine Ausschläge des Kreiselpendels in der Ebene φ. Bei 10 vH Differenz der Schwingungszahlen sinkt der Wert etwa auf 5. Kommen in den Momenten Oberschwingungen von der doppelten Schwingungszahl vor, so wird hierfür der Wert Ξ_2' nur mehr ${}^1/_3$ und für Oberschwingungen von der vierfachen Periodenzahl sogar nur ${}^1/_{15}$. Bleibt dagegen die Schwingungszahl des Störungsmomentes kleiner als n_2', so nähert sich Ξ_2' dem Werte 1. Man sieht hieraus, daß die theoretisch günstigste Wahl $n_2' = N$ für die Praxis Gefahren in sich birgt. Im allgemeinen wird es am sichersten sein, n_2' möglichst groß zu halten, um einen weiten Abstand von dem gefährlichen Gebiete $n_2' < N$ zu bewahren[1]).

Ueber das Vorzeichen von φ_0 sei bemerkt, daß an dem Resonanzpunkte jeder Ξ-Funktion ein Wechsel des Vorzeichens eintritt. Will man nur den maximalen Ausschlag φ_0 des Pendels berechnen, so ist dieser Wechsel natürlich bedeutungslos. Er gewinnt erst Sinn, wenn wir Gl. (33a) betrachten. Das negative Vorzeichen sagt dann aus, daß die erzwungene Schwingung gegenüber dem Störungsmoment um 180° in der Phase verschoben ist.

3. Fehlweisung des Dreikreiselkompasses. Bei der folgenden Berechnung haben wir auf die errechneten Fehler des Einkreiselkompasses und die damals angesetzten Gleichungen zurückzugreifen. Wir haben wieder ein äußeres Störungsmoment $M \sin Nt$, dessen Ebene die Verbindungslinie Schwerpunkt-Aufhängepunkt enthalten muß, da alle äußeren Kräfte in dem Aufhängepunkt übertragen werden, während alle Massenkräfte im Schwerpunkt angreifen.

Der Uebersicht halber seien hier die Ausführungen, welche beim Einkreiselkompaß angegeben wurden, nochmals kurz wiederholt.

Abb. 2 stellt eine Aufsicht auf die Kompaßrose dar. Mit Nord-Süd ist die Achse des Kreisels bezeichnet. ε ist der Winkel zwischen der Ebene des Störungsmomentes

[1]) Vergl. Klein und Sommerfeld: Theorie des Kreisels, Bd. IV, S. 810 u. f. Die Berechnung des Schlickschen Schiffskreisels. Gl. (19) bei Sommerfeld ergibt bei entsprechender Aenderung der Bezeichnungen die gleichen Resultate wie unsere Gl. (35). Eine Ausnahme bildet das Vorzeichen, das bei Sommerfeld immer positiv angesetzt ist.

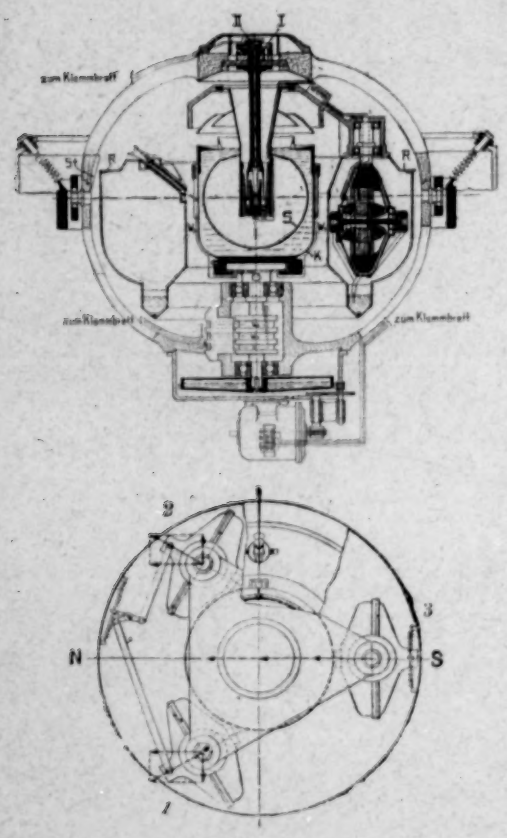


Abb. 6. Dreikreiselkompaß von Anschütz & Co.

Mit 1, 2 und 3 sind die drei Kreisel bezeichnet, von denen Kreisel 1 und 2 durch ein Gestänge so miteinander verbunden sind, daß ihre Winkel zur N-S-Linie der Rose gleich und entgegengesetzt sind. In ihrer normalen Lage werden sie durch Federn gehalten.

K Kessel mit Quecksilber gefüllt; *S* Kugelförmiger Schwimmer, der den Kompaß trägt; *R* Kompaß-Rose; *St* Steuerstrich.

und der Kreiselachse, gemessen in der Horizontalebene. Dann zerlegt sich das äußere Moment M sin Nt in zwei Komponenten:

$$\left.\begin{aligned} &-M \sin Nt \cos \varepsilon \\ &M \sin Nt \sin \varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \text{senkrecht zur Kreiselachse und} \quad \ldots \quad (38)$$

in Richtung der Kreiselachse.

Allerdings kann bei einem Dreikreiselkompaß nicht mehr von der Richtung der Kreiselachse gesprochen werden, da ja mehrere Kreisel mit verschiedenen Achsenrichtungen vorhanden sind. Wir haben dafür die Richtung des Gesamtimpulses des Systems zu setzen, die man durch graphische Addition aller Einzelimpulse erhält. Die beiden Komponenten, in die wir das äußere Moment zerlegt haben, fallen offenbar in die Vertikalebenen durch die beiden Hauptachsen des Kompaß-Systemes.

Führt das System Schwingungen um die Achse des Gesamtimpulses aus, so ändert sich dieser nicht der Richtung, sondern nur der Größe nach. Die schief gestellten Kreisel machen hierbei Präzessionsbewegungen in der Horizontalebene und werden durch Federzug wieder in ihre normale Lage zurück gebracht. Wir haben also ein Kreiselpendel nach den früheren Darlegungen vor uns, und zwar ist:

n_1' = die Schwingungszahl des Kompaßsystems um die Nord-Süd-Achse bei nicht laufenden Kreiseln,

n_2' = die Schwingungszahl der Kreisel um ihre vertikalen Drehzapfen unter Einwirkung der Federn bei nicht laufenden Kreiseln,

n_1 = die Grundschwingungszahl des Systems um Nord-Süd bei laufenden Kreiseln,

n_2 = die Nutationsschwingungszahl des Systems um Nord-Süd bei laufenden Kreiseln.

Hierbei muß $n_1\, n_2$ stets gleich $n_1'\, n_2'$ sein (vergl. Gl. 27).

Betrachten wir dagegen Schwingungen des Systemes in Richtung des Gesamtimpulses, also um die Ost-West-Achse der Kompaßrose, so haben wir hier als Moment, das in der Horizontalebene wirkt und die Kreisel in ihre Normallage zurückführt, die »Richtkraft« des Kompasses. Die Anordnung bildet ebenfalls ein Kreiselpendel, und es ist dann für diese Achse:

n_1 = Schwingungszahl des Kompasses um die Ost-West-Achse gleich der Schwingungszahl durch den Meridian bei laufenden Kreiseln,

n_2 = dazugehörige Nutationsschwingungszahl,

n_1' = Schwingungszahl des Systemes um die Ost-West-Achse bei nicht laufenden Kreiseln = n_1' um die Nord-Süd-Achse bei symmetrischem Kompaßsystem,

n_2' = Schwingungszahl des Kompasses um die Vertikale bei nicht laufenden Kreiseln, falls die Richtkraft wie bei laufenden Kreiseln vorhanden wäre.

Nun ist bei dem Kreiselkompaß n_1 eine sehr kleine Zahl, da ja eine Kompaßschwingung 1 bis $1^1/_2$ Stunden dauert. Ferner beweist ein Versuch, daß n_2 eine sehr große Zahl ist, da die Nutationsschwingung für das Auge nicht wahrnehmbar ist. Die Funktion Ξ_2 ist demnach gleich 1, während die Funktion Ξ_1 eine sehr kleine Zahl ist (etwa von der Größenordnung 10^{-5} bis 10^{-6}). Man kann also in erster Annäherung die Richtung des Kreiselimpulses als unveränderlich annehmen. Die Rechnung vereinfacht sich dann, indem wir nur die Schwingungen um die Impulsachse zu betrachten brauchen.

Betrachten wir nun Abb. 3 wieder. Sie stellt einen Vertikalschnitt durch die Ost-West-Linie der Kompaßrose dar. Der Schnitt steht senkrecht zum Gesamtimpuls, da dieser im Gleichgewichtsfalle der Kompaßrose horizontal liegt. ζ ist der Winkel, um den das Kompaßsystem um die Impulsachse zur Horizontalen geneigt ist. Um diesen Winkel ζ neigt sich hierbei auch der Vektor des Störungsmomentes, und wir erhalten hierbei eine vertikale Komponente

$$M_x = - M \sin Nt \cos \varepsilon \sin \zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39),$$

oder falls wir Sinus und Winkel vertauschen

$$M_x = - M \sin Nt \cos \varepsilon \zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39a).$$

Der Winkel ζ errechnet sich nun für ein äußeres Moment $= M \sin Nt \sin \varepsilon$ nach Gl. (37) und (33a)

$$\zeta = \frac{\Xi_1 \Xi_2}{\Xi_2'} \frac{M \sin \varepsilon \sin Nt}{mga} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40).$$

Hierbei ist mga das Schweremoment des Kompasses. Durch Kombination von Gl. (39a) und (40) ergibt sich nun

$$\left.\begin{aligned} M_x &= - \frac{M^2}{mga} \frac{\Xi_1 \Xi_2}{\Xi_2'} \frac{\sin 2\varepsilon}{2} \sin^2 Nt \\ &= - \frac{M^2}{4mga} \frac{\Xi_1 \Xi_2}{\Xi_2'} \sin 2\varepsilon (1 - \cos 2Nt) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41).$$

Wie beim Einkreiselkompaß zerfällt also das vertikale Drehmoment M_x, das die Fehlerweisung des Kompasses veranlaßt, in ein stetiges Drehmoment nach einer Seite und in ein rhythmisches Moment von doppelter Periodenzahl. Ersteres ist von der Lage der Kompaßrose zur Ebene des periodischen Störungsmomentes abhängig und erreicht seine Maximalwerte auf den Interkardinalkursen. Letzteres hat für uns kein weiteres Interesse, da es zu keinen Kompaßfehlern führen kann.

Bezeichnen wir mit M_f das Moment, das uns den Kompaßfehler bringt, so ist

$$M_f = - \frac{M^2}{4mga} \frac{\Xi_1 \Xi_2}{\Xi_2'} \sin 2\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42).$$

Und der Fehlerwinkel α_0 des Kompasses ergibt sich

$$\sin \alpha_0 = \frac{M_f}{R} = - \frac{M^2}{4mga} \frac{1}{R} \frac{\Xi_1 \Xi_2}{\Xi_2'} \sin 2\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43).$$

Nun ist aber M beim Kompaß das Moment von Beschleunigungskräften und läßt sich demnach auch $ma\gamma$ schreiben. Ferner ist für den Kreiselkompaß (siehe Gl. (16)):

$$\frac{mga}{R} = \left(\frac{2\pi}{T_s} \frac{1}{U \cos \varphi}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44).$$

Demnach erhalten wir als Fehlerweisung des Kompasses:

$$\sin \alpha_0 = - \left(\frac{\gamma}{g}\right)^2 \left(\frac{\pi}{T_s} \frac{1}{U \cos \varphi}\right)^2 \frac{\Xi_1 \Xi_2}{\Xi_2'} \sin 2\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45).$$

Diese Gleichung stimmt mit Gl. (17) des Einkreiselkompasses im Aufbau vollkommen überein, nur daß an Stelle der einfachen Funktion Ξ die kompliziertere $\frac{\Xi_1 \Xi_2}{\Xi_2'}$ getreten ist. Je nachdem diese Funktion positives oder negatives Vorzeichen besitzt, haben wir vier Hauptfälle zu unterscheiden. Wir müssen uns daran erinnern, daß $n_1 < n_2' < n_2$ ist. Dann gilt

1. $N < n_1$ und damit auch $N < n_2' < n_2$: Ξ_1, Ξ_2 und Ξ_2' positiv : sin α_0 negativ, die Nord-Süd-Linie der Kompaßrose sucht sich senkrecht zur Erschütterungsebene zu stellen.
2. $n_1 < N < n_2' < n_2$: Ξ_1 negativ Ξ_2' und Ξ_2 positiv : sin α_0 positiv, die Nord-Süd-Linie der Kompaßrose sucht sich in die Erschütterungsebene zu drehen.
3. $n_1 < n_2' < N < n_2$: Ξ_1 und Ξ_2' negativ Ξ_2 positiv : sin α_0 negativ, die Nord-Süd-Linie der Kompaßrose sucht sich senkrecht zur Erschütterungsebene zu stellen.
4. $n_1 < n_2' < n_2 < N$: Ξ_1, Ξ_2' und Ξ_2 negativ : sin α_0 positiv, die Nord-Süd-Linie der Kompaßrose sucht sich in die Erschütterungsebene zu drehen;
   für $N = n_1$ und $N = n_2$ wird der Fehler des Kompasses unendlich,
   für $N = n_2'$ wird der Fehler zu Null.

Für den Wert $\Xi_1 \Xi_2 \frac{1}{\Xi_2'}$ ist in den Tabellen die Bezeichnung E eingeführt.

Bisher haben wir angenommen, daß die Impulsachse eine unveränderliche Richtung habe. Dies ist natürlich nicht streng richtig. Wir können aber jetzt nach dem Superpositionsgesetz umgekehrt vorgehen und annehmen, der Kompaß werde in der Ost-West-Richtung festgehalten und könne nur Schwingungen in der Nord-Süd-Ebene ausführen.

Wir haben in dieser Ebene ebenfalls die Anordnung eines Kreiselpendels. Wir errechnen dann für die nun geltenden Schwingungszahlen den Fehler des Kompasses. Die Summe beider Fehler ergibt den wahren Fehler des Kompasses. Der Fehler des Kompasses verschwindet für ein beliebiges Erschütterungsmoment, wenn die Schwingungszahlen n_1, n_2 und n_2' gemessen in der Nord-Süd-Ebene und in der Ost-West-Ebene der Rose einander gleich sind. Während bei dem Magnetkompaß zur Vermeidung von Schlingerfehlern die Forderung erfüllt werden muß, daß die Trägheitsmomente der Rose gemessen um die Nord-Süd- und um die Ost-West-Achse gleich sind, so haben wir beim Kreiselkompaß wegen der Schwingungen der Kreisel die oben angegebene kompliziertere Beziehung.

Wir haben bei den bisherigen Betrachtungen des Mehrkreiselkompasses die Konstruktion von Anschütz zugrunde gelegt. Die Rechnung ergibt aber, daß es völlig gleichgültig ist, wie die Kreisel angeordnet werden. Sie gilt also auch für jede andere Kreiselkompaß-Konstruktion mit mehreren Kreiseln. Zur Beseitigung des Schlingerfehlers wird nur verlangt, daß die Schwingungszahlen des Kompaßsystems in den verschiedenen Ebenen den oben abgeleiteten Bedingungen genügen.

In der Praxis reicht eine grobe Annäherung an diesen Idealfall aus, um die Fehler genügend klein zu machen. Bei dem Dreikreiselkompaß von Anschütz wird die Schwingungszeit um die Nord-Süd-Achse von einer Schwingung pro Sekunde auf eine Schwingung pro Minute, d. h. auf den 60fachen Wert des Einkreiselkompasses verlängert. Es hat sich gezeigt, daß dann die Fehler an Bord von Schiffen schon verschwindend klein werden.

In letzter Zeit hat auch Sperry nach dem Vorbild von Anschütz Kompasse mit mehreren Kreiseln gebaut. Da dem Verfasser über die Konstruktion Näheres nicht bekannt ist, so muß er von einer Fehlerberechnung hier absehen. Dagegen hat die deutsche Marine Vergleichsversuche zwischen einem Sperry-Zweikreiselkompaß und dem Anschütz-Dreikreiselkompaß gemacht und die Ergebnisse im Auszug in der Marinerundschau veröffentlicht. Beide Kompasse wurden nebeneinander an demselben Pendel aufgehängt und hin- und hergeschwungen. Jede Minute wurde die Differenz gegen den Meridian abgelesen.

Bei den Versuchen ergaben sich folgende Fehlweisungen der Kompasse:

	größte Deviationen:		Dauerdeviationen:	
	Sperry	Anschütz	Sperry	Anschütz
1. Versuch	$-1{,}6^0$	$+0{,}4^0$	$-1{,}4^0$	$+0{,}4^0$
2. »	$-6{,}0^0$	$-0{,}3^0$	$-4{,}0^0$	$-0{,}3^0$
3. »	$-9{,}0^0$	$-1{,}2^0$	etwa $-6{,}0^0$	unter -1^0

Man erkennt die weite Ueberlegenheit der Anschützschen Konstruktion. Wahrscheinlich ist das Kreiselpendel bei Sperry nicht so sorgfältig durchgebildet wie bei Anschütz.

4. Schlussfolgerung. Die bisherigen Berechnungen sind für das Verhältnis der Eigenschwingungszahlen des Kompasses zu der Schwingungszahl des Störungsmomentes durchgeführt worden. Es ist dies eine dimensionslose Größe, und die Ergebnisse haben hierdurch allgemeine Gültigkeit. Im allgemeinen ist jedoch nur die Schlingerzeit des Schiffes bekannt, und es muß hieraus erst das Verhältnis der Schwingungszahlen errechnet werden.

Um nun ein besseres Bild der Kompaßfehler zu erhalten, sind in Abb. 7 die Funktionen Ξ, Σ und E abhängig von der vollen Schwingungszeit des störenden Momentes aufgetragen. Die Kurven verlieren hierdurch allerdings ihre allgemeine Gültigkeit, und es sind der Zeichnung die Größen ausgeführter Kompasse zugrunde gelegt.

Die Ξ-Kurve des Anschütz-Einkreiselkompasses ist für eine Schwingungszeit des Systemes um die Nord-Süd-Achse = 2 Sekunden aufgestellt und einen Dämpfungsfaktor der Schwingungen = 0,5.

Der Σ-Kurve des Sperry-Kompasses ist eine Schwingungszeit der kardanischen Hängung von ebenfalls 2 Sekunden zugrunde gelegt und ein Dämpfungsfaktor = 0,5.

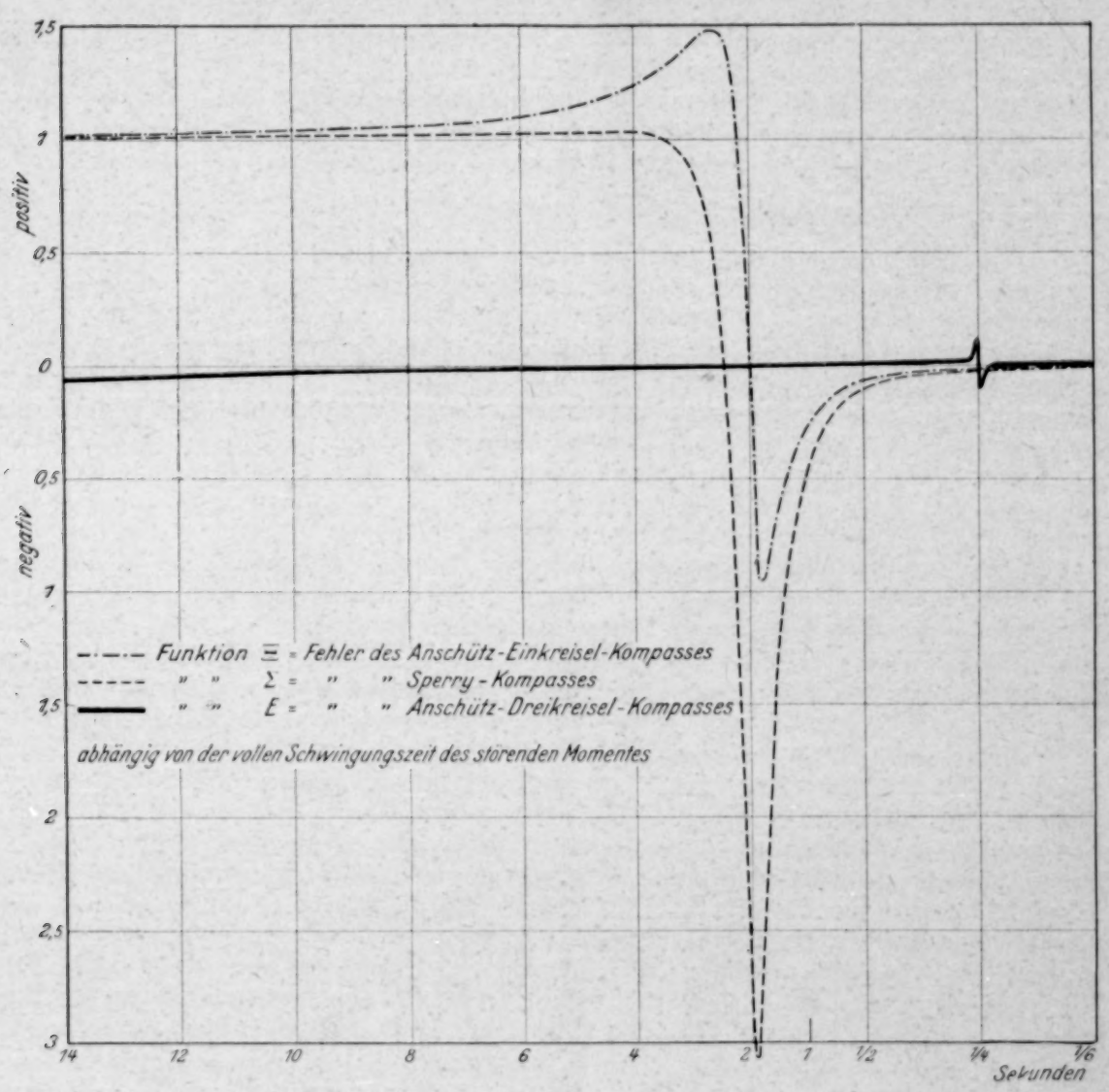


Abb 7

Bei der E-Kurve für den Anschütz-Dreikreiselkompaß ist die Grundschwingung = 60 Sekunden, die Nutationsschwingung = $^1/_4$ Sekunde und eine ganz geringe Dämpfung angenommen.

Der Abstand der Kurven von der Null-Linie ist dann an jeder Stelle direkt proportional dem Fehler des Kompasses. Demnach ist derjenige Kompaß der beste, dessen Kurve den geringsten Abstand von der Null-Linie auf dem ganzen in Betracht kommenden Gebiete der störenden Momente zeigt. Wir erkennen hier die weite Ueberlegenheit des Dreikreiselkompasses über alle anderen Konstruktionen. Zwischen 4 Sekunden und $^1/_2$ Sekunde volle Schwingungszeit läßt sich ein Abstand von der Null-Linie mit freiem Auge überhaupt nicht mehr feststellen und auch zwischen 12 und 4 Sekunden volle Schwingungsperiode bleibt die Differenz vielmals kleiner als beim Einkreiselkompaß. Nur bei $^1/_4$ Sekunde, d. h. wenn das Störungsmoment synchron wird mit der Nutationsschwingungszahl des Kompasses, ergeben sich etwas größere Differenzen, die aber ebenfalls noch weit unter dem größten Werte der Einkreiselkompasse liegen.

Es sei nun im folgenden an einem Beispiel gezeigt, wie man mit Hilfe der Kurven den Kompaßfehler ermitteln kann.

Es sei eine Schlingerperiode des Schiffes von 12 Sekunden gewählt. Dann erhalten wir für den Dreikreiselkompaß den Wert $E = -0{,}041$, während die Einkreiselkompasse ungefähr den Wert $+1{,}0$ ergeben. Wird also der Fehler der Einkreiselkompasse bei einer bestimmten Stärke des Seeganges 20^0, so wird bei dem gleichen Aufstellungsort und demselben Seegang der Fehler des Dreikreiselkompasses $\eqsim 0{,}041 \cdot 20^0 = 0{,}82^0$, und zwar geht dieser Fehler nach der entgegengesetzten Seite wie jener der Einkreiselkompasse.

Die Fehler der Kompasse für eine andere Schlingerperiode des Schiffes können in entsprechender Weise aus den Kurven abgelesen werden.

Obiges Zahlenbeispiel gibt den schlagendsten Beweis für die Ueberlegenheit des Dreikreiselkompasses über die Kompaßkonstruktionen mit nur einem Kreisel.

Aus den Kurven der Abb. 7 ersieht man, daß nur bei periodischen Anstößen von $\frac{4 \text{ Perioden}}{\text{Sekunde}}$ die Fehler des Dreikreiselkompasses etwas größer werden. Selbstverständlich ist es ausgeschlossen, daß Schlingerbewegungen des Schiffes oder deren Oberschwingungen mit dieser hohen Periodenzahl vorkommen können. Dagegen gibt es Maschinenerschütterungen und Vibrationen des Aufstellungsortes, die diese hohe Schwingungszahl besitzen. Aber auch ihre Einwirkung auf den Kompaß ist leicht zu beseitigen, indem man diesen federnd aufhängt, so daß Erschütterungen von dieser ungünstigen Periodenzahl nicht übertragen werden. Die Eigenschwingungszahl der Federn muß so gewählt werden, daß sie in ein günstiges Gebiet der E-Kurve fällt und demnach nur geringe Kompaßfehler verursachen kann. Dies kann aber leicht erreicht werden, da, wie man aus den Kurven sieht, das ungünstige Gebiet nur einen ganz kleinen Bereich umfaßt.

Bei den ganzen bisherigen Berechnungen ist angenommen, daß die Ebene des periodischen Anstoßes in bezug auf die Kompaßrose bekannt ist und der Winkel ε auf der Kompaßrose abgelesen werden kann. Dies ist an Bord eines Schiffes wohl meistens der Fall, denn steuert z. B. ein schlingerndes Schiff nach dem Kompaß einen bestimmten Kurs, so wird die Schlingerbewegung stets dieselbe Richtung zu der Kompaßrose behalten, da das Schiff um ebensoviel sich dreht, wie die Fehlerweisung des Kompasses beträgt. Erst wenn die Fehlerweisung groß wird und das Schiff sich soweit dreht, daß der Seegang zu dem Schiff anders läuft, werden die Bewegungen des Schiffes andere und damit auch die Einwirkungen der Schiffsbewegung auf den Kreiselkompaß. Hat man dagegen eine Versuchsanordnung im Laboratorium, so ist diese gewöhnlich unter einem bestimmten Winkel zum Meridian aufgebaut. Dann ist die Erschütterungsebene nicht fest zum Kompaß, sondern steht fest zur Erde, und die allgemeine Fehlergleichung für den Kreiselkompaß schreibt sich dann:

$$\sin \alpha_0 = -\left(\frac{\pi}{\tau_s} \frac{1}{U \cos \varphi}\right)^2 \left(\frac{\gamma}{g}\right)^2 \sin 2 (\varepsilon_0 - \alpha_0) \Xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46).$$

Dabei ist ε_0 der Winkel zwischen der Ebene des störenden Moments und dem Meridian des Ortes. Diese Gleichung läßt sich mit einfachen mathematischen Mitteln nicht lösen. Man fertigt sich am besten eine Rechentafel an. Häufig wird es der Fall sein, daß derartige Versuchseinrichtungen unter einem Winkel von 45^0 aufgestellt werden, um den größtmöglichsten Fehler zu bestimmen. In diesem speziellen Fall läßt sich Gl. (46) auflösen. Führen wir die Konstante C für alle Größen ein, die nicht von dem Winkel α_0 und ε_0 abhängen, so schreibt sich Gl. (46):

$$\left.\begin{aligned} \sin \alpha_0 &= C \sin (90^0 - 2\alpha_0) \\ &= C (1 - 2 \sin^2 \alpha_0) \\ &= -\frac{1}{4C} \pm \sqrt{\frac{1}{16 C^2} + {}^1/_2} \end{aligned}\right\} \text{ für } \varepsilon_0 = 45^0.$$

Wie wir aus den Berechnungen ersehen haben, entstehen die Fehler durch das Schwanken der Richtung der Beschleunigung am Aufstellungsort. Es reicht also bei der Versuchseinrichtung nicht aus, den Kompaß auf einer Schaukel einfach zu kanten, sondern der Kompaß muß sich auch um eine bestimmte Strecke verschieben. Deshalb wurde im Laboratorium von Anschütz ein besonderer Schiebetisch aufgestellt, der in einstellbarer Periodenzahl den Kompaß um etwa 2 m hin und her bewegt. Auch wurden bei den Versuchen lange Pendel benutzt, auf die der Kompaß gestellt und dann hin und her geschwungen wurde.

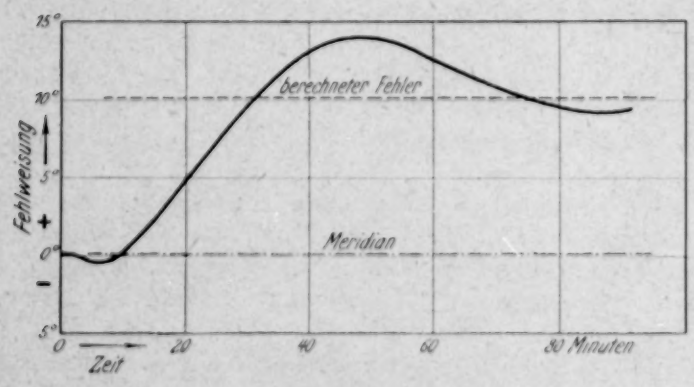


Abb. 8

Es sind zwei Schwingungskurven beigelegt, die bei den Laboratoriumsversuchen erhalten wurden. Abb. 8 zeigt den Fehler eines Einkreiselkompasses auf dem Schiebetisch bei einer vollen Schwingungsperiode von 12 Sekunden. Das Verhältnis von $\frac{\gamma}{g} = 0{,}0278$, der daraus berechnete Fehlerwinkel $\alpha_0 = -10{,}1^0$. Man ersieht aus der Gestalt der Schwingungskurve, daß die neue Gleichgewichtslage, welcher der Kompaß infolge der Wirkung der störenden Momente zustrebt, mit der errechneten Gleichgewichtslage sehr genau übereinstimmt.

Abb. 9 gibt die Schwingungskurve eines Dreikreiselkompasses an einem Pendel. Das Verhältnis von $\frac{\gamma}{g}$ war in diesem Falle 0,103, also ungefähr das 3,8 fache des vorigen Versuches. Da der Kompaßfehler mit dem Quadrat dieses Verhältnisses zunimmt, so heißt dies, daß der Versuch etwa die 14 fache Belastung gegenüber dem vorherbesprochenen Versuch darstellt. Trotzdem liegt die neue Gleichgewichtslage des Kompasses nur 2,8 ^{0} von dem wahren Meridian ab.

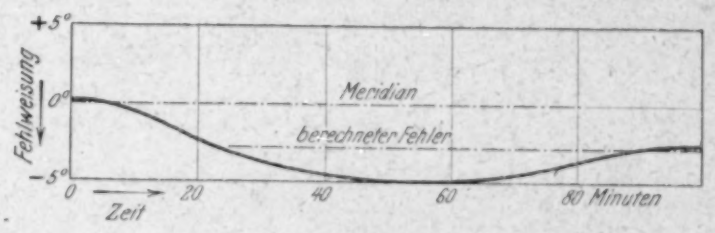


Abb. 9

Man sieht aus der aufgenommenen Kurve, daß Versuch und Rechnung sich ebenfalls gut decken, obwohl die Rechnung für den Mehrkreiselkompaß doch nur eine Näherungslösung darstellt, da die Reibungen vernachlässigt wurden. Der Fehler geht nach der anderen Seite wie beim Einkreiselkompaß; dies verlangt auch die Rechnung. Um ein Bild zu bekommen, welche Schiffsbewegungen notwendig sind, um derartige Beschleunigungen wie in dem letzten Versuch ausüben zu können, sei angenommen, daß der Kompaß 3 m über dem Drehpunkt des Schiffes steht. Dann muß das Schiff $\pm 38^0$ schlingern und zwar mit einer Periode von 6,1 Sekunden. Es entspricht dies einem mittleren Winkelweg von 12^0 in einer Sekunde. Es sind dies Bewegungen, wie sie nur bei allerschwerstem Seegang vorkommen dürften.

Dagegen mußten die Beschleunigungen bei dem Versuch mit dem Einkreiselkompaß viel geringer gehalten werden, damit der Fehler eine für die Messung günstige Größe nicht überschritt.

Auch ganz kurzen Erschütterungen wurde der Mehrkreiselkompaß ausgesetzt und dabei die Fehler bestimmt. Die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch kam aber dabei nicht so klar zum Ausdruck, denn es ist sehr schwierig, die maximalen Beschleunigungen, die Periodenzahl und die Ebene der störenden Momente zu bestimmen, die bei Erschütterungen ausgeübt werden. Es treten z. B. Kreisschwingungen des zentrierenden Stiftes auf, welche die Beobachtungen stören. Auch ist bei der Rechnung angenommen, daß alle Körper starr seien und nur in ihren Drehpunkten beweglich. Dies stimmt natürlich bei ganz kurzen Erschütterungen nicht mehr. Auch der sehr stark gebaute Kompaß erfährt kleine Deformationen, welche Fehler von 1^0 bis 2^0 hervorrufen können. Da die nach den Formeln errechneten Fehler auch in dieser Größenordnung liegen, so läßt sich die Richtigkeit der Rechnung schwer prüfen.

Dagegen wurde eine große Anzahl von Versuchen mit pendelnd aufgehängten Kompassen gemacht, welche ganz verschieden konstruiert waren. Pendellänge und Pendelausschlag wurden in weiten Grenzen verändert. Dabei ergab sich stets gute Uebereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung, da Ebene, Schwingungszahl und Größe der störenden Momente bei den Versuchen genau bestimmt werden konnten.

Aber nicht nur im Laboratorium, sondern auch an Bord von Schiffen wurden Vergleichsversuche angestellt. Auf dem großen Kreuzer der deutschen Marine S. M. S. »Moltke« wurden ein Anschütz-Einkreiselkompaß und ein nach vorstehenden Berechnungen gebauter Anschütz-Dreikreiselkompaß unmittelbar nebeneinander aufgestellt. Dabei wurden bei schwerem Seegang in der Atlantik die in der folgenden Tafel zusammengestellten Fehlweisungen beobachtet (Plus ist der Ausschlag der Rose nach rechts, minus nach links):

17. Juni 1912.

Zeit	Kurs	Einkreisel	Dreikreisel	Zeit	Kurs	Einkreisel	Dreikreisel
5^{40} V	65^0	$5{,}9^0$	$0{,}2^0$	10^{40} V	65^0	$4{,}9^0$	$0{,}8^0$
6^{00} »	»	$8{,}2^0$	$-0{,}3^0$	11^{00} »	»	$4{,}1^0$	$1{,}0^0$
6^{20} »	»	$10{,}2^0$	$0{,}0^0$	11^{20} »	»	$4{,}8^0$	$1{,}0^0$
6^{40} »	»	$10{,}8^0$	$-0{,}3^0$	11^{40} »	171^0	$1{,}8^0$	$0{,}3^0$
7^{00} »	»	$7{,}3^0$	$0{,}9^0$	12^{00} M	65^0	$-3{,}6^0$	$0{,}2^0$
7^{20} »	»	$5{,}7^0$	$1{,}3^0$	12^{20} N	»	$4{,}3^0$	$1{,}8^0$
7^{40} »	»	$9{,}7^0$	$0{,}2^0$	12^{40} »	»	$7{,}0^0$	$1{,}5^0$
8^{00} »	»	$7{,}9^0$	$0{,}0^0$	1^{00} »	»	$4{,}1^0$	$1{,}9^0$

18. Juni 1912.

9^{10} V	65^0	$8{,}6^0$	$0{,}6^0$	10^{30} V	65^0	$8{,}9^0$	$0{,}2^0$
9^{20} »	»	$12{,}1^0$	$0{,}0^0$	10^{40} »	»	$10{,}1^0$	$0{,}0^0$
9^{30} »	»	$12{,}3^0$	$-0{,}5^0$	10^{50} »	»	$11{,}0^0$	$-0{,}1^0$
9^{40} »	42^0	$13{,}0^0$	$-0{,}3^0$	4^{20} N	»	$5{,}0^0$	$0{,}8^0$
9^{50} »	»	$14{,}0^0$	$-0{,}2^0$	4^{40} »	»	$7{,}0^0$	$1{,}0^0$
10^{00} »	65^0	$11{,}5^0$	$0{,}2^0$	5^{00} »	»	$10{,}0^0$	$0{,}2^0$
10^{10} »	»	$9{,}1^0$	$0{,}2^0$	5^{20} »	»	$12{,}2^0$	$0{,}0^0$
10^{20} »	»	$8{,}0^0$	$0{,}4^0$				

Die Ausschläge des Dreikreiselkompasses sind durchweg sehr klein und fallen, außer denen vom Nachmittag des 17., in die Beobachtungsunsicherheit. Die Ausschläge des Einkreiselkompasses gehen bis zu 14^0 und sind auf dem Kurs 65^0 immer positiv. Der Kurswechsel in den zweiten Quadranten am 17. um 11^{35} ruft ein Umschlagen des Vorzeichens der Ausschläge hervor, und der Zwischenstrichkurs vom 18. um 9^{35} bis 9^{52} erhöht den von 9^{20} bis 10^{00} auf Kurs 65^0 vorhandenen Ausschlag von 12^0 noch um 1^0 bis 2^0. Beides fordert die Theorie, und auch die Richtung des Kompaßfehlers entspricht ihr.

Die Fehler des Dreikreiselkompasses sind zu klein und die Beobachtung zu ungenau, um sichere Schlüsse ziehen zu können. Doch scheinen bei den großen positiven Fehlern des Einkreiselkompasses am 17. um 6^{40} und am 18. um 9^{30} bis 9^{50} und 10^{50} die Abweichungen des Dreikreiselkompasses negativ zu sein. Dies würde sich jedenfalls mit der Theorie decken. Diese Prüfungen der Deutschen Kriegsmarine beweisen den großen Fortschritt, den die Konstruktion des Dreikreiselkompasses gegenüber dem Einkreiselkompaß für die Schiffahrt bedeutet. 123

Über eine Aufgabe der malerischen Perspektive des Leone Battista Alberti.

Von **FR. SCHILLING** in Danzig-Langfuhr.

Die vorliegende anspruchslose Betrachtung einer einfachen, historisch interessanten geometrischen Aufgabe liefert ein lehrreiches Beispiel dafür, wie gewisse Sätze der Analysis (Summenformel der endlichen oder unendlichen geometrischen Reihe, Unterschied der gewöhnlichen und natürlichen Logarithmen, Lösung transzendenter Gleichungen, Maxima und Minima von Funktionen, unbestimmte Formen von Funktionen) in innige Verbindung treten mit geometrischen Tatsachen und von geometrischem Zeichnen begleiteter Anschauung (höhere Kurven in der analytischen Geometrie, Asymptoten, Wendepunkte, anschauliche Grenzbetrachtungen). Es handelt sich um die bekannte Frage, wie man eine quadratische »Fußbodentäfelung« und zwar in Frontstellung von dem Augenpunkt O aus in die perspektivische Bildebene übertragen kann. Um diese Frage dreht sich ja die ganze Entwicklung der Perspektive zur Zeit der Renaissance jenseits und diesseits der Alpen[1]). Die räumlichen Verhältnisse seien durch die Abb. 1 veranschaulicht, die auch die benutzten Bezeichnungen angibt. Als Ausgangspunkt

[1]) Vergl. im Einzelnen dazu z. B. Hans Schuritz, Die Perspektive in der Kunst Dürers, Frankfurt a. M. 1919. G. Wolff, Mathematik und Malerei, Math. Bibliothek Bd. 20, 21, Leipzig 1916, S. 49.

dient uns eine Stelle aus der 1435 zu Florenz vollendeten Schrift des Leone Battista Alberti (1402 bis 1472): »Drei Bücher über die Malerei«, die wir im folgenden vollständig anführen. Wir knüpfen daran die ausführliche Darstellung der Lösung, wie sie dem heutigen Stand der Geometrie entspricht, wobei wir die erwähnten didaktischen Gesichtspunkte zur Geltung zu bringen hoffen.

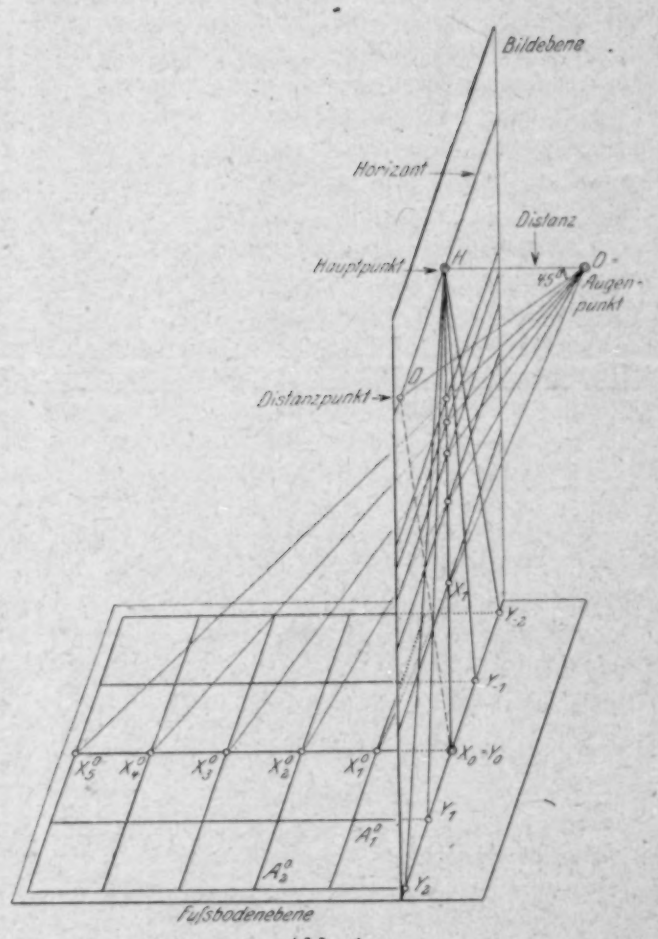


Abb. 1

1. Das Verfahren des Leone Battista Alberti. Es heißt in der genannten Schrift[1]) von Alberti: »Ich werde angeben, wie ich es mache, wenn ich selbst male. Vorerst beschreibe ich auf die Bildfläche ein rechtwinkliges Viereck von beliebiger Größe, welches ich mir wie ein geöffnetes Fenster vorstelle, wodurch ich das erblicke, was hier gemalt werden soll. Dann bestimme ich mir nach Belieben die Größe des Menschen in meinem Bilde. Hierauf teile ich mir dieses Höhenmaß des Menschen in drei Teile, welche Teile proportional sind zu jenem Maß, welches man Elle nennt, da man findet, daß die Größe eines normalen Menschen ungefähr 3 Ellen (Armlängen) beträgt. Mit diesem Maße teile ich die Basis des Viereckes in so viele Teile als dies möglich, und eben diese Linie (d. h. die Basis des Viereckes) ist dann jeder nächsten dazu parallel gezogenen Querdimension proportioniert. Innerhalb dieses Viereckes bestimme ich dann nach dem Augenschein einen festen Punkt, welcher jene Stelle einnimmt, die der Zentralstrahl trifft, weshalb ich ihn Zentralpunkt (Hauptpunkt) nenne. Gut wird es sein, wenn die Distanz zwischen diesem Punkt und der Basis nicht mehr beträgt als die Höhe des Menschen, welcher hier gemalt werden soll, da dann der Beschauer sowohl, wie die gesehenen gemalten Gegenstände sich auf einem und demselben Plane zu befinden scheinen. Ist der Zentralpunkt bestimmt, wie ich angab, so ziehe ich dann von ihm aus gerade Linien zu allen Teilungspunkten der Basis des Viereckes, welche Linien mir zeigen, in welcher Weise jede Querdimension gleichsam ins Unbegrenzte hinaus fortlaufend sich verändere (verjünge).

Nun könnte es einige geben, welche innerhalb des Viereckes eine von der Basis äquidistante Querlinie zögen und den Zwischenraum dieser zwei Linien in drei Teile teilen; nachdem sie dann zwei von diesen genommen, zögen sie in solchem Abstande neuerdings eine Aequidistante zur Basis, dann noch eine und wieder eine, immer nach der Regel verfahrend, daß jener in drei Teile geteilte Raum, welcher zwischen der ersten und zweiten Aequidistante sich befindet, dem zwischen der zweiten und dritten immer um einen Teil voraus sei; so fortfahrend würde es geschehen, daß — um mit den Mathematikern zu sprechen — jeder vorausgehende Raum den nächst folgenden um die Hälfte von dessen Größe überragte. Diese nun, die also vorgehen, würden meiner Meinung nach irren, obgleich sie auf richtigem Wege zu sein vermeinen; indem

[1]) Ich folge hier der Uebersetzung von H. Janitschek in seiner Schrift: Leone Battista Albertis kleinere kunsttheoretische Schriften, im Originaltext herausgegeben, übersetzt, erläutert und mit einer Einleitung und Excursen versehen, in den Quellenschriften für Kunstgeschichte von R. Eitelberger v. Edelberg, Bd. XI, Wien 1877, S. 78 bis 82.

Vergl. auch Steigmüller, Kannte Leone Battista Alberti den Distanzpunkt? Repertorium für Kunstwissenschaft, Bd. XIV, 1891, S. 301 bis 304, sowie E. Panofsky, Das perspektivische Verfahren Leone Battista Albertis, Kunstchronik, Neue Folge, XXVI. Jahrgang 1914/15, S. 505 bis 516.

sie nämlich die erste Linie (sc. die zur Basis erste Parallele) auf das Ungefähr hinzogen, nicht aber dabei einen bestimmten Augenpunkt (Punkt an der Spitze der Sehpyramide) im Gedanken hatten, so erwachsen nun daher ihrem Bilde nicht geringe Irrtümer[1]). Dem beizugesellen ist das fehlerhafte Vorgehen derer, welche den Abstand des Zentralpunktes von der Basis größer oder kleiner annehmen, als die Größe des (auf dem Bilde) gemalten Menschen.

Wisse nämlich, daß keine Malerei der Wirklichkeit entsprechen wird, wofern nicht eine bestimmte Distanz vom Beschauer durchgehalten ist. Die Gründe für dies jedoch werde ich angeben, wenn ich je dazu kommen sollte, über jene von mir gemachten Demonstrationen zu schreiben, die von meinen Freunden wie Wunder angestaunt wurden. Schon vieles, was ich hier sagte, gehörte auf jenes Gebiet; ich kehre also zu meinem Gegenstande zurück. Ich fand also dies als die beste Verfahrungsweise, ganz so vorzugehen, wie ich es oben beschrieb, den Zentralpunkt zu fixieren und dann von da aus Linien zu Teilpunkten der Basis des Viereckes zu ziehen.

Was aber die Aufeinanderfolge der Querlinien betrifft, so schlage ich folgenden Weg ein. Ich nehme einen kleinen Flächenraum, auf welchem ich eine gerade Linie beschreibe, die ich in ebenso viele Teile teile, als die Basis des Viereckes Teile enthält. Ueber dieser Geraden fixiere ich mir dann einen Punkt, der von derselben ebenso hoch absteht als der Zentralpunkt von der Basis des Viereckes, von welchem Punkte aus ich mir dann Gerade zu den Teilungspunkten der erstgenannten Linie ziehe. Hierauf stelle ich die Entfernung fest, in welcher der gemalte Gegenstand (die Malerei) dem Auge erscheinen soll, und ziehe von da aus eine — wie die Mathematiker sie nennen — lotrechte Linie, die, welche Linie immer sie treffen mag, schneidet. Jene gerade Linie nenne ich »lotrecht«, welche, wenn sie sich mit einer anderen Geraden schneidet, mit dieser nach rechts und links rechte Winkel bildet. Die auf solche Weise lotrecht gezogene Linie wird mir in ihren Durchschnittspunkten die Aufeinanderfolge sämtlicher Transversalen (Querdimensionen) geben. Auf diese Weise werde ich sämtliche Parallelogramme, d. h. die Ellenfelder des Estrichs auf dem Bilde beschrieben erhalten. Ob dies in richtiger Weise geschah, werde ich daran erkennen, daß in solchem Falle eine und dieselbe Gerade den Durchmesser mehrerer auf dem Bilde gezeichneten Felder bilden wird.«

Alberti sagt dann später (l. c. S. 84) noch: »Diese Anleitung ist derart, daß ich einerseits wegen der Neuheit des Gegenstandes, andererseits wegen der Kürze der Erörterung daran zweifele, daß sie leicht von dem Leser verstanden werden wird«.

Ich möchte annehmen, daß Alberti deswegen sich nicht völlig klar ausgedrückt hat, weil er seine perspektivische Kunst noch als Geheimbesitz bewahren und nur soviel mitteilen wollte, um sich die Priorität der Entdeckung zu sichern. War doch z. B. in den

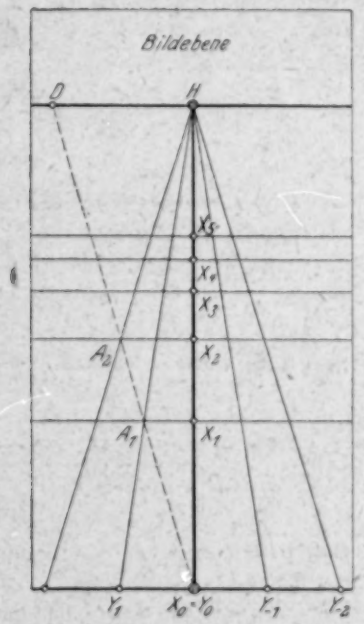


Abb. 2

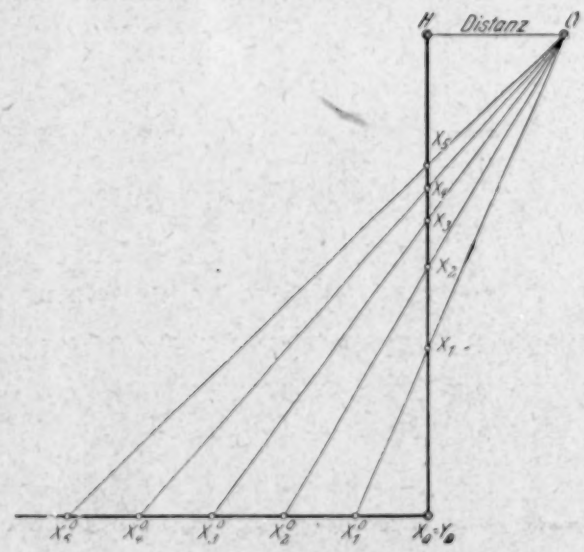


Abb. 3

[1]) Der hier in der Uebersetzung gemachte Zusatz: »obgleich sie im weiteren einer richtigen Regel folgen« steht nicht im Text.

mittelalterlichen »Bauhütten« auch die Kunst des Steinschnitts, die Stereotomie, ein ängstlich gehütetes Geheimnis.

Man kann nun die Albertische Beschreibung der genauen von ihm empfohlenen Konstruktion auf Grund anderer sehr bald danach erschienener Schriften[1]) wohl sicher wie folgt auslegen:

In einem Rechteck (Abb. 2), das die Bildebene vorstellt, sind zunächst der Hauptpunkt H (Zentralpunkt) und auf der Grundlinie die Teilpunkte Y_i anzunehmen und die »Tiefenlinien« $H\,Y_i$ zu ziehen, wie dies auch die Abb. 1 angibt. In einer Hilfsfigur (Abb. 3) ist dann weiter zu zeichnen, was in der Ebene OHX_0X_5 der Abb. 1 liegt. Hierdurch sind dann die Punkte X_n und damit die Querlinien in der Abb. 2 festgelegt. Als ein Beispiel für eine solche quadratische Bodentäfelung aus der Zeit der Frührenaissance sei aus der großen Fülle etwa »die Verkündigung«, der eine Flügel des Genter Altars, von Hubert und Jan van Eyck (um 1400) erwähnt.

2. Analytische Untersuchung des Verfahrens. Nun wollen wir zu der eigentlich beabsichtigten Betrachtung übergehen, die an die von Alberti als unrichtig erkannte Regel anknüpft. Hiernach würde nach dem Zeichnen der Grundlinie Y_0Y_i und des Hauptpunktes H, wie in der Abb. 2, die erste Querlinie beliebig anzunehmen, jede folgende aber in einem Abstande von der vorhergehenden zu ziehen sein, der gleich $^2/_3$ des vorhergehenden Abstandes ist. In der nebenstehenden Abb. 4 sei nun demgemäß eine solche Zeichnung ausgeführt. Die Teilstrekken $Y_{n-1}\ Y_n$ auf der Grundlinie seien gleich s gesetzt, wobei insbesondere diese Strecke s als Einheitsstrecke gewählt werden kann. Der Abstand $X_0\,X_1$ der ersten Querlinie von der Grundlinie sei gleich a gewählt.

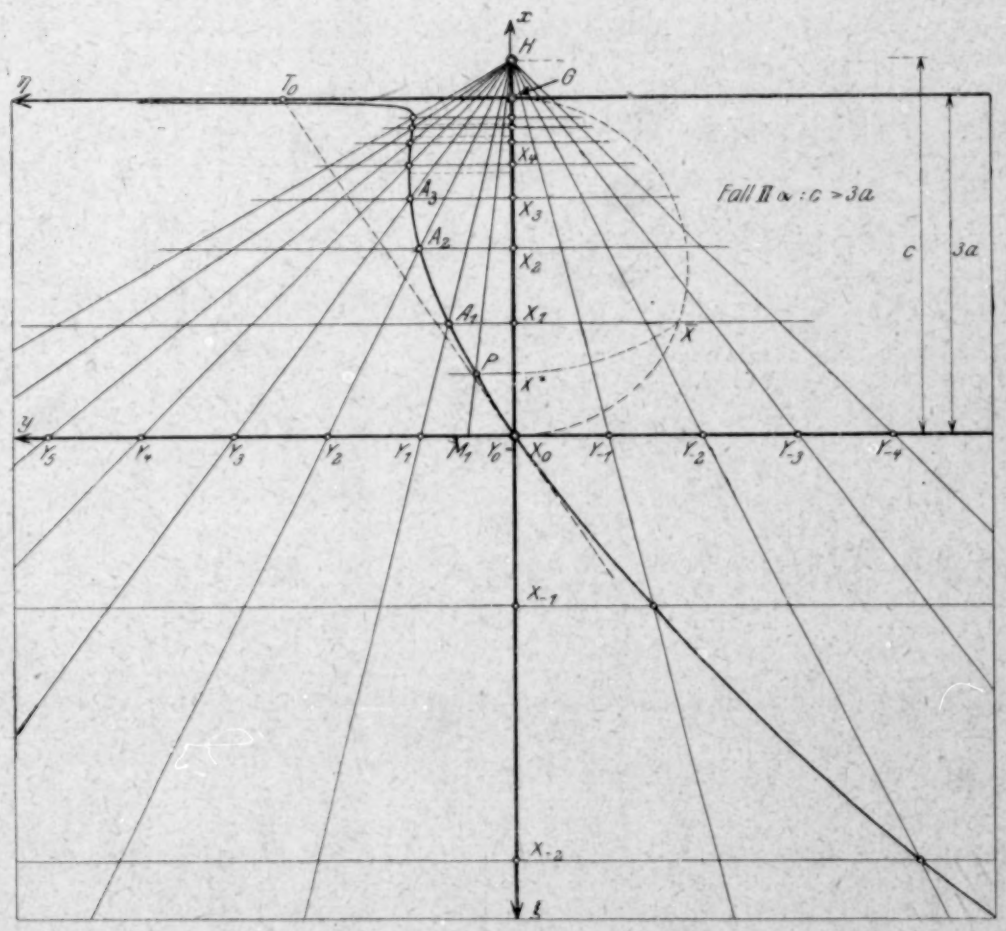


Abb. 4

(In der unverkleinerten Abb. 4, wie auch in den späteren Abb. 5, 6 und 7, ist stets $s = 1{,}2$ cm und $a = 1{,}5$ cm gewählt). Die aufeinander folgenden Abstände $X_{n-1}\,X_n$ der Teilpunkte X_n auf der Geraden X_0H sind also: a, $\left(\frac{2}{3}\right)a$, $\left(\frac{2}{3}\right)^2 a$ . . . .[2]). Wir wollen weiterhin die Geraden $\overrightarrow{X_0H}$ und $\overrightarrow{Y_0Y_i}$ als x, y-Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit

[1]) Man vergl. z. B. Piero dei Franceschi (Petrus Pictor Burgensis) (gest. 1492), de prospectiva pingendi, mit deutscher Uebersetzung veröffentlicht von C. Winterberg, Straßburg 1899, S. LXXXVII.

[2]) Es sei noch darauf hingewiesen, daß man in dem Gesetz für die Aufeinanderfolge der Abstände anstatt $\frac{2}{3}$ auch einmal einen anderen echten Bruch, z. B. $\frac{1}{2}$, wählen könnte.

dem Anfangspunkt $X_0 = Y_0$ ansehen. Es ergibt sich nun als Summe $\bar{x}$ aller Abstände auf der x-Achse:

$$\bar{x} = \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots\right) a = 3a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Die ganze »Tiefe $\bar{x}$«, die durch die Gesamtheit aller Querlinien erreicht wird, ist gleich $3a$.

Hieraus folgt sofort, daß es von vornherein falsch wäre, die Entfernung $X_0 H$, die, stets als endlich und von 0 verschieden vorausgesetzt, in der Folge mit c bezeichnet sei, von der Strecke $3a$ verschieden zu wählen, da dann eben der durch H gehende Horizont (vergl. Abb. 1) von dem durch die Querlinien erreichten Horizont verschieden wäre. Alberti hat weiter (l. c. S. 82) als Regel, an der die Richtigkeit seiner anderen perspektivischen Konstruktion erkannt wird, angegeben, daß »dieselbe Gerade den Durchmesser (Diagonale) mehrerer auf dem Bilde gezeichneter Felder bilden wird« (vergl. die Gerade $X_0 D$ der Abb. 1 und 2, wo D den einen sogenannten »Distanzpunkt« wegen $DH = OH$ bedeutet). Wir wollen nun weiter sehen, wie diese Verhältnisse sich bei der unrichtigen Konstruktion gestalten. Wir betrachten zunächst die Aufeinanderfolge der Punkte A_n in der Abb. 4, d. h. der Schnittpunkte der Geradenpaare, die aus der Geraden $Y_n H$ und der Querlinie für X_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$) bestehen; hierbei denken wir auch auf der negativen Hälfte der x-Achse die Punkte $X_{-1}, X_{-2} \ldots$ konstruiert, wo dem früheren Gesetz entsprechend die aufeinander folgenden Abstände $X_{n-1} X_n$ (für $n = 0, -1, -2 \ldots$) gleich

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} a = \frac{3}{2} a, \left(\frac{3}{2}\right)^2 a, \left(\frac{3}{2}\right)^3 a \ldots .$$

sind. Es gilt nun offenbar (für $n \leqslant 0$):

$$X_n H : X_0 H = X_n A_n : Y_0 Y_n$$

oder, wenn $X_0 H = c$ ($c \neq 0$) und die Koordinaten der Punkte A_n mit x_n, y_n bezeichnet sind.

$$(c - x_n) : c = y_n : n s, \quad \text{oder} \quad y_n = n s \left(1 - \frac{x_n}{c}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Nun ist für $n > 0$

$$x_n = \left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] a \text{ oder } x_n = 3a \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \quad . \quad (3)$$

$$n = \frac{\lg \frac{3a - x_n}{3a}}{\lg \frac{2}{3}} \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3').$$

Die beiden Logarithmen können hier ersichtlich als solche mit der Basis 10 oder mit der Basis e angesehen werden.

Analog ist für $n < 0$

$$-x_n = \left[\left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^{-n}\right] a,$$

d. h., es gelten auch hier unverändert die Gl. (3) und (3'). Aus den Gl. (2) und (3') folgt endlich nach Elimination des Parameters n:

$$y_n = s \left(1 - \frac{x_n}{c}\right)^{\frac{\lg \frac{3a - x_n}{3a}}{\lg \frac{2}{3}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Wir lassen nun in der letzten Gleichung den Index n fort, indem wir x_n nicht mehr auf die Werte beschränken, die durch die Gl. (3) für positive oder negative ganze Zahlen n sich ergeben, sondern beliebig veränderlich sein lassen. Dann stellt die Gleichung in der neuen Form:

$$y = s \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{\frac{\lg \frac{3a - x}{3a}}{\lg \frac{2}{3}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

eine bestimmte Kurve dar, die wir als eine »Diagonalkurve« bezeichnen wollen. Diese Kurve hat für unseren Zweck die Eigenschaft, die oben definierten Punkte A_n

zu enthalten[1]). Wir können die Kurve (5) also an die Stelle der Geraden, der gemeinsamen Diagonalen, treten lassen, die die Punkte A_n in der genauen Figur der Abb. 2 verbindet und, wie wir sahen, den Horizont im einen Distanzpunkt D schneidet.

Wir wollen nun die Diagonalkurve (5) näher diskutieren. Wir führen dazu am besten ein neues rechtwinkliges ξ, η-Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt G oder $x = 3a$, $y = 0$ ein (vergl. die Abb. 4) durch die Transformationen:

$$\xi = 3a - x, \quad \eta = y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6\,a\,b).$$

Die Gleichung (5) lautet dann einfacher:

$$\eta = s \frac{\xi + (c - 3a)}{c} \frac{\lg \frac{\xi}{3a}}{\lg \frac{2}{3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Wir könnten diese Gleichung in eine noch einfachere Form überführen, wenn wir setzten:

$$\bar{\xi} = \frac{s}{3a} \xi, \quad \bar{\eta} = \frac{c}{3a} \lg \frac{2}{3} \eta \quad . \quad . \quad (8), \qquad C = \left(\frac{c}{3a} - 1\right) s \quad . \quad . \quad (9).$$

Wir erhielten dann, insbesondere bei Bevorzugung von natürlichen Logarithmen, die stets mit ln bezeichnet seien:

$$\bar{\eta} = (\bar{\xi} + C) \ln \frac{\bar{\xi}}{s} \quad . \quad . \quad (10), \qquad e^{\bar{\eta}} = \bar{\xi}^{\bar{\xi} + C} \text{ für } s = 1 \quad . \quad . \quad (10').$$

Die Transformationen (8) stellen ja bei zusammenfallenden Achsen der ξ, η- und $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ Koordinatensysteme eine einfache »Affinität« zwischen den Punkten (ξ, η) und $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ dar; sie gestatten bei gegebenen Strecken s, c und a leicht zu jedem Punkte (ξ, η) den entsprechenden Punkt $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ oder umgekehrt zu berechnen oder auch (mit Zirkel und Lineal) zu zeichnen, wenn nur etwa der dem Punkte $\xi = 1$, $\eta = 1$ entsprechende Punkt $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ gezeichnet vorliegt, d. h. wenn noch die Strecke $k = -\lg \frac{2}{3} = 0{,}405554 \ldots\ldots$ gegeben ist. Doch wollen wir, insbesondere unserer Anwendung zu Liebe, es doch vorziehen, weiterhin die Diagonalkurve in der ursprünglichen Gleichungsform (7) zu diskutieren. Wir sind dann auch in der Lage, wenn nur die Strecken s, c und a festgelegt sind, mit Zirkel und Lineal die Punkte A_n der Kurve zu konstruieren.

3. Der Verlauf der Diagonalkurve. Wir haben die beiden Fälle zu unterscheiden: I. $c = 3a$, Abb. 5. II. $c \neq 3a$, Abb. 4, 6, 7.

Der **erste Fall c = 3a** verdient, wie wir wissen, besonderes Interesse deswegen, weil der Punkt H dann wenigstens auf dem erreichten Horizont, d. h. der η-Achse, liegt. Die Gl. (7) lautet jetzt:

$$\eta = s \frac{\xi}{c} \frac{\lg \frac{\xi}{c}}{\lg \frac{2}{3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

---

[1]) Natürlich könnte man an Stelle dieser in der angegebenen Weise sehr einfach erhaltenen transzendenten Kurve ja auch noch andere Kurven mit der gleichen Eigenschaft aufzustellen suchen. Man könnte zu dem Zweck etwa eine beliebige Funktion $\bar{y} = g(x)$ bestimmen, für welche die Stellen x_i der x-Achse (Abb. 4) Nullstellen sind. Dann würde auch die Funktion $y = f(x) + g(x)$, wo $f(x)$ die Funktion der Gl. (5) sei, eine Kurve der gewünschten Eigenschaft darstellen. Man betrachte in dieser Hinsicht z. B. die Funktion

$$\bar{y} = g(x) = \sin\left[\pi \frac{\lg \frac{3a - x}{3a}}{\lg \frac{2}{3}}\right]$$

oder auch

$$\bar{y} = g(x) = (A + Bx) \sin\left[\pi \frac{\lg \frac{3a - x}{3a}}{\lg \frac{2}{3}}\right],$$

wo A und B konstante Zahlen sind.

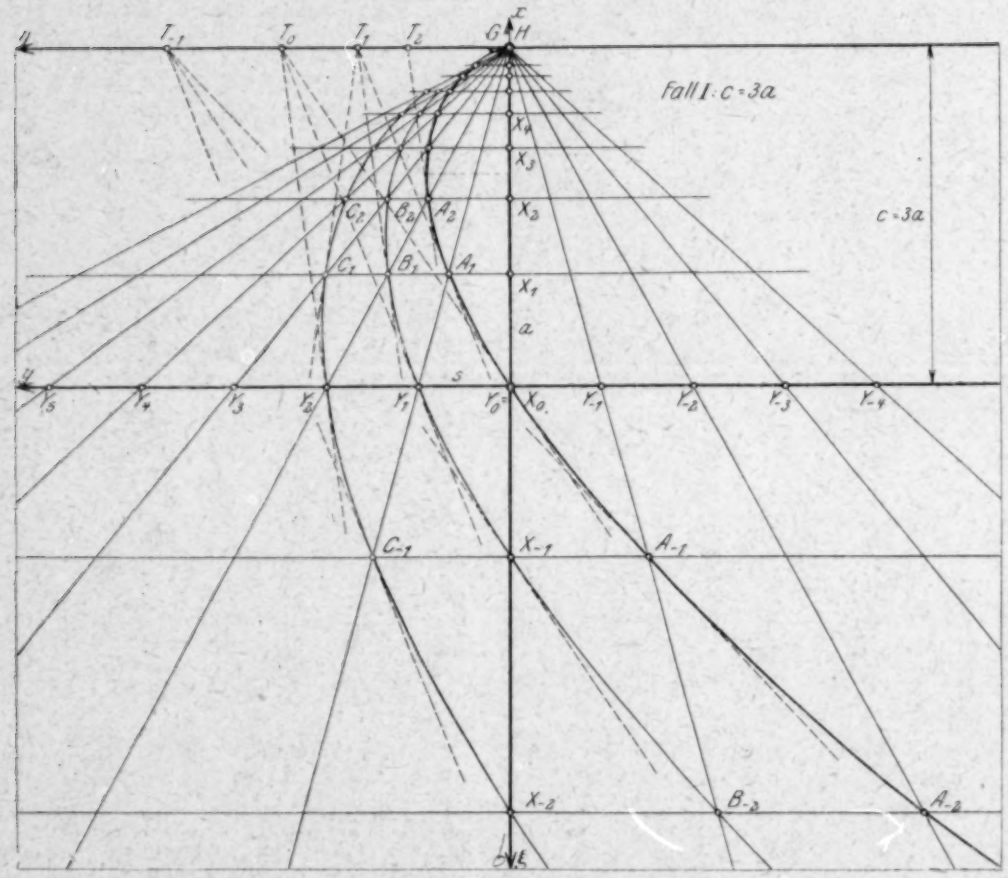


Abb. 5

Die nachfolgenden Resultate seien sogleich durch Abb. 5 veranschaulicht. Ersichtlich gehört zu jedem Werte $\xi > 0$ nur ein Wert η, während für $\xi < 0$ sich kein reeller Wert η ergibt. Für $\xi = 0$ nimmt die rechte Seite den zunächst unbestimmten Wert $0 \cdot \infty$ an. Wir haben daher die η-Achse als der vollständigen Kurve mit der Gl. (11) zugehörig anzusehen. Wir wollen jedoch den Grenzwert $\lim \eta$ für $\lim \xi = +0$ ausrechnen. Nach der bekannten Regel der Differentialrechnung für die Bestimmung von unbestimmten Formen $\frac{\infty}{\infty}$ ergibt sich:

$$\lim_{\xi=+0} (\xi \ln \xi) = \lim \frac{\ln \xi}{\frac{1}{\xi}} = \lim (-\xi) = -0, \qquad \lim_{\xi=+0} \eta = +0.$$

Der Kurvenzug für positive Werte ξ endigt im Koordinatenanfangspunkt.

Sodann ist:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{s}{c \ln \frac{2}{3}} \left[1 + \ln \frac{\xi}{c}\right], \qquad \lim_{\xi=+0} \frac{d\eta}{d\xi} = +\infty \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Die Kurve berührt die η-Achse im Koordinatenanfangspunkt.

Ferner ist die Ordinate $\eta = 0$ noch für $\xi = c$, während die Ordinate η für $0 < \xi < c$ positiv, für $\xi > c$ negativ ist. Für $\xi = c$ ist weiter:

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\xi=c} = \frac{s}{c \ln \frac{2}{3}}.$$

Demnach lautet die Gleichung der Tangente im Punkte $(c, 0)$ oder $X_0 = Y_0$:

$$\eta = \frac{s}{c \ln \frac{2}{3}} (\xi - c).$$

Der Schnittpunkt T_0 der Tangente im Punkte X_0 oder $(c, 0)$ mit der Ordinatenlinie hat die Ordinate $\eta = -\frac{s}{\ln\frac{2}{3}}$ (= 2,959 cm in Abb. 5).

Die Kurve hat endlich ein Maximum der Ordinate, für $\xi_1 = \frac{c}{e}$, $\eta_1 = -\frac{s}{c\ln\frac{2}{3}}$, wo e hier wie sonst die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. (Im Beispiel der Abb. 5, woselbst die Ordinate des Maximums gestrichelt eingezeichnet ist, ist $\xi_1 = 1{,}655$ cm, $\eta_1 = 1{,}089$ cm).

In diesem Falle $c = 3a$ wollen wir auch die übrigen Diagonalkurven kurz betrachten, etwa die vom Punkte Y_1 aus durch die Punkte $B_1, B_2 \ldots$ der Abb. 5 gehende Diagonalkurve. Es ist leicht zu sehen, daß alle übrigen »linksgerichteten« Diagonalkurven zu der durch die Gleichung (11) dargestellten, also vom Punkte $X_0 = Y_0$ ausgehenden, in bezug auf den Punkt $G = H$ ähnlich und ähnlich gelegen sind. Die Diagonalkurve $Y_1 B_1 \ldots$ z. B. ist analog der Gleichung (11) durch die Gleichung:

$$\eta = s_1 \frac{\xi}{c_1} \frac{\lg\frac{\xi}{c_1}}{\lg\frac{2}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11a),$$

mit $s_1 = \frac{3}{2}s$, $c_1 = \frac{3}{2}c$ bestimmt. Die Tangenten aller Diagonalkurven in den Punkten X_i sind demnach einander parallel. Die Diagonalkurve $Y_1 B_1 \ldots$ ist übrigens zur Diagonalkurve $Y_0 A_1 \ldots$ auch perspektiv-affin mit der η-Achse als Affinitätsachse und Y_1, Y_0 als entsprechenden Punkten, und das Analoge gilt von den anderen Diagonalkurven. Die Tangenten aller Diagonalkurven in den Punkten Y_i gehen demnach durch denselben Punkt T_0 oder $\xi_0 = 0$, $\eta = -\frac{s}{\ln\frac{2}{3}}$. (Aus der Tangente der Diagonalkurve im Punkte $X_0 = Y_0$ mit dem Schnittpunkt T_0 auf der Ordinatenachse ergeben sich also ohne weiteres die parallelen Tangenten der anderen Diagonalkurven in den Punkten $X_1, X_2 \ldots$ und den Punkten X_{-1}, $X_{-2} \ldots$ und damit auch wegen desselben bezüglichen Schnittpunktes auf der Ordinatenachse die Tangenten der Diagonalkurve bezw. in den Punkten $A_1, A_2 \ldots$ und den Punkten A_{-1}, $A_{-2} \ldots$ Er ist z. B. in der Abb. 5 demgemäß $A_1 T_1 \parallel Y_1 T_0$, $A_2 T_2 \parallel Y_2 T_0$ und $A_{-1} T_{-1} \parallel Y_{-1} T_0$.)

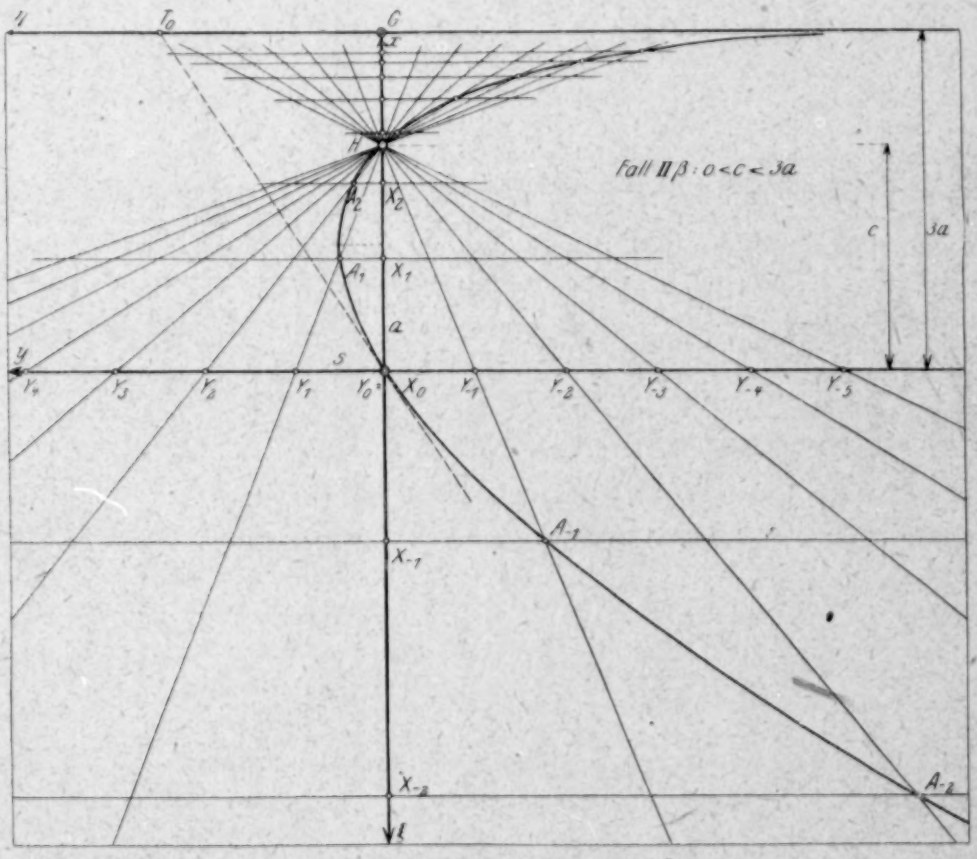


Abb. 6

Wir wenden uns nun zu dem **zweiten Fall** $c \neq a$ und unterscheiden, indem wir die Strecke $3a$ als ξ-Koordinate des Punktes $X_0 = Y_0$ stets als positiv ansehen und unter der Strecke c genauer die Strecke $\overrightarrow{HX_0}$ der ξ-Achse verstehen, sogleich die folgenden Unterfälle:

$\alpha)$ $c > 3a$, Abb. 4, $\beta)$ $0 < c < 3a$, Abb. 6, $\gamma)$ $c < 0$, Abb. 7.

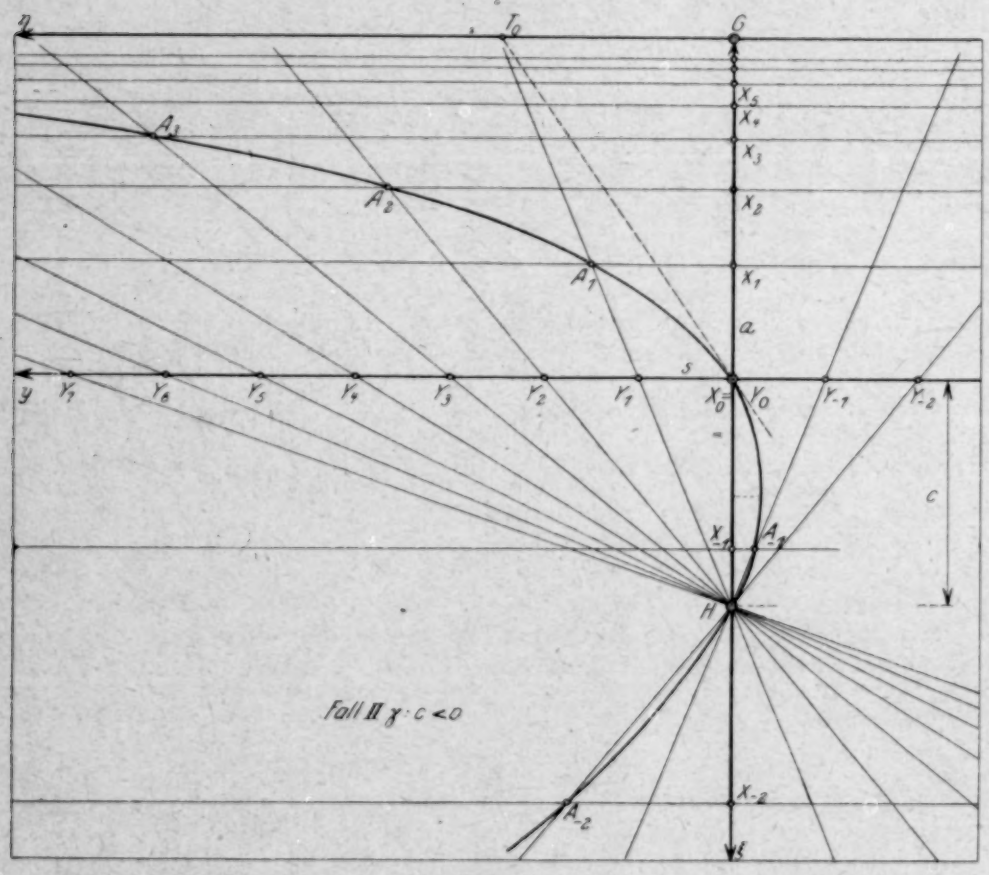


Abb. 7

Der letzte Unterfall würde zwar in der malerischen Perspektive keine Bedeutung haben; doch steht nichts im Wege, ihn geometrisch ebenfalls zu behandeln. Um unsere analytischen Betrachtungen sogleich wieder durch die Anschauung zu beleben, denken wir neben der Abb. 4 des Unterfalles α sogleich auch die Abb. 6 und 7 als Beispiele für die Unterfälle β und γ gezeichnet, was ja keine Schwierigkeit bietet, wenigstens nicht für den anfänglichen Verlauf der Kurven vom Punkte $X_0 = Y_0$ aus nach beiden Richtungen hin. In den unverkleinerten Abbild. 6, 7 ist $c = \pm 3$ cm gewählt.

Anknüpfend an die für alle drei Unterfälle gültige Gl. (7) ergibt sich nun analytisch: Wieder gehört zu jedem Werte $\xi > 0$ ersichtlich nur ein Wert η, während für $\xi < 0$ sich kein reller Wert η ergibt, abgesehen im Unterfalle α von dem Punkte H oder $\xi = 3a - c$, $\eta = 0$, der ein isolierter Punkt der Kurve ist (vergl. Abb. 4) und im folgenden außer Betracht bleiben soll. Doch im Gegensatze zu dem ersten Falle $c = 3a$ ist jetzt für $\lim \xi = +0$ der Grenzwert $\lim \eta$ in den Unterfällen α und γ gleich $+\infty$, dagegen im Unterfalle β gleich $-\infty$. Als Schnittpunkt der Kurve mit der ξ-Achse ergibt sich im Unterfalle α noch der Punkt $\xi = 3a$, in den Unterfällen β und γ dagegen die Punkte $\xi = 3a$ und $\xi = 3a - c$. Auch ist leicht zu übersehen, für welche Intervalle der Abszisse ξ die Ordinate η positiv oder negativ wird (vergl. deswegen die Abb. 4, 6 und 7).

Es ergibt weiter die Gl. (7):

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{s}{c \ln \frac{2}{3}} \left[1 + \frac{c - 3a}{\xi} + \ln \frac{\xi}{3a} \right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14).$$

Für den Punkt $\xi = 3a$, $\eta = 0$ wird hiernach:

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\xi = 3a} = \frac{s}{3a \ln \frac{2}{3}}.$$

Die Gleichung der Tangente der Kurve in diesem Punkte lautet daher:

$$\eta = \frac{s}{3a \lg \frac{2}{3}} (\xi - 3a).$$

Sie schneidet, wie im Falle I, die Ordinatenachse stets im Punkte T_0 oder $\eta = -\frac{s}{\ln\frac{2}{3}}$.

Wann ist nun $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$ und zugleich $\frac{d\eta^2}{d\xi^2} \neq 0$, d. h. wann hat die Ordinate η ein Maximum oder Minimum? Hierzu ist ersichtlich nach der Gl. (14) notwendig, daß

$$1 + \frac{c-3a}{\xi} + \ln\frac{\xi}{3a} = 0 \quad \text{oder} \quad \ln\frac{\xi}{3a} = \frac{3a-c}{\xi} - 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

ist.

Es sei gleich hier bemerkt, daß für die Wurzeln ξ dieser Gleichung die zugehörigen Ordinaten η sich nach der Formel (7) oder gemäß der Gl. (15) nach der Formel:

$$\eta = -s \cdot \frac{(\xi + c - 3a)^2}{c \ln\frac{2}{3}} \frac{1}{\xi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

ergeben.

4. Diskussion der transzendenten Gleichung. Um nun jedoch die Wurzeln der transzendenten Gl. (15) zu finden, setzen wir jede der beiden Seiten der Gl. (15) gleich $-\tau - 1$ und außerdem

$$\xi = \frac{3a}{\sigma e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17),$$

wo σ und τ neue Variable bedeuten. Dann ergeben sich die beiden neuen Gleichungen:

$$\tau = \ln\sigma, \quad \tau = \varepsilon\sigma \quad . \quad . \quad . \quad (18\,\text{a,b}), \quad \text{wo} \quad \varepsilon = \frac{c-3a}{3a} e \quad . \quad . \quad . \quad (19) \quad \text{ist.}$$

Von den reellen Wurzeln (σ, τ) der Gleichungen (18) bestimmen die Wurzeln σ nach der Gl. (17) alle reellen Wurzeln ξ, welche der Gl. (15) genügen. Zur Auflösung des Gleichungspaares (18) wollen wir nun ein graphisches Verfahren anwenden. Wir denken in einem rechtwinkligen σ, τ-Koordinatensystem die durch die Gleichungen (18a, b) dargestellten Kurven gezeichnet. Die Gl. (18a) stellt einfach die logarithmische Linie dar, die Gl. (18b) eine Gerade durch den Anfangspunkt mit einer Amplitude φ, deren Tangensfunktion gleich ε ist. Wir berechnen zunächst die Amplitude φ_0 der durch den Koordinatenanfangspunkt M gehenden Tangente der logarithmischen Linie, Abb. 8. Da für letztere $\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{1}{\sigma}$ ist, so lautet die Gleichung der Tangente in einem beliebigen Punkte $(\bar\sigma, \bar\tau)$ der logarithmischen Linie:

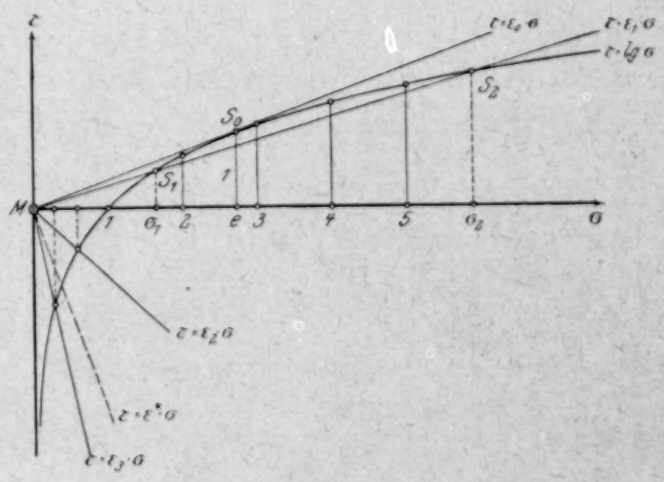


Abb. 8

$$\tau - \bar\tau = \frac{1}{\bar\sigma}(\sigma - \bar\sigma), \quad \text{wo} \quad \bar\tau = \lg\bar\sigma \quad \text{ist.}$$

Für die durch den Koordinatenanfangspunkt gehende Tangente ergeben sich hieraus die Koordinaten des Berührungspunktes S_0 als: $\bar\tau = \tau_0 = 1$ und $\bar\sigma = \sigma_0 = e$. Also gilt für die Amplitude φ_0 dieser besonderen Tangente

$$\varepsilon_0 = \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{1}{e}.$$

Wir können daher sogleich folgenden Satz aufstellen: Eine Gerade durch den Koordinatenanfangspunkt $\tau = \varepsilon\sigma$ hat mit der logarithmischen Linie $\tau = \lg\sigma$ **keinen** reellen Schnittpunkt gemein, wenn $\varepsilon > \varepsilon_0$ ist, **zwei zusammenfallende** Schnittpunkte, wenn $\varepsilon = \varepsilon_0$ ist, **zwei getrennte** reelle Schnittpunkte, wenn $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ist, **die Schnittpunkte mit den Abszissen 1 und $+\infty$**, wenn $\varepsilon = 0$, d. h. $c = 3a$ ist, also der Fall I vorliegt, **einen** reellen Schnittpunkt, wenn $\varepsilon < 0$ ist.

Wenn dieser Satz auch durch die Anschauung bereits richtig erscheint, so wollen wir ihn doch völlig streng beweisen. Für die Amplitude φ der Verbindungslinie eines beliebigen Punktes P oder $(\bar{\sigma}, \bar{\tau})$ der logarithmischen Linie mit dem Koordinatenanfangspunkt M gilt:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\bar{\tau}}{\bar{\sigma}} = \frac{\ln \bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \quad \text{und} \quad \frac{d \operatorname{tg}\varphi}{d\bar{\sigma}} = \frac{1-\ln \bar{\sigma}}{\bar{\sigma}^2}.$$

Diese Ableitung wird gleich 0 für $\bar{\sigma} = \sigma_0 = e$, d. h. wenn die Verbindungslinie MP eben die Tangente ist; sie ist positiv, wenn $0 < \bar{\sigma} < \sigma_0$ und negativ, wenn $\bar{\sigma} > \sigma_0$ ist. Hieraus folgt leicht: Die Verbindungslinie MP dreht sich stets in »positivem« Sinne mit der Amplitude $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ beginnend bis zur Amplitude φ_0, wenn $\bar{\sigma}$ von 0 bis σ_0 zunimmt, um dann wieder in negativem Sinne sich zurückzudrehen bis zur Amplitude $\varphi = 0$ für $\lim \bar{\sigma} = +\infty$. Hiermit ist der obige Satz bewiesen.

Soviel reelle Schnittpunkte dieser Satz nun für jede Möglichkeit angibt, soviel reelle Wurzelpaare (σ, τ) haben auch die Gl. (18a, b), und ebenso viel reelle Wurzeln ξ hat demnach gemäß der Gl. (17) auch die transzendente Gl. (15). Die genauere Bestimmung der Wurzelpaare σ, τ, die über die durch die Zeichnung gelieferten Werte hinausgeht, mag dann nach irgend einer Näherungsmethode erfolgen, worauf wir hier nicht einzugehen brauchen. Damit sind dann also in jedem speziellen Falle die gesuchten Wurzeln ξ gefunden.

5. Maxima, Minima und Wendepunkte der Diagonalkurve. Wir kehren nun zurück zu der Frage auf S. 259, die wir durch die Formel ergänzen:

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{s}{c \ln \frac{2}{3}} \frac{1}{\xi}\left[\frac{3a-c}{\xi} + 1\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Für den Klammerausdruck gilt nach den Gl. (17) und (19):

$$\frac{3a-c}{\xi} + 1 = 1 - \varepsilon\sigma = 1 - \tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Die Gl. (20) nimmt daher auch die Form an:

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{s}{c \ln \frac{2}{3}} \frac{1}{\xi}(1-\tau) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20').$$

Für $\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{1}{e}$, $\sigma = \sigma_0 = e$ und $\tau = \tau_0 = 1$ (gemäß der Gl. (18b)) wird also die rechte Seite gleich 0. Wir gewinnen somit endlich das folgende Resultat:

Für den Unterfall $c > 3a$, d. h. $\varepsilon > 0$ gilt:

Es hat die Ordinate η der Diagonalkurve (7) **kein** Maximum oder Minimum, wenn $\varepsilon > \varepsilon_0$ oder $\frac{c}{3a} > 1 + \frac{1}{e^2}$ ist, dagegen **ein** Maximum und **ein** Minimum, wenn $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ oder $1 < \frac{c}{3a} < 1 + \frac{1}{e^2}$ ist. In der Tat ist zuletzt für die beiden Wurzelpaare (σ_1, τ_1) und (σ_2, τ_2) der Gl. (18a, b) die eine Wurzel $\tau_1 < 1$, die andere $\tau_2 > 1$ (vergl. die Abb. 8), also nach Gl. (20) und (21) $\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)_{\tau=\tau_1} < 0$ und $\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)_{\tau=\tau_2} > 0$. Den Wurzeln σ_1 und σ_2 entsprechend ist die Abszisse des Maximums bezw. Minimums gegeben durch die Formel

$$\xi_1 = \frac{3a}{\sigma_1 e}, \qquad \xi_2 = \frac{3a}{\sigma_2 e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22a, b).$$

(In dem Beispiel der Abb. 4, wo die Ordinaten des Maximums und Minimums gestrichelt eingezeichnet sind, ist $\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{0{,}5}{4{,}5} e = 0{,}302$ und gemäß der Abb. 8 $\sigma_1 = 1{,}645$, $\sigma_2 = 5{,}852$ cm, also $\xi_1 = 1{,}007$, $\xi_2 = 0{,}352$ cm.)

Ist jedoch $\frac{c}{3a} = 1 + \frac{1}{e^2}$ $\left(\text{d. h. } \varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{1}{e}, \text{ also } \tau = \tau_0 = 1\right)$, so hat die Diagonalkurve einen Wendepunkt mit einer zur ξ-Achse parallelen Tangente und zwar für die Abszisse $\xi_0 = \frac{3a}{e^2}$.

In Rücksicht auf den Uebergang des Unterfalles α bezw. β zu dem ersten Falle $c = 3a$ oder $\varepsilon = 0$ (vergl. die Formel (19) und den Satz unten, S. 259) sei noch erwähnt:

Nähert sich $\frac{c}{3a}$ dem Werte 1 von größeren Werten her, so nähert sich der Kurvenpunkt des Minimums unbegrenzt dem Koordinatenanfangspunkt (vergl. die Abb. 4 und 5). Denn für $\lim \varepsilon = +0$ ergibt sich $\lim \sigma_2 = +\infty$, also nach der Gl. (22b) $\lim \xi_2 = +0$. Andererseits folgt aus der Gl. (7) und der Gl. (15) nach Elimination der Größe $3a - c$

$$\eta_2 = -\frac{s}{c \ln \frac{2}{3}} \xi_2 \ln^2 \frac{\xi_2}{3a};$$

die für $\lim \xi_2 = +0$ zunächst unbestimmte Form der rechten Seite $\lim \frac{\lg^2 \frac{\xi_2}{3a}}{\frac{1}{\xi_2}}$ bestimmt sich aber als $+0$.

Nähert sich $\frac{c}{3a}$ indes dem Werte 1 von kleineren Werten her, so nähert sich der eine Schnittpunkt H der Diagonalkurve mit der ξ-Achse, dessen Abszisse $\xi = 3a - c$ beträgt, unbegrenzt dem Koordinatenanfangspunkt (vergl. die Abb. 6 und 5).

Wir wollen auch einen Blick auf den bisher ausgeschlossenen Grenzfall $\lim c = +\infty$ werfen. Da dann der Punkt H der Abb. 4 ins Unendliche gerückt ist, ergeben sich die Kurvenpunkte A_n einfach bezw. als Schnittpunkte der Parallelen durch X_n und Y_n zu den Koordinatenachsen. Die Gl. (7) ergibt für $\lim c = \infty$ als Gleichung der neuen Diagonalkurven

$$\eta = s \frac{\lg \frac{\xi}{3a}}{\lg \frac{2}{3}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7'),$$

d. h. eine Kurve, die nicht wesentlich von der logarithmischen Kurve $\eta = \lg \xi$ verschieden ist (ebenso nämlich, wie etwa die Kurve $\eta = s \sin \frac{\xi}{a}$ von der Sinuslinie $\eta = \sin \xi$ verschieden ist).

Doch wollen wir noch auf folgende interessante Beziehung hinweisen: Wenn wir ganz den Abb. 1, 2, 3 analog die Diagonalkurve der Abb. 5 von einem Augenpunkt O aus in die Fußbodenebene projizieren, so gehen die Punkte X_n in solche Punkte X_n^0 über, daß die Abstände $X_n^0 X_{n+1}^0 = \frac{d}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ (für $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$) sind, wo $d = HO$ die gewählte Distanz bedeutet. Sieht man dann in der Fußbodenebene die Richtungen $\vec{FX_0}$ und die nach rechts gerichtete Senkrechte hierzu durch F, wo F der Fußpunkt des Lotes vom Augenpunkt O auf die Fußbodenebene ist, als ξ', η'-Achsen an, so wird die projizierte Diagonalkurve der Fußbodenebene durch die der Gl. (7') analog gebildete Gleichung:

$$\eta' = s \frac{\lg \frac{\xi'}{3a'}}{\lg \frac{2}{3}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7'')$$

gegeben, wenn $\frac{d}{2}\frac{2}{3} = a'$ gesetzt ist. —

Wir bemerken nun zunächst noch im Hinblick auf das Folgende: Für den auch sonst ausgeschlossenen Fall $c = 0$, d. h. $\varepsilon = \varepsilon^* = -e$ nach der Gl. (19) haben die Gl. (18a, b) das reelle Wurzelpaar $\sigma^* = \frac{1}{e}$, $\tau^* = -1$ (vergl. Abb. 8).

In dem Unterfalle $0 < c < 3a$, d. h. $0 > \varepsilon > -e$, hat die Ordinate η der Diagonalkurve nur ein Maximum, da $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ nach der Gl. (20') jetzt für $\xi = \xi_1 = \frac{3a}{\sigma_1 e}$, $\tau = \tau_1$ mit der Bedingung $\tau^* < \tau_1 < 0$ negativ ist. Für die Abszisse ξ_1 des Maximums gelten außerdem die Ungleichungen $3a - c < \xi_1 < 3a$, da ja $\xi = 3a$ und $\xi = 3a - c$ die Abszissen für die Schnittpunkte der Kurve mit der ξ-Achse sind. (In dem Beispiel der Abb. 6 ist insbesondere $\varepsilon = \varepsilon_2 = -\frac{1{,}5}{4{,}5} e = -0{,}906$ und gemäß der Abb. 8 $\sigma_1 = 0{,}587$, also $\xi_1 = 2{,}820$ cm).

Im Unterfalle $c < 0$ endlich hat die Ordinate η der Diagonalkurve nur ein Minimum, da $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ jetzt für $\xi = \xi_1$, $\tau = \tau_1$ mit der Bedingung $-\infty < \tau_1 < \tau^*$ positiv ist. Für die Abszisse ξ_1 des Minimums gelten jetzt die Ungleichungen $3a - c > \xi_1 > 3a$. (In dem Beispiel der Abb. 7 ist insbesondere $\varepsilon = \varepsilon_3 = -\frac{7{,}5}{4{,}5} e = -4{,}530$ und gemäß der Abb. 8 $\sigma_1 = 0{,}281$, also $\xi_1 = 6{,}050$ cm).

Die Formel (20) gestattet uns, auch noch die Koordinaten ξ_w, η_w des Wendepunktes für die einzelne Diagonalkurve zu bestimmen. Aus der Bedingung $\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 0$ folgt mit Rücksicht auf (7):

$$\xi_w = c - 3a, \qquad \eta_w = s \frac{(c-3a)^2}{c \lg \frac{2}{3}} \lg\left(\frac{c}{3a} - 1\right). \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Nur im Unterfalle $c > 3a$ hat die Diagonalkurve einen reellen Wendepunkt, dessen Koordinaten durch die Gl. (23) bestimmt sind (vergl. Abb. 4).

6. Schlussbemerkung. Wir wollen nun zum Schluß noch die Frage aufwerfen: Lassen sich außer den bereits konstruierten »Diagonalpunkten« A_n noch weitere Punkte der Diagonalkurve (7) mit Zirkel und Lineal konstruieren (bei gegebenen Strecken s, a, c)? Können wir z. B., wenn wir die Teile $Y_{n-1}\,Y_n$ der Grundlinie noch einmal halbieren durch die Punkte M_n, auch die Kurvenpunkte auf den Strahlen $H\,M_n$ konstruieren?

Für einen jeden Kurvenpunkt P ist nun, wenn Q der Schnittpunkt des Strahles HP mit der Grundlinie $Y_0\,Y_n$ ist:

$$u = \overrightarrow{Y_0\,Q} = \frac{c}{\xi + (c - 3a)}\,\eta$$

oder gemäß der Formel (7):

$$u = s \frac{\lg \frac{\xi}{3a}}{\lg \frac{2}{3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Soll dann der Punkt P mit Zirkel und Lineal konstruierbar sein, so muß ersichtlich gleiches vom Punkte Q gelten. Außer dem Punkte Q wäre aber etwa noch die Abszisse ξ zu konstruieren, um den entsprechenden Punkt P zu gewinnen.

Wir setzen nun $\frac{\xi}{3a} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{p}{q}}$, wo p, q teilerfremde ganze Zahlen sein sollen und q positiv sei, oder

$$\xi = 3a \sqrt[q]{\left(\frac{2}{3}\right)^p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Dann ist $\lg \frac{\xi}{3a} = \frac{p}{q} \lg \frac{2}{3}$, also:

$$u = \overrightarrow{Y_0\,Q} = s \frac{p}{q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24').$$

Ist dann $q = 2^m$, wo m eine beliebige positive ganze Zahl ist, so können wir ersichtlich nach Gl (25) durch wiederholtes Wurzelausziehen die (stets positive) Abszisse ξ und nach Gl. (24') auch die Strecke u und damit den zugehörigen Kurvenpunkt P konstruieren.

Für die oben eingeführten Halbierungspunkte M_n ist insbesondere $q = 2$, d. h. die auf den zugehörigen Strahlen HM_n gelegenen Kurvenpunkte P lassen sich ebenfalls mit Zirkel und Lineal konstruieren. Für den Halbierungspunkt M_1 von $Y_0\,Y_1$ ist $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$, also

$$\xi = 3a \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2a \cdot 3a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25').$$

In der Abb. 4 des Unterfalles $c > 3a$ ist beispielsweise die einfache Konstruktion des zugehörigen Kurvenpunktes P auf dem Strahl $H\,M_1$ ausgeführt; es ist dort der Halbkreis über $G\,X_0$ beschrieben und mit der Geraden $A_1\,X_1$ im Punkte $\overline{X}$ geschnitten. Dann ist $G\overline{X}$ nach GX^* auf die ξ-Achse übertragen und die Ordinatenlinie durch X^* mit dem Strahl $G\,M_1$ im Punkte P zum Schnitt gebracht.

Über die Wirkung einer Abrundung auf die Torsionsspannungen in der inneren Ecke eines Winkeleisens.

Von **E. TREFFTZ** in Dresden.

Die in der technischen Elastizitätslehre regelmäßig gestellte Frage nach der größten, in einem Bauteil auftretenden Spannung muß zuweilen dahin beantwortet werden, daß sich rechnerisch unendlich große Spannungen ergeben, wie z. B. bei der Torsion prismatischer Stäbe an einspringenden Ecken des Querschnitts. Die Frage bedarf dann einer Modifikation; wir müssen untersuchen, welche Abrundung einer solchen einspringenden Ecke oder Kante die Spannung auf das zulässige Maß reduziert, bezw. wie weit eine Spannungserniedrigung durch eine Abrundung überhaupt zu erreichen ist.

In der vorliegenden Arbeit berechne ich den Einfluß einer Abrundung auf die Torsionsspannungen in der einspringenden Ecke eines Winkeleisens, und zwar entwickle ich ein Näherungsverfahren für schwache Abrundungen (kleine Abrundungshalbmesser). Eine Ergänzung hierzu wird demnächst folgen; in einer Dissertation werden einige spezielle Fälle stärkerer Abrundung behandelt werden.

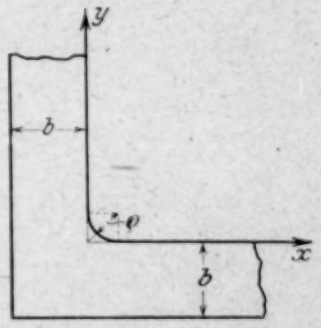


Abb. 1

1. Die Aufgabe und das Prinzip der Näherungslösung. Wir betrachten ein Winkeleisen, dessen Schenkel gleiche Breite $b = 1$ haben, und nehmen, was für unsere Fragestellung zulässig ist, an, daß sie sich ins Unendliche erstrecken. In bekannter Weise kann man den Spannungszustand durch eine hydrodynamische Analogie deuten[1]). Sind u und v die Geschwindigkeitskomponenten der Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit, deren Rotation konstant und zwar gleich 2 ist, und für die der Rand des Querschnitts Stromlinie ist, so lassen sich die Komponenten der Schubspannung für die x- und y-Richtung in der Form darstellen:

$$\tau_{xz} = G\omega u, \quad \tau_{yz} = G\omega v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

wo G den Schubmodul, ω die Verdrehung pro Längeneinheit des gedrillten Stabes bedeutet. Das Koordinatensystem ist dabei so gelegt, daß die z Achse mit der Richtung der Stabachse zusammenfällt und der Nullpunkt in die einspringende Ecke fällt. Beim Umströmen der einspringenden Ecke wird nun die Geschwindigkeit unendlich, und demnach ergeben sich hier auch unendliche Schubspannungen. Ueber den Charakter dieser Singularität gewinnen wir folgendermaßen Aufschluß. Wir stellen uns vor, daß wir der genannten Strömung von konstantem Wirbel in der Umgebung der Ecke eine wirbelfreie Strömung überlagern, die der ersten entgegengerichtet ist. Wenn wir die Stärke dieser Strömung passend bestimmen, so wird an der Ecke gerade die Geschwindigkeit Null herauskommen, d. h. im Spannungsproblem die Spannung Null. Das bedeutet, daß wir die Strömung, die uns die Schubspannungen liefert, in der Nähe der Ecke zerlegen können in eine Strömung von konstantem Wirbel, die an der Ecke die Geschwindigkeit Null hat, und in eine Potentialströmung, die das Unendlichwerden der Spannung darstellt. Nun ist das komplexe Potential einer eine scharfe Ecke umströmenden wirbelfreien Strömung

$$F(z) = Cz^{2/3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

dessen Ableitung die Geschwindigkeitskomponenten liefert:

$$u - iv = F'(z) = {}^2/_3\, Cz^{-1/3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Die Konstante C ist die charakteristische Konstante der Singularität, sie muß aus der Lösung des Spannungsproblems für das nicht abgerundete Winkeleisen entnommen werden. In einer Arbeit in den mathematischen Annalen[2]) habe ich diese Lösung für das Winkeleisen mit unendlich langen Schenkeln gegeben; aus der numerischen Durch-

[1]) Vergl. den Zus. Bericht von Th. Pöschl, diese Zeitschr. 1, 1921, S. 314.

[2]) E. Trefftz, Ueber die Torsion prismatischer Stäbe von polygonalem Querschnitt. Math. Ann. Band 82, 1920, Heft 1/2, Seite 97 bis 112.

rechnung ergibt sich C zu 1,48. In der Umgebung der Ecke werden also die Spannungskomponenten

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \frac{0{,}988}{\sqrt[3]{z}} G\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Wird jetzt die einspringende Ecke abgerundet, so fragt es sich, wie groß die Maximalspannung in dem innersten Punkte wird. Der strengen Lösung steht hier die Schwierigkeit der numerischen Durchführung im Wege. Wir wollen deshalb die folgende Näherungsmethode anwenden. Den Teil der Spannungen, welcher der Strömung mit konstantem Wirbel entspricht, wollen wir vernachlässigen, denn er wird in der Ecke Null und kommt somit gegen den dort unendlich werdenden Teil (4), der der Potentialströmung entspricht, nicht in Frage. Bezüglich dieses letzteren Teils bedenken wir, daß sich die Wirkung der Abrundung schon in geringer Entfernung nicht mehr bemerkbar macht. Wir werden also eine Potentialströmung suchen, die um die abgerundete Ecke strömt und sich in einiger Entfernung von der Ecke, d. h. in mathematischer Idealisierung: im Unendlichen verhält wie die Strömung um die unabgerundete Ecke. Wir erhalten diese Strömung, indem wir das von der abgerundeten Ecke begrenzte Gebiet, und zwar das nach der konvexen Seite gelegene, auf die Halbebene abbilden; dabei gehen die Stromlinien in die Geraden $\eta =$ konst. über (siehe Abb. 2c).

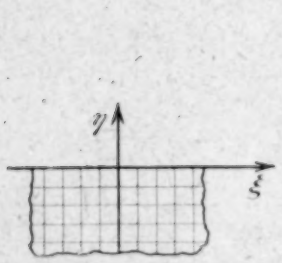


Abb. 2a

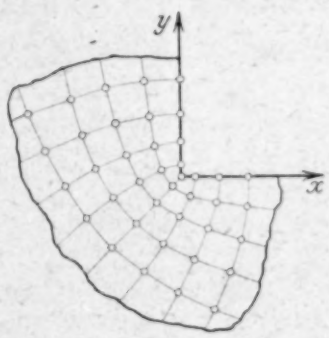


Abb. 2b

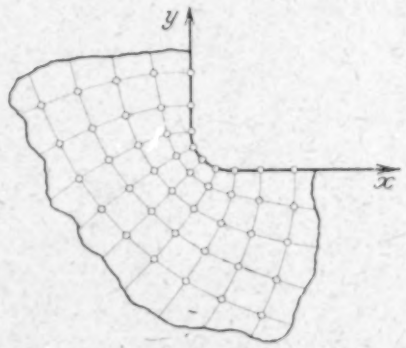


Abb. 2c

2. Die Abbildung der abgerundeten Ecke auf die Halbebene. Zur Abbildung der abgerundeten Ecke auf die Halbebene stehen uns die Methoden von Schwarz und Christoffel zur Verfügung, die wir am einfachsten folgendermaßen darstellen.

Es sei $$z = f(\zeta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

die Abbildungsfunktion, die die untere Halbebene der ζ-Ebene in das von der abgerundeten Ecke begrenzte Gebiet überführt. Die Ableitung dieser Funktion bezeichnen wir mit $z' = p + iq$, es ist also

$$p = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad q = -\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

die zweite Ableitung sei $z'' = s + it$, es ist also

$$s = \frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{\partial q}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi\, \partial \eta} = -\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}, \quad t = -\frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{\partial^2 x}{\partial \xi\, \partial \eta} = -\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \quad (7).$$

Betrachten wir nun irgend einen Punkt der ξ-Achse, so erhalten wir aus (5) mit $\eta = 0$ die Randpunkte in der z-Ebene

$$z = f(\xi), \quad x = x(\xi), \quad y = y(\xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Die Koordinaten x und y sind hier als Funktionen des Parameters ξ dargestellt; es ist also die Krümmung des Randes in der z-Ebene

$$k = \frac{\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}^3} = \frac{pt - qs}{(p^2 + q^2)^{3/2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Bezeichnen wir mit $J(f)$ den Imaginärteil einer Funktion f, mit R den Realteil, so wird nach (6) und (7)

$$k = \frac{1}{|z'|} J\frac{z''}{z'}$$

oder:

$$k\sqrt{p^2+q^2} = J\left(\frac{z''}{z'}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Nun ist längs der einzelnen Begrenzungsstücke k konstant; gehen wir also längs der ξ-Achse weiter, so erhalten wir durch Differentiation nach ξ

$$k\frac{ps+qt}{\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{\partial}{\partial\xi} J\left(\frac{z''}{z'}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Nun ist für $d\zeta = d\xi =$ reell

$$\frac{\partial}{\partial\xi} J\left(\frac{z''}{z'}\right) = J\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{z''}{z'}\right).$$

Die rechte Seite wird also einfach $J\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{z''}{z'}\right)$.

Die linke Seite wird $k\sqrt{p^2+q^2}\,R\left(\frac{z''}{z'}\right)$

oder bei Benutzung von (10): $J\left(\frac{z''}{z'}\right) R\left(\frac{z''}{z'}\right)$

und das ist $= \frac{1}{2} J\left(\frac{z''}{z'}\right)^2$.

Wir erhalten somit die Bedingung dafür, daß die Krümmung konstant ist,

$$J\left\{\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{z''}{z'}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2\right\} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Wäre der Ausdruck $\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{z''}{z'}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2$ überall regulär, so könnten wir aus dem Verschwinden seines Imaginärteils längs der reellen Achse schließen, daß er überall Null wäre. Nun sollen den Punkten $\zeta = -1$ und $\zeta = +1$ die Punkte in der z-Ebene entsprechen, an denen der Kreisbogen an die Geraden anschließt; in diesen Punkten hat $z = f(\zeta)$ eine Singularität, also auch der Ausdruck (12).

Den Charakter dieser Singularität erkennen wir daraus, daß an diesen Punkten die Krümmung sich sprungweise ändert; es muß also (10) der Imaginärteil von $\left(\frac{z''}{z'}\right)$ eine Singularität haben wie der Imaginärteil von $c \ln(\xi \pm 1)$. Wir erfüllen das, indem wir für $\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{z''}{z'}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2$ in den Punkten $\zeta = -1$ und $\zeta = +1$ einfache Pole annehmen. Schließlich haben wir im Unendlichen $z = \zeta^{3/2}$, also

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{z''}{z'}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 = -\frac{5}{8}\zeta^{-2}.$$

Im Unendlichen muß also $\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{z''}{z'}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2$ wie $-\frac{5}{8}\frac{1}{\zeta^2}$ gegen Null gehen. Setzen wir

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{z''}{z'}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 = -\frac{5}{8}\frac{1}{\zeta^2-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13),$$

so sind die Bedingungen für $\zeta = \pm 1$ und im Unendlichen erfüllt; ebenso gilt (12), so daß die Konstanz der Krümmung längs der einzelnen Begrenzungsstücke gesichert ist. In (13) haben wir die Differentialgleichung gefunden, der unsere Abbildungsfunktion genügt. Wir verwandeln sie in eine lineare Differentialgleichung, wenn wir $w = \frac{1}{\sqrt{z'}}$ als neue Variable einführen. Gl. (13) wird dann:

$$w'' - \frac{5w}{16(\zeta^2-1)} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14).$$

In dieser Form verwenden wir die Gleichung zur Integration; wir entwickeln die Lösung einmal im Unendlichen, dann in der Umgebung von $\zeta = 0$ und bestimmen die Integrationskonstanten der Entwicklung am Nullpunkt so, daß sich diese Entwicklung in den Punkten $\zeta = -1$ und $\zeta = +1$ an die Entwicklung um $\zeta = \infty$ anschließt. Die erste Entwicklung konvergiert außerhalb, die zweite innerhalb des Einheitskreises, so daß wir damit die ganze Abbildung beherrschen.

Setzen wir also im Unendlichen (unter Berücksichtigung des Charakters von $z = f(\zeta)$ im Unendlichen)

$$w = C_1\zeta^{-1/4} + C_5\zeta^{-5/4} + C_9\zeta^{-9/4} + \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad (15),$$

so erhalten wir für die Koeffizienten aus der Differentialgleichung die Rekursionsformeln:

$$C_{8n+9} = \frac{(8n+1)\,(8n+5)}{(8n+9)\,(8n+13)-5}\,C_{8n+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16),$$

wo C_1 als Integrationskonstante stehen bleibt, und C_5, C_{13}, C_{21} usw. Null werden. Numerisch ergeben sich daraus die Werte:

$$C_9 = 0{,}0446\,C_1,\ C_{17} = 0{,}0148\,C_1,\ C_{25} = 0{,}0073\,C_1,\ C_{33} = 0{,}0044\,C_1,\ C_{41} = 0{,}0039\,C_1 \quad (17).$$

Setzt man diese ein und schätzt den Rest nach elementaren Methoden ab, so erhält man für

$$\zeta = \pm 1 \quad w(1) = C_1\,(1{,}092 \pm 0{,}004),\ w(-1) = C_1\,e^{i\pi/4}\,(1{,}092 \pm 0{,}004) \quad (18).$$

Für die Entwicklung am Nullpunkte setzen wir an:

$$w = \gamma_0 + \gamma_1\,\zeta + \gamma_2\,\zeta^2 + \gamma_3\,\zeta^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

und erhalten für die Koeffizienten die Rekursionsformeln

$$\gamma_{\nu+2} = \frac{\nu\,(\nu-1) - {}^5/_{16}}{(\nu+2)\,(\nu+1)}\,\gamma_\nu \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20).$$

γ_0 und γ_1 bleiben als Integrationskonstanten unbestimmt, für die übrigen ergibt die numerische Auswertung:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_2 &= -\,0{,}1563\,\gamma_0, & \gamma_3 &= -\,0{,}0521\,\gamma_1 \\ \gamma_4 &= -\,0{,}0220\,\gamma_0, & \gamma_5 &= -\,0{,}0148\,\gamma_1 \\ \gamma_6 &= -\,0{,}0086\,\gamma_0, & \gamma_7 &= -\,0{,}0069\,\gamma_1 \\ \gamma_8 &= -\,0{,}0045\,\gamma_0, & \gamma_9 &= -\,0{,}0040\,\gamma_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21).$$

Setzt man diese Werte ein und schätzt wieder den Rest ab, so ergibt sich mit einer Genauigkeit von $^1/_2$ vH

$$\left.\begin{aligned} w(1) &= 0{,}791\,\gamma_0 + 0{,}906\,\gamma_1 \\ w(-1) &= 0{,}791\,\gamma_0 - 0{,}906\,\gamma_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22).$$

Diese Werte müssen den oben ermittelten gleich sein, d. h. es ist:

$$0{,}791\,\gamma_0 + 0{,}906\,\gamma_1 = 1{,}092\,C_1,$$
$$0{,}791\,\gamma_0 - 0{,}906\,\gamma_1 = 1{,}092\,e^{i\pi/4}\,C_1,$$

woraus sich γ_0 und γ_1 berechnen:

$$\gamma_0 = 0{,}690\,(1 + e^{i\pi/4})\,C_1,\ \gamma_1 = 0{,}603\,(1 - e^{i\pi/4})\,C_1 \quad \ldots\ldots \quad (23).$$

Die übrig bleibende Integrationskonstante C_1 bestimmt sich aus der Krümmung des abrundenden Kreisbogens unserer Ecke. An einem beliebigen Randpunkte ist die Krümmung $k = \frac{1}{|z'|}\,J\left(\frac{z''}{z'}\right)$ oder, in $w = \frac{1}{\sqrt{z'}}$ ausgedrückt:

$$k = -\,2\,|w|^2\,J\left(\frac{w'}{w}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24).$$

Setzen wir hier die Werte von w und w' für $\zeta = 0$ ein, $w(0) = \gamma_0$, $w'(0) = \gamma_1$, so ergibt sich $k_0 = -\,2\,\gamma_0\,\bar{\gamma}_0\,J\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\right)$ oder

$$k_0 = -\,2\,J(\bar{\gamma}_0\,\gamma_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25).$$

Daraus ergibt (23)
$$k_0 = 1{,}18\,C_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26),$$

und damit ist unsere Aufgabe soweit gelöst, als sie für unsere Aufgabe von Bedeutung ist. Auf die Aufstellung der Reihen für z können wir verzichten, da für die Spannungsberechnung nur $z' = \frac{1}{w^3}$ in Frage kommt und wir dieses auch nur im innersten Punkte des Kreisbogens brauchen, d. h. für $\zeta = 0$, weil uns ja nur die Maximalspannung interessiert.

3. Die maximale Spannung in der einspringenden Ecke. Nach Abschnitt 1 erhalten wir die Spannungskomponenten in der Umgebung der Ecke in der Form:

$$\tau_{xz} - i\,\tau_{yz} = G\,\omega\,F'(z)$$

aus der Ableitung des komplexen Potentials $F(z)$ für eine die Ecke umströmende Potentialströmung, dessen Ableitung im Unendlichen von der Form $F'(z) = \frac{0.988\,G\,\bar{\omega}}{\sqrt[3]{z}}$ ist. Da in der ζ-Ebene die Stromlinien einfach die Geraden $\eta = \text{konst.}$ sind, so wird das gesuchte komplexe Strömungspotential

$$F(z) = A\,\zeta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27),$$

die Spannungen werden also:

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = G\omega A \frac{d\zeta}{dz} = G\omega A w^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Die Konstante A bestimmt sich aus der vorstehenden Bedingung für das Unendliche; im Unendlichen wird $\frac{d\zeta}{dz} = w^2 = C_1^2 \zeta^{-1/2}$, daraus folgt durch Integration $\zeta = \left(\frac{3 C_1^2}{2} z\right)^{2/3}$, also

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = G\omega A C_1^2 \left(\frac{3 C_1^2}{2} z\right)^{-1/3} = G\omega \sqrt[3]{\frac{2}{3}} A C_1^{4/3} z^{-1/3} \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Die Uebereinstimmung mit (4) erfordert $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} A C_1^{4/3} = 0{,}988$ oder $A = 1.13\, C_1^{-4/3}$. Die größte Spannung tritt im innersten Punkt des abrundenden Kreisbogens auf, d. h. für $\zeta = 0$, hier wird

$$\tau_{max} = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = G\omega A |w_0|^2 = G\omega A \gamma_0 \bar{\gamma}_0.$$

Wir erhalten daraus für die maximale Spannung

$$\tau_{max} = G\omega\, 1{,}13\, C_1^{-4/3}\, 1{,}625\, C_1^2 = \frac{1{,}74\, G\omega}{\sqrt[3]{\varrho}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Dies ist unser Hauptresultat, es gibt uns vor allen Dingen die Art des Unendlichwerdens von τ_{max} mit abnehmendem Abrundungshalbmesser.

Es ist zweckmäßig, sich von der Spezialisierung $b = 1$ frei zu machen und das eben gewonnene Resultat noch in etwas veränderter Form darzustellen. Erstrecken sich die Schenkel des Winkeleisens ins Unendliche, so geht die Spannung an dem Rande gegen den Wert $\tau_\infty = G\omega b$ und zwar nähert sich sowohl an der Oberseite wie an der Unterseite τ diesem Werte sehr rasch (exponentiell). Auch für Winkeleisen endlicher Länge unterscheidet sich die Maximalspannung an den Schenkeln nur wenig von diesem Werte. Mit Benutzung dieser Spannung schreibt sich (30)

$$\frac{\tau_{max}}{\tau_\infty} = 1{,}74 \sqrt[3]{\frac{b}{\varrho}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31),$$

wobei die Spezialisierung $b = 1$ aufgegeben ist. Es läge natürlich nahe, die Abrundung so zu wählen, daß $\tau_{max} = \tau_\infty$ würde, doch wäre das schon eine so starke Abrundung, daß unsere Näherungsmethode nicht mehr anwendbar wäre. An einigen Beispielen stärkerer Abrundung hat Hr. Dassen in einer Aachener Dissertation das Resultat erhalten, das für starke Abrundung ziemlich unabhängig von dem Krümmungshalbmesser $\tau_{max} = 2\,\tau_\infty$ gesetzt werden kann. 134

Spannungsverteilung in Blechen mit mehreren kreisrunden Löchern.

Von **C. WEBER** in Hildesheim.

Zu den ungelösten Aufgaben der Elastizitätslehre gehört die Frage nach der Spannungsverteilung in Blechen mit mehreren kreisrunden Löchern. Von Wichtigkeit ist besonders die Spannungserhöhung am Rande der Löcher. In vorliegender Arbeit gebe ich die bei einer früheren Gelegenheit[1]) angekündigte Lösung für den Fall der allseitig oder in einer Richtung gezogenen unendlichen Scheibe mit zwei Löchern. Am Schluß wird ein Zahlenbeispiel durchgerechnet und werden Schlußfolgerungen für die mehrfach durchlochte Scheibe gezogen.

1. Aufsuchung einer Teillösung. Die zwei verschieden großen Löcher, Abb. 1, gehören dem Systeme einer zweipoligen Kreisschar an, deren Polabstand gleich der Längeneinheit genommen ist. Durch die

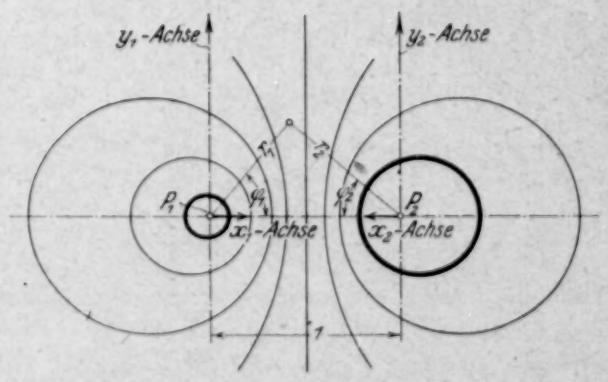


Abb. 1

[1]) Diese Zeitschr. 2, 1922, S. 185–187.

Pole P_1 und P_2 sind Polarkoordinatensysteme mit den Koordinaten r_1, φ_1 bezw. r_2, φ_2 gelegt. Im Bedarfsfalle sind die entsprechenden rechtwinkligen Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 eingeführt. Die Ränder der Löcher seien unbelastet. Im Unendlichen trete entweder allseitig oder in einer beliebigen Richtung die Normalspannung p auf. Die Spannungen sind als zweite Teilableitungen der Airyschen Spannungsfunktion F, welche die Bedingung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\right)=0$$

erfüllt, gegeben.

Für unendlich großes r_1 bezw. r_2 geht die Spannungsfunktion bei Vernachlässigung der für die Spannungen unwesentlichen unveränderlichen Glieder und Glieder ersten Grades über in

1. $F = {}^1/_2\, p\, r_1^2$ für allseitigen gleichmäßigen Zug,
2. $F = {}^1/_2\, p r_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \alpha)$ für den Fall einer Zugspannung nur in Richtung $\varphi_1 = \alpha$.

Außerdem können noch logarithmische Funktionen auftreten, deren zweite Teilableitungen für $r_1 = \infty$ verschwinden.

Aus dem Falle 2 ergeben sich mit $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ die Fälle der in der x_1- bezw. y_1-Achse gezogenen Scheibe.

Zur Auffindung der Spannungsfunktion F benutze ich den Weg der Umkehrung (Inversion), der in der Göttinger Dissertation von A. Timpe zur Untersuchung der Spannungen in einem durch zwei Kreisbogen begrenzten Streifen angewandt wird; vorliegender Fall mit den sich ergebenden Schwierigkeiten wird jedoch nicht behandelt.

Setzt man in der Funktion $\frac{F}{r_1^2}$

$$x_1 = \frac{x'}{x'^2+y'^2}, \qquad y_1 = \frac{y'}{x'^2+y'^2} \quad \text{bezw.} \quad \varphi_1 = \varphi', \qquad r_1 = \frac{1}{r'},$$

so erhält man eine neue Airysche Spannungsfunktion F'. Jedem Punkte der Funktion F entspricht ein Punkt der neuen Funktion F', der auf einem gleichgerichteten Strahle liegt, dessen Entfernung vom Umkehrpole jedoch den umgekehrten Wert hat. Beliebige Kreise gehen wieder in Kreise über. Durch nochmalige Umkehrung — zum Unterschiede im weiteren Rückkehrung genannt — erhält man wieder die ursprüngliche Funktion F.

Bezeichnen σ_r, σ_t und τ die Spannungen des durch die Funktion F gegebenen Spannungszustandes mit dem Umkehrpol als Koordinatenanfangspunkt, desgleichen σ_r', σ_t' und τ' die durch F' gegebenen Spannungen, so besteht für entsprechende Punkte beider Funktionen folgende Beziehung:

$$\sigma_r = r'^2\sigma_r' + 2\left(F' - r'\frac{\partial F'}{\partial r'}\right), \qquad \sigma_t = r'^2\sigma_t' + 2\left(F' - r'\frac{\partial F'}{\partial r'}\right), \qquad \tau = -r'^2\tau' \quad (1).$$

Hieraus folgt: Die Hauptspannungen gehen wieder in Hauptspannungen über. Den Hauptspannungslinien (Spannungstrajektorien) der Funktion F entsprechen ebenfalls Hauptspannungslinien der umgekehrten Funktion F'. Ein gleichmäßig belasteter bezw. unbelasteter Rand gibt bei der Umkehrung wieder einen gleichmäßig belasteten Rand.

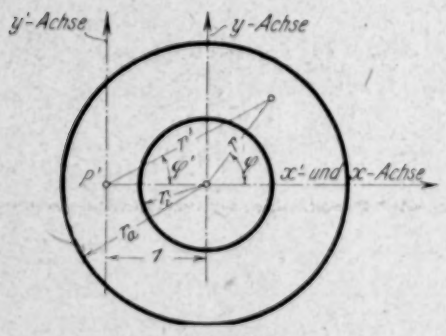


Abb. 2

Die Umkehrung der unendlichen Scheibe mit zwei kreisrunden Löchern gibt, falls P_1, der eine Pol der Kreisschar, als Umkehrpol gewählt wird, einen durch zwei gleichmittliche (konzentrische) Kreise gebildeten Ring, Abb. 2. Der Umkehrpol liegt im Kreisringe im Abstande 1 vom Mittelpunkte. Die Halbmesser der Begrenzungskreise sind r_i und r_a. Da die Ränder der beiden Löcher unbelastet waren, so sind die Begrenzungskreise des Ringes ebenfalls unbelastet oder gleichmäßig belastet. Die Koordinaten, bezogen auf den Mittelpunkt des Ringes, sind mit r und φ (ohne Zeichen) bezeichnet. Die Airysche Spannungsfunktion F' nimmt dann folgende allgemeine Gestalt an, wobei nur zur Nullachse spiegelrechte (symmetrische) Funktionen berücksichtigt sind:

$$F' = a_0 + b_0 r^2 + c_0 \lg r + d_0 r^2 \lg r + (a_1 r + b_1 r^3 + c_1 r^{-1} + d_1 r \lg r)\cos\varphi + e_1 r\varphi \sin\varphi + \sum_{n=2}^{n=\infty}(a_n r^n + b_n r^{n+2} + c_n r^{-n} + d_n r^{-n+2})\cos n\varphi \quad (2).$$

Da die Ränder des Kreisringes gleichmäßig belastet sind, so muß die Funktion F' und ihre Ableitung $\frac{\partial F'}{\partial r}$ für $r = r_i$ und $r = r_a$ Festwerte geben. Es bleiben nur die von φ unabhängigen Glieder der allgemeinen Lösung (2) nach:

$$F' = a_0 + b_0 r^2 + c_0 \lg r + d_0 r^2 \lg r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Von den Beiwerten lassen sich zwei so bestimmen, daß für $r = r_a$ die Funktionen F' und $\frac{\partial F'}{\partial r}$ gleich Null werden. Der äußere Rand des Kreisringes ist dann unbelastet und in der Rückkehrung erhält man einen unbelasteten Rand des Loches um P_1. Hieraus erhält man

$$a_0 = c_0 (1/2 - \lg r_a) + 1/2\, d_0 r_a^2 \quad . \quad . \quad . \quad (4), \qquad b_0 = -\frac{c_0}{2 r_a^2} - d_0 (1/2 + \lg r_a) \quad . \quad . \quad (5).$$

Bezogen auf den Umkehrpol als Koordinatenanfangspunkt wird die Spannungsfunktion

$$F' = a_0 + b_0 (r'^2 + 2 r' \cos \varphi + 1) + 1/2\, c_0 \lg (r'^2 + 2 r' \cos \varphi + 1) + 1/2\, d_0 (r'^2 + 2 r' \cos \varphi + 1) \lg (r'^2 + 2 r' \cos \varphi' + 1) \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Durch Rückkehrung erhält man

$$F = a_0 r_1^2 + b_0 r_2^2 + 1/2\, c_0 r_1^2 (\lg r_2^2 - \lg r_1^2) + 1/2\, d_0 r_2^2 (\lg r_2^2 - \lg r_1^2) \quad . \quad (7),$$

worin a_0 und b_0 den Gl. (4) und (5) zu entnehmen sind.

Die gleichmittlichen (konzentrischen) Kreise des Kreisringes gehen in die Kreise des Kreisbüschels über; diese haben unveränderliche Normalbelastung. Der Kreis um P_1 vom Durchmesser $d_1 = \frac{1}{r_a + 1} + \frac{1}{r_a - 1}$, der dem äußeren Kreise des Kreisringes entspricht, ist unbelastet. Je nach Wahl des Verhältnisses der Beiwerte c_0 und d_0 erhält man einen weiteren unbelasteten Kreis um P_2, während ihr endgültiger Wert durch die Spannung p im Unendlichen bestimmt ist.

Sind die Kreise um P_1 und P_2 vom gleichen Durchmesser, so wird $\frac{c_0}{d_0} = -1$ und

$$F = 1/2\, d_0 \left\{ \left(r_a - \frac{1}{r_a} \right)^2 r_1^2 + (2 r_1 \cos \varphi_1 - 1) \lg r_1^2 + (2 r_2 \cos \varphi_2 - 1) \lg r_2^2 \right. \quad . \quad (8).$$

Glieder ersten Grades und Unveränderliche sind hierbei vernachlässigt.

Die Spannungen σ_y für die Punkte der x_1-Achse werden:

$$\sigma_y = \left(\frac{\partial^2 F(r_1 \varphi_1)}{\partial r_1^2} \right)_{\varphi_1 = 0} \equiv d_0 \left\{ \left(r_a - \frac{1}{r_a} \right)^2 + \frac{4}{r_1} + \frac{2}{r_1^2} + \frac{4}{-r_2} + \frac{2}{r_2^2} \right\}$$

$$\equiv p \left[1 + \frac{2}{\left(r_a - \frac{1}{r_a} \right)^2} \left(\frac{2}{r_1} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{2}{-r_2} + \frac{1}{r_2^2} \right) \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Diese Lösung ist auf anderem Wege von Herrn Professor Pöschl gefunden[1]; sie stellt jedoch, wie ich nachwies, nur eine Scheinlösung der gestellten Aufgabe dar, da dieser Spannungszustand nur bei einer bestimmten Vorspannung der unbelasteten Scheibe auftreten kann[2]. Dies gilt auch für die allgemeinere Lösung, Gl. (7), infolge des Auftretens der Glieder $r_1^2 \lg r_1^2$ und $r_1 \cos \varphi_1 \lg r_1^2$.

2. Herstellung der richtigen Lösung. Um nun die richtige Lösung zu finden, betrachte ich die bekannte Lösung für die unendliche Scheibe mit nur einem Kreisloche vom Durchmesser d. Die Airysche Spannungsfunktion hierfür bei allseitigem Zug im Unendlichen lautet

$$F = p \left(r_1^2 - \left(\frac{d}{2} \right)^2 \lg r_1^2 \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

und für den Fall eines Zuges im Unendlichen in Richtung der y-Achse und eines gleich großen Druckes in Richtung der x-Achse

$$F = p \cos 2 \varphi_1 \left[r_1^2 - 2 \left(\frac{d}{2} \right)^2 + \left(\frac{d}{2} \right)^4 r_1^{-2} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Beachtenswert sind in den Lösungen Gl. (10) und (11) die Glieder mit $\lg r_1^2$ und $r_1^2 \cos 2 \varphi_1$, da sie bei einer Umkehrung Unstetigkeitspunkte für die Funktion F' ergeben.

Ich mache nun für die Scheibe mit allseitigem Zug im Unendlichen und zwei gleich großen, unbelasteten Kreislöchern den Ansatz

$$F = \lg r_1 + \lg r_2 + F_e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

---

[1]) Diese Zeitschr. 1, 1921, S. 174—180.

[2]) Diese Zeitschr. 2, 1922, S. 185—187.

Hier ist F_e eine noch zu findende Ergänzungsfunktion. Für den allgemeinen Fall von zwei verschieden großen Löchern sind die Glieder $\lg r_1$ und $\lg r_2$ mit verschieden großen Beiwerten zu versehen. Durch Umkehrung erhält man

$$F' = -\, r'^2 \lg r'^2 + {}^1/_2 r'^2 \lg (r'^2 - 2 r' \cos \varphi' + 1) + F_e' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Die Umkehrung gibt eine Kreisringfläche mit den Halbmessern r_i und $r_a = \frac{1}{r_i}$. Im Umkehrpole P' innerhalb der Kreisringfläche hat die Funktion F' einen Unstetigkeitspunkt, der durch das erste Glied der Funktion gegeben ist.

Auf den Mittelpunkt des Kreisringes als Koordinatenanfangspunkt bezogen, lautet die Funktion

$$F' = ((x+1)^2 + y^2)\,\{{}^1/_2 \lg (x^2+y^2) - [\lg (x+1+iy) + \lg (x+1-iy)]\} + F_e' \quad (14).$$

Durch Zerlegung des zweiten und dritten logarithmischen Gliedes in Reihen von $(x+iy)^n$ und $(x-iy)^n$ mit positiven Werten von n erhält man

$$F' = [(x+1)^2 + y^2] \left\{ {}^1/_2 \lg (x^2+y^2) - \begin{bmatrix} (x+iy) - {}^1/_2 (x+iy)^2 + \ldots \ldots \\ (x-iy) - {}^1/_2 (x-iy)^2 + \ldots \ldots \end{bmatrix} \right\} + F_e'$$

$$= (r^2 + 1 + 2 r \cos \varphi)\,[\lg r - 2 (r \cos \varphi - {}^1/_2 r^2 \cos 2\varphi + {}^1/_3 r^3 \cos 3\varphi \ldots .)] + F_e'$$

$$= (r^2+1) \lg r - 2 r^2 + 2 \cos \varphi\,(r \lg r - r - {}^1/_2 r^3)$$

$$- \sum_{n=2}^{n=\infty} (-1)^n \cos n\varphi \left[\frac{r^n}{n(n-1)} - \frac{r^{n+2}}{n(n+1)} \right] + F_e' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Durch Zerlegung derselben logarithmischen Glieder in Reihen von $(x+iy)^{-n}$ und $(x-iy)^{-n}$ erhält man ebenso

$$F' = [(x+1)^2 + y^2] \left\{ {}^1/_2 \lg (x^2+y^2) - \lg (x^2+y^2) - \begin{bmatrix} (x+iy)^{-1} - {}^1/_2 (x+iy)^{-2} + \ldots \\ (x-iy)^{-1} - {}^1/_2 (x-iy)^{-2} + \ldots \end{bmatrix} \right\}$$

$$+ F_e' = (r^2+1+2 r \cos \varphi)\,[-\lg r - 2 (r^{-1} \cos \varphi - {}^1/_2 r^{-2} \cos 2\varphi + {}^1/_3 r^{-3} \cos 3\varphi \ldots)] + F_e'$$

$$= -(r^2+1) \lg r - 2 + 2 \cos \varphi\,(-r \lg r - r - {}^1/_2 r^{-1})$$

$$- \sum_{n=2}^{n=\infty} (-1)^n \cos n\varphi \left[\frac{r^{-n+2}}{n(n-1)} - \frac{r^{-n}}{n(n+1)} \right] + F_e' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Die Reihenentwicklung nach Gl. (15) gilt für $r < 1$, die Reihenentwicklung nach Gl. (16) für $r > 1$.

Die Ergänzungsfunktion F_e' entspricht der in Gl. (2) gegebenen Reihe. Die Beiwerte c_0 und d_0, d_1 und e_1 sind hierin gleich null zu setzen. In der Rückkehrung geben die entsprechenden Glieder entweder Spannungszustände mit einer Vorspannung in der unbelasteten Scheibe oder eine Belastung jedes Lochrandes durch Kräfte, die nicht im Gleichgewichte sind. Die übrigen Beiwerte bestimme ich so, daß für die Punkte des äußeren Randes des Kreisringes die Funktionen F' und $\frac{\partial F'}{\partial r}$ gleich null werden. Es ist dann der äußere Rand unbelastet, und in der Rückkehrung erhält man nach Gl. (1) ebenfalls einen unbelasteten Rand des Loches um P_1. Für die Punkte des inneren Randes des Kreisringes muß die Belastung mindestens eine gleichmäßige sein, F' und $\frac{\partial F'}{\partial r}$ also nur Glieder ohne φ und mit $\cos \varphi$ enthalten und der Ausdruck $\left(F' - \frac{\partial F'}{\partial r}\right)$ einen Festwert geben.

In der Rückkehrung erhält man dann ebenfalls einen unbelasteten Lochrand um P_2, da der Ansatz, Gl. (12), für r_1 und r_2 gleich war. Mit den so bestimmten Beiwerten lautet die Funktion F':

$$F' = \Bigg[-(r^2+1) \lg r - 2 + \left(\lg r_a - \frac{r_a^2+1}{2} + 2 \right) + \left(\frac{r_a^2+1}{2 r_a^2} + \lg r_a \right) r^2 \Bigg]$$

$$+ 2 \cos \varphi \left[-r \lg r - r - {}^1/_2 r^{-1} + \left(\lg r_a + {}^1/_2 + \frac{1}{r_a^2+1} \right) r + \frac{1}{2 (r_a+1)} (r^3 + r^{-1}) \right]$$

$$+ \sum_{n=2}^{n=\infty} (-1)^n 2 \cos n\varphi \left[-\frac{r^{-n+2}}{n(n-1)} + \frac{r^{-n}}{n(n+1)} \right.$$

$$+ \frac{-\frac{r_a^0}{n} + \frac{r_a^2}{n-1} - \frac{r_a^{-2n}}{n(n-1)}}{r_a^{2n} - r_a^{-2n} + n (r_a^2 - r_a^{-2})} (r^n + r^{-n+2})$$

$$\left. + \frac{-\frac{r_a^0}{n} - \frac{r_a^{-2}}{n+1} + \frac{r_a^{-2n}}{n(n+1)}}{r_a^{2n} - r_a^{-2n} + n (r_a^2 - r_a^{-2})} (r^{n+2} + r^{-n}) \right] \quad (17).$$

Hierbei ist die Form der Funktion für $r > 1$, Gl. (16), genommen. Die in den eckigen Klammern rechtsstehenden Glieder bilden die Funktion F_e'.

Die tangentiale äußere Randspannung wird

$$\sigma_t' = \left(\frac{\partial^2 F'}{\partial r^2}\right)_{r=r_a} = -2(1-r_a^{-2})\left\{1 + 4\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n \cos n\varphi \frac{r_a^n - r_a^{-n}}{r_a^{2n} - r_a^{-2n} + n(r_a^2 - r_a^{-2})}\right\} \quad (18).$$

Durch Rückkehrung erhält man die gesuchte Funktion F. Für die verschiedenen Glieder von F_e' gelten für die Rückkehrung folgende Beziehungen:

1. $F_{e1}' = 2(-1)^n r^n \cos n\varphi \equiv (-1)^n [(x+iy)^n + (x-iy)^n] \equiv (-1)^n [(x'-1+iy')^n + (x'-1-iy')^n] \equiv 2\left[1 - \binom{n}{1} r' \cos\varphi' + \binom{n}{2} r'^2 \cos 2\varphi' \ldots\ldots + (-1)^n r'^n \cos n\varphi'\right]$;

Rückkehrung:

$$F_{e1} = 2 r_1^2 \left[1 - \binom{n}{1} r_1^{-1} \cos\varphi_1 + \binom{n}{2} r_1^{-2} \cos 2\varphi_1 \ldots\ldots + (-1)^n r_1^n \cos n\varphi_1\right].$$

2. $F_{e2}' = 2(-1)^n r^{n+2} \cos n\varphi = 2(r'^2 - 2r' \cos\varphi' + 1)\left[1 - \binom{n}{1} r' \cos\varphi' + \binom{n}{2} r'^2 \cos 2\varphi' \ldots\ldots + (-1)^n r'^n \cos n\varphi'\right]$;

Rückkehrung:

$$F_{e2} = 2 r_2^2 \left[1 - \binom{n}{1} r_1^{-1} \cos\varphi_1 + \binom{n}{2} r_1^{-2} \cos 2\varphi_1 \ldots\ldots + (-1)^n r_1^n \cos n\varphi_1\right].$$

3. $F_{e3}' = 2(-1)^n r^{-n} \cos n\varphi \equiv (-1)^n \left[\left(\frac{1}{x+iy}\right)^n + \left(\frac{1}{x-iy}\right)^n\right]$

$$\equiv (-1)^n \left[\left(\frac{x'+iy'}{x'-1+iy'} - 1\right)^n + \left(\frac{x'-iy'}{x'-1-iy'} - 1\right)^n\right] \equiv \left[1 - \binom{n}{1}\left(\frac{x'+iy'}{x'-1+iy'}\right)^1 + \binom{n}{2}\left(\frac{x'+iy'}{x'-1+iy'}\right)^2 \ldots\ldots\right] + \left[1 - \binom{n}{1}\left(\frac{x'-iy'}{x'-1-iy'}\right)^1 + \binom{n}{2}\left(\frac{x'-iy'}{x'-1-iy'}\right)^2 \ldots\ldots\right];$$

Rückkehrung:

$$F_{e3} = r_1^2 \begin{bmatrix} 1 - \binom{n}{1}(1 - x_1 + iy_1)^{-1} + \binom{n}{2}(1 - x_1 + iy_1)^{-2} \ldots. \\ 1 - \binom{n}{1}(1 - x_1 - iy_1)^{-1} + \binom{n}{2}(1 - x_1 - iy_1)^{-2} \ldots. \end{bmatrix}$$

$$\equiv 2 r_1^2 \left[1 - \binom{n}{1} r_2^{-1} \cos\varphi_2 + \binom{n}{2} r_2^{-2} \cos 2\varphi_2 \ldots\ldots + (-1)^n r_2^{-n} \cos n\varphi_2\right].$$

4. $F_{e4}' = 2(-1)^n r^{-n+2} \cos n\varphi$;

Umformung wie für F_{e3}';

Rückkehrung:

$$F_{e4} = 2 r_2^2 \left[1 - \binom{n}{1} r_2^{-1} \cos\varphi_2 + \binom{n}{2} r_2^{-2} \cos 2\varphi_2 \ldots\ldots + (-1)^n r_2^{-n} \cos n\varphi_2\right].$$

Hiernach erhält man die Funktion F:

$$F = \lg r_1 + \lg r_2 - \tfrac{1}{2} \frac{r_a^4 - r_a^{-4}}{(r_a + r_a^{-1})^2} r_1^2 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{-\frac{r_a^0}{n} + \frac{r_a^{-2}}{n+1} + \frac{r_a^{-2n}}{n(n+1)}}{r_a^{2n} - r_a^{-2n} + n(r_a^2 - r_a^{-2})}$$

$$\left\{r_2^2\left[1 - \binom{n}{1} r_1^{-1} \cos\varphi_1 + \binom{n}{2} r_1^{-2} \cos 2\varphi_1 \ldots\right] + r_1^2\left[1 - \binom{n}{1} r_2^{-1} \cos\varphi_2 + \binom{n}{2} r_2^{-2} \cos 2\varphi_2 \ldots\right\}\right]$$

$$+ 2\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{-\frac{r_a^0}{n} + \frac{r_a^2}{n-1} - \frac{r_a^{-2n}}{n(n-1)}}{r_a^{2n} - r_a^{-2n} + n(r_a^2 - r_a^{-2})} \left\{r_1^2\left[1 - \binom{n}{1} r_1^{-1} \cos\varphi_1 + \binom{n}{2} r_1^{-2} \cos 2\varphi_2 \ldots.\right]\right.$$

$$\left. + r_2^2\left[1 - \binom{n}{1} r_2^{-1} \cos\varphi_2 + \binom{n}{2} r_2^{-2} \cos 2\varphi_2 \ldots\right]\right\} \quad \ldots \quad (19).$$

Die Spannung im Unendlichen wird für alle Richtungen

$$p = -\frac{r_a^4 - r_a^{-4}}{(r_a + r_a^{-1})^2} + 4\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{-\frac{r_a^0}{n} + \frac{r_a^{-2}}{n+1} + \frac{r_a^{-2n}}{n(n+1)}}{r_a^{2n} - r_a^{-2n} + n(r_a^2 - r_a^{-2})} + 4\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{-\frac{r_a^0}{n} + \frac{r_a^2}{n-1} - \frac{r_a^{-2n}}{n(n-1)}}{r_a^{2n} - r_a^{-2n} + n(r_a^2 - r_a^{-2})} \quad (20).$$

Die Spannung am Rande der Löcher findet man am leichtesten mit Hilfe der Beziehung (1) aus der Randspannung σ_t' der Umkehrung Gl. (18). Und zwar entsprechen den Punkten Q_1, Q_2 und Q_3 des Lochrandes in Abb. 3 die Punkte Q_1', Q_2' und Q_3' des Kreisringes in Abb. 4. Es wird

für Q_1': $\varphi = 0,\ r' = r_a + 1,$

für Q_2': $\sin\varphi = \frac{r_a^2 - 1}{r_a^2 + 1},\quad r' = \frac{r_a^2 - 1}{\sqrt{r_a^2 + 1}},$

für Q_3': $\varphi = \pi,\quad r' = r_a - 1.$

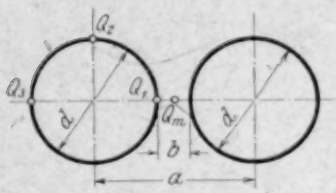


Abb. 3

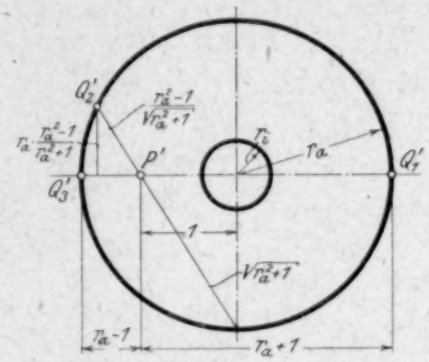


Abb. 4

3. Zahlenbeispiel. Ich führte die Rechnung durch für $r_a = 2$; dem entspricht eine unendliche Scheibe mit zwei Löchern vom Durchmesser $d = \frac{4}{3}$ und einer Stegbreite $b = \frac{1}{3}$. Die Stegbreite ist viermal kleiner als der Durchmesser der Löcher. Ich erhielt die Spannung im Unendlichen

$$p = -2{,}125$$

und die Tangentialspannungen

für Q_1' . . . . $\sigma_{t1}' = -0{,}8622$, für Q_1 . . . . $\sigma_{t1} = -7{,}760 = 3{,}65\,p$,
für Q_2' . . . . $\sigma_{t2}' = -1{,}9804$, für Q_2 . . . . $\sigma_{t2} = -3{,}565 = 1{,}68\,p$,
für Q_3' . . . . $\sigma_{t3}' = -5{,}012$, für Q_3 . . . . $\sigma_{t3} = -5{,}012 = 2{,}38\,p$.

In der Mitte des Steges für den Punkt Q_m fand ich unmittelbar aus Gl. (19) die Spannung in y-Richtung

$$\sigma_m = -6{,}297 = 2{,}96\,p = 0{,}812\,\sigma_{t1}.$$

Bei einem einzelnen Loche würde die Randspannung σ_t überall gleich $2p$ sein.

Für die Scheibe mit zwei gleich großen Löchern gibt die Scheinlösung nach Gl. (19) für Punkt Q_1 . . . . $\sigma_{t1} = 10\,p$, für Punkt Q_3 . . . . $\sigma_{t3} = 1{,}11\,p$, für Punkt Q_m . . . . $\sigma_m = 8{,}11\,p = 0{,}811\,\sigma_{t1}$.

Die Spannungen im Stege sind hier bedeutend größer; die Verteilung der Spannungen im Stege unterscheidet sich jedoch nur unwesentlich von der Verteilung der richtigen Lösung.

Durch Ueberlagerung der richtigen Lösung und der Scheinlösung, vermehrt um entsprechend gewählte Beiwerte, läßt sich erreichen, daß die Kraft im Stege in y-Richtung gleich Null wird. Dem entspricht eine unendliche Scheibe mit zwei kreisrunden Löchern und einem zerschnittenen Stege, wobei die Schnittlinien bei dicht aneinander liegenden Löchern fast unbelastet sind. Für obiges Beispiel wird für die Punkte Q_1 und Q_m die Spannung $\sigma_t \sim 0$, während die größte Spannung $\sigma_{t3} = 3{,}68\,p$ im Punkte Q_3 auftritt.

Vergrößert man die Löcher so, daß der Steg ständig schmäler wird, so nähert sich der Wert r_a dem Werte 1. Die Berechnung der Spannungen wird immer schwieriger, da die hierzu notwendigen Reihen nur langsam abnehmen. Hierfür läßt sich auf folgende Weise eine Näherungslösung finden.

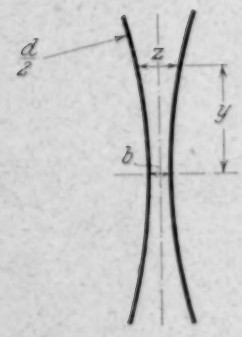


Abb. 5

Die beiden Löcher vom Durchmesser d liegen, Abb. 5, dicht aneinander, so daß dazwischen ein sehr schmaler Steg bleibt, dessen Breite in der engsten Stelle gleich b ist. Der Polabstand ist hier nicht weiter gleich der Längeneinheit zu setzen. Zerschneidet man den Steg, so klafft er um die Länge $\lambda = \frac{C p d}{E}$ auseinander. Der Beiwert C ist hierin unabhängig von der Breite b des Steges, da diese im Verhältnis zu den Lochdurchmessern gering ist. Um den Steg wieder zu verbinden, muß in ihm eine Kraft P_y in y Richtung wirken. Die veränderliche Breite des Steges ist in nicht zu weiter Entfernung von der x-Achse

$$z \sim b + \frac{y^2}{d}.$$

Die Dehnung in y-Richtung wird

$$\varepsilon_y = \frac{P_y}{zE} = \frac{P_y}{E} \frac{1}{b + \frac{y^2}{d}}.$$

Die Verlängerung beider Stegzipfel beträgt

$$\lambda = \int_{y_u}^{y_0} \varepsilon_y d_y = \frac{P_y}{E} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{b\,d}}\, y \right]_{y_u}^{y_0}.$$

Setzt man als Grenzen für die Integration annäherungsweise $-\infty$ und $+\infty$ ein, so erhält man

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{d}{b}} \frac{P_y}{E};$$

hieraus die Stegkraft

$$P_y = \frac{E\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{b}{d}} = \frac{1}{\pi} Cp \sqrt{bd} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

und die Spannung in der schmalsten Stelle des Steges

$$\sigma_y = \frac{P_y}{b} = \frac{1}{\pi} Cp \sqrt{\frac{d}{b}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Der Beiwert C muß einem durchgerechneten Beispiele entnommen werden; für $r_a = 1{,}5$, $b = {}^1/_{12}\, d$, erhielt ich $C \sim 5$.

Mit abnehmender Stegbreite bei gleichbleibendem Lochdurchmesser nimmt die Kraft im Stege bis null ab, während die Spannung bis ins Unendliche steigt. Für sich berührende Löcher bleibt es demnach gleich, ob der Steg verbunden ist oder nicht. Die größte Spannung tritt dann im Punkte Q_3, Abb. 3, auf und erreicht einen Wert zwischen $2{,}38\,p$ und $3{,}68\,p$; diese Werte sind dem durchgerechneten Beispiele mit $r_a = 2$ entnommen.

Für die Scheibe mit zwei kreisrunden Löchern und einem in x- bezw. y-Richtung wirkenden Zug im Unendlichen ist an Stelle des Ansatzes Gl. (12) folgender Ansatz zu wählen:

$$F = r^2 \cos 2\varphi + F_e,$$

desgleichen für beliebig gerichteten Zug:

$$F = r^2 \cos 2\,(\varphi + \alpha) + F_e.$$

Zum Schluß ist die gefundene Lösung für allseitigen Zug zu überlagern.

Die weitere Durchrechnung entspricht der obigen und bietet keine weiteren Schwierigkeiten.

Auch für verschieden große Löcher, darunter ebenfalls für den Fall der Halbscheibe mit einem Loche dicht am Rande läßt sich der Berechnungsgang anwenden.

Aus dem durchgerechneten Beispiele ist als beachtenswert hervorzuheben, daß bei dicht aneinander liegenden Löchern die Spannung im Stege ziemlich gleichmäßig verteilt ist. Während am Rande eines einzelnen Loches eine örtliche Erhöhung die Spannung bei allseitigem Zuge auf das Doppelte, bei einseitig gerichtetem Zuge auf das Dreifache der durchschnittlichen Zugspannung entsteht, wird eine Reihe von dicht aneinander liegenden Löchern eine geringere Erhöhung hervorrufen; nur ist dann selbstverständlich bei Berechnung der durchschnittlichen Spannung die Verringerung der übertragenden Scheibenbreite durch die Löcher zu berücksichtigen. Für eine allseitig gezogene Scheibe mit einer Reihe von gleich großen Löchern läßt sich die Abweichung der höchsten Spannung am Rande der Löcher von der durchschnittlichen Spannung zwischen denselben annähernd nach Gl. (9) berechnen.

Über ein Problem der Stromleitung.

Von **F. NOETHER** in Breslau.

Im ersten Teil dieses Aufsatzes[1]) stellt L. Lichtenstein folgende Aufgabe, die in ähnlicher Form in der Hochspannungstechnik vielfach eine Rolle spielt: Ein unbelasteter Einphasenleiter S ist in der Mitte über eine Wechselstromquelle geerdet, die seine Wechselspannung gegen Erde $= E \cos \omega t$ macht. Der Wechselspannung entspricht eine Aufladung des Leiters und, ebenso groß, aber von entgegengesetztem Vorzeichen, der Erdoberfläche. Zu bestimmen war zunächst die Ladungsverteilung auf der Erdoberfläche und die dem Wechsel der Ladung entsprechende Strömung in der Erde, die sich von der Erdungsstelle aus ausbreitet und in der Erdoberfläche endet. Dieser Teil der Aufgabe, der in der Aufstellung eines Strömungspotentials besteht, war durch den ersten Schritt einer sukzessiven Näherung, die von der Ladungsverteilung einer Gleichspannung ausging, zu lösen. Die weitere Aufgabe ist die Bestimmung des zu dieser Strömung gehörigen Ohmschen Widerstandes der Erde. Für Erdungszwecke interessiert dabei die Frage, ob dieser Widerstand wesentlich von der Lage und Ausdehnung des Leiters mit bedingt wird oder hauptsächlich nur von der Gestalt der Erdung selbst abhängt, die der Einfachheit halber als eine kleine metallische Halbkugel angenommen war.

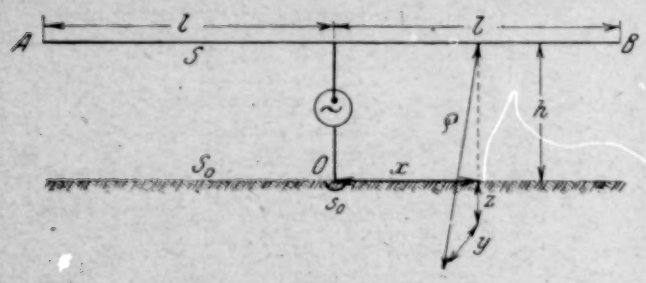


Abb. 1

1. Reduktion des Strompotentials ψ. Das Strömungspotential setzte sich zusammen aus dem Potential dieser Punktquelle (radiale Ausströmung) und einem Doppelintegral, genommen über Elementarpotentiale entgegengesetzten Vorzeichens, die von den Ladungen an der Erdoberfläche herrühren [L, Gl. (36)]. Unsere erste Aufgabe ist es, dieses Doppelintegral in einfachere Gestalt zu bringen. Das gelingt in der Tat sehr leicht, und zwar zufolge des Umstandes, daß wir es mit der ebenen Oberfläche der leitenden Erde zu tun haben. Für eine gekrümmte Oberfläche wäre eine entsprechende Vereinfachung nicht möglich.

Es bezeichne wie oben δ die Flächendichte der Ladungen im Punkte ξ, η der Erdoberfläche für den Gleichstromfall, also $\delta\, \omega \cos \omega t$ die der elementaren Strömungsquellen; dann haben die entsprechenden Strompotentiale mit Rücksicht auf die begrenzende Erdoberfläche (S_0) die Form:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\delta\, \omega \cos \omega t\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2 + Z^2}},$$

gleich dem Strompotential der Quellen doppelter Intensität in unbegrenztem, leitendem Medium. Andererseits war die Ladungsdichte δ bestimmt aus der eingangs behandelten elektrostatischen Aufgabe. Sie kann aufgefaßt werden als diejenige Ladungsverteilung, deren elektrostatisches Potential zusammen mit dem primären elektrostatischen Potential des Leiters S das Potential in der Erde konstant, und zwar 0, macht. Also:

$$0 = \int_{S_0} \frac{\delta\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2 + z^2}} + q \int_{-l}^{+l} \frac{dx}{\sqrt{(X-x)^2 + Y^2 + (Z-h)^2}}.$$

So läßt sich gerade das uns interessierende Doppelintegral auf das einfache Integral zurückführen, das bereits oben [L, Gl. (2)] berechnet war. Mit $q = C E_0$ [nach L, Gl. (16)] ergibt sich:

$$\psi = \frac{2\, l\, C\, \omega\, E_0 \cos \omega t}{2\pi \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}} + \frac{\omega \cos \omega t}{2\pi} \int_{S_0} \frac{\delta\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2 + Z^2}}$$

$$= \left[\frac{2\, l}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} - \ln \frac{(l-X) + \sqrt{(X-l)^2 + Y^2 + (Z-h)^2}}{-(l+X) + \sqrt{(X+l)^2 + Y^2 + (Z-h)^2}} \right] \frac{C\, \omega\, E_0 \cos \omega t}{2\pi} \qquad (1).$$

[1]) Nach Verabredung mit Prof. Lichtenstein habe ich diese Fortführung seiner in dieser Zeitschr. 1, 1921, S. 42 bis 47 veröffentlichten Arbeit übernommen. Der erste Teil wird mit »L« zitiert.

Man kann diese einfache Reduktion auch so deuten: Die Erdströmung setzt sich zusammen aus der von der punktförmigen (bezw. halbkugelförmigen) Quelle radial ausströmenden und einer weiteren entgegengesetzter Phase, die sich gerade so verhält, als ob sie von gleichmäßig längs des Leiters verteilten Quellen in homogen leitendem Medium ausströmte. Diese Strömung ist aber längs der begrenzenden Erdoberfläche abgeschnitten bezw. setzt sich in der Luft nur als Verschiebungsströmung fort. Schreiben wir abkürzend für den ganzen Kapazitätsstrom: $2\,l\,C\,\omega\,E_0 \cos \omega\, t = J$, so wird:

$$\Psi = \frac{J}{2\pi R} - \frac{J}{4\pi l} \ln \frac{(l-X)+\sqrt{(X-l)^2+Y^2+(Z-h)^2}}{-(l+X)+\sqrt{(X-l)^2+Y^2+(Z-h)^2}} = \Psi_1 - \Psi_2 \quad . \quad . \quad (2).$$

Das Potential Ψ_2 geht für alle Punkte, deren Abstand $R' = \sqrt{X^2+Y^2+(Z-h)^2}$ vom Leitungsmittelpunkt groß ist gegenüber der Leitungslänge $2l$, zu Null wie $\frac{J}{2\pi R'}$. Das ganze Potential Ψ verhält sich also in großer Entfernung wie

$$\frac{J}{2\pi}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right),$$

es verschwindet wie das Potential einer Doppelquelle in der Ordnung $\frac{1}{R^2}$. Der am Ende des ersten Aufsatzes geforderte Eindeutigkeitsbeweis ist auf Grund dieser Tatsache in bekannter Weise zu führen. Abb. 2 zeigt den nach (2) unter speziellen Zahlenwerten berechneten Erdstromverlauf in der Vertikalebene durch den Leiter S.

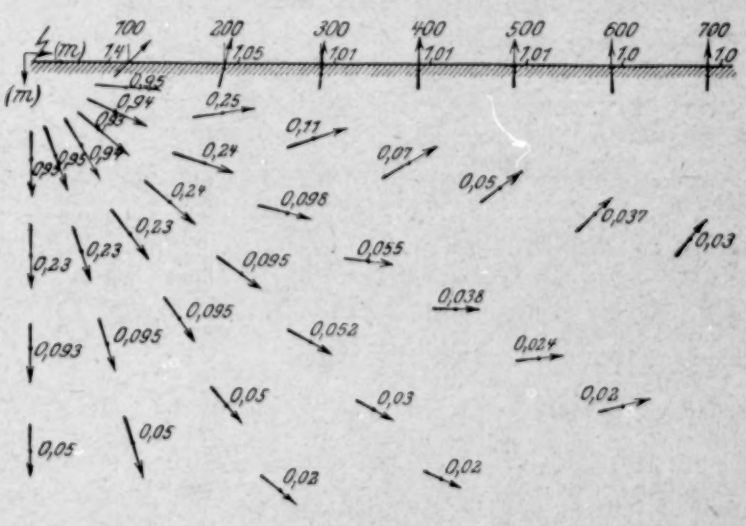


Abb. 2

2. Widerstand der Erdströmung. Nach dieser Vorbereitung macht es keine wesentliche Schwierigkeit mehr, den Ohmschen Widerstand der Strömung aufzustellen und mit praktisch ausreichender Genauigkeit zu berechnen. Wenn es sich um einen linearen stromdurchflossenen Leiter handelt, so ist der Widerstand nach dem Ohmschen Gesetze definiert: $WJ = E$, wobei E der Spannungsabfall im Leiter. Diese Definition behält auch bei körperlicher Strömung solange ihre Gültigkeit, als 2 Punkte existieren, an denen jeweils der ganze Strom konzentriert ist, oder allgemeiner 2 vollständige Niveauflächen als Begrenzung des Strömungsgebiets bekannt sind, zwischen denen der Spannungsabfall gemessen werden kann. Für unseren Fall sind aber solche Voraussetzungen nicht erfüllt, und damit versagt die Definition nach dem Ohmschen Gesetz. An ihre Stelle muß eine Definition auf Grund der verbrauchten Leistung A treten, nämlich:

$$A = W J^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Dabei ist der ganze Strom J wie oben bekannt, der Leistungsverbrauch ist durch das über das ganze Strömungsgebiet erstreckte Integral zu definieren (i = Stromdichte, f = elektrische Feldstärke, λ = Leitfähigkeit des Erdbodens $\approx 10^{-4}$ ohm^{-1} cm^{-1} $= 10^{-13}\,c\,g\,s$):

$$A = \int_v \bar{i}\,\bar{f}\,d\,v = \frac{1}{\lambda}\int_v (\mathrm{grad}\ \Psi)^2\,d\,v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Den Strömungsbereich denken wir uns durch die kleine erdende Halbkugel (s_0) vom Radius r_0 um den Punkt $R = 0$, im übrigen durch die Erdoberfläche (S_0) und eine Halbkugel vom Radius ∞ begrenzt. Dann wird nach bekannter Umformung mit Rück-

sicht auf das oben angegebene Verhalten von $\mathfrak{P}$ im Unendlichen A durch das Oberflächenintegral dargestellt:

$$A = \frac{1}{\lambda} \int_{s_0 + S_0} \mathfrak{P} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \, d\, s \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4').$$

Gemäß (2) zerlegen wir:

$$A = \frac{1}{\lambda} \int_{s_0} (\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2) \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} \, d\, s_0 - \frac{1}{\lambda} \int_{S_1} (\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2) \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} \, d\, S_0 = A_1 - A_2 \quad . \quad . \quad (5).$$

Bei dieser Zerlegung ist berücksichtigt, daß längs S_0 gilt: $\frac{\partial \Psi_1}{\partial n} = 0$ und daß für den Teil A_2 das Gebiet s_0 ganz unwesentlich ist. Es wird, wenn r_0 hinreichend klein neben h gewählt ist (praktisch kommt etwa $r_0 = \frac{h}{100}$ in Betracht, so daß $\mathfrak{P}_2$ längs s_0 als konstant angesehen werden kann):

$$A_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{J^2}{2\,\pi\, r_0} - \frac{J^2}{4\,\pi\, l} \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + h^2}}{-l + \sqrt{l^2 + h^2}} \approx \frac{1}{\lambda} \frac{J^2}{2\,\pi\, r_0} \left(1 - \frac{r_0}{l} \ln \frac{2\,l}{h}\right) \quad . \quad . \quad (6).$$

Bei der letzten Näherung ist $h << l$ berücksichtigt. Der Ausdruck A_1 weicht, da natürlich erst recht $r_0 << l$, sehr wenig von der Leistung ab, die der radialen Ausströmung aus der Halbkugel r_0 entspricht.

Nicht so einfach ist das Integral A_2 in (5) auszuwerten. Es wird sich aber zeigen, daß dieses ganze Integral nur klein wird neben A_1. Zur ersten Vereinfachung der Berechnung können wir uns bei der Integration beschränken auf einen Streifen der Erdoberfläche zu beiden Seiten des Leiters S, dessen Breite klein ist im Vergleich zur Länge $2l$ des Leiters, dagegen groß gegen h (d. h. $h << \varrho = \sqrt{Y^2 + (Z-h)^2} << 2\,l$). In einem solchen Streifen wird nämlich, bis auf Glieder höherer Ordnung in $\frac{\varrho}{l}$:

$$\mathfrak{P}_2 = \frac{J}{4\,\pi\, l} \ln \frac{l - X + (l-X)\left[1 + {}^1\!/_2 \frac{\varrho^2}{(l-X)^2}\right]}{{}^1\!/_2 \frac{\varrho^2}{l+X}} \approx \frac{J}{2\,\pi\, l} \ln \frac{2\sqrt{l^2 - X^2}}{\varrho} \quad . \quad . \quad (7).$$

Es wird daher in dieser Näherung

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial n} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} = \frac{J}{2\,\pi\, l} \frac{h}{\varrho^2},$$

während für Abstände $\varrho > l$ nach der strengen Formel die Abnahme mit ϱ^{-3} erfolgt. In dem Integral (5) ergeben dann die Gebiete des Streifens, in denen $\varrho >> h$, höchstens noch Beiträge von der Größenordnung $\frac{J}{2\,\pi\, l} \frac{h}{\varrho} \ln \varrho$, die klein sind im Verhältnis zu dem ganzen Wert A_2. Mit anderen Worten: Wir können unter der Voraussetzung $h << l$ den Näherungsausdruck (7) für $\mathfrak{P}_2$ bis zu beliebig großen ϱ hin anwenden.

Etwas Vorsicht erfordert dann nur noch das Verhalten der Integranden in der Nähe der Leiterenden A, B. Durch eine Betrachtung, die der oben (L, S 46) durchgeführten analog ist, erkennt man aber, daß auch diese Gebiete, sowie noch mehr die außerhalb der Leiterenden A, B liegenden (d. h. $X > l$, $X < -l$) nur relativ sehr kleine Beiträge zum ganzen Integral A_2 liefern. Wir begrenzen daher die ganze Ebene $z = 0$ durch die beiden Geraden $X = \pm l$ und verwenden in dem so abgegrenzten Gebiet $-l < X < +l$ den Näherungsausdruck (7) für $\mathfrak{P}_2$. Also

$$A_2 = \frac{1}{\lambda} \int_{-l}^{+l} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{J}{2\,\pi\, R} - \frac{J}{2\,\pi\, l} \ln \frac{2\sqrt{l^2 - X^2}}{\varrho}\right) \frac{J}{2\,\pi\, l} \frac{h}{\varrho^2} \, d\, Y \, d\, X$$

$$= \frac{J^2 h}{4\,\pi^2\, \lambda\, l} \int_{-l}^{+l} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{l} \ln \frac{2\sqrt{l^2 - H^2}}{h}\right) \frac{d\, Y \, d\, X}{\varrho^2} \quad (7').$$

Wir setzen hier:

$$\ln \frac{2\sqrt{l^2 - X^2}}{\varrho} = \ln \frac{2\sqrt{l^2 - X^2}}{h} + \ln \frac{h}{\varrho},$$

so daß zu berechnen ist:

$$A_2' = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{2\sqrt{l^2 - X^2}}{h} \frac{d\,Y\,d\,X}{Y^2 + h^2} = \frac{\pi}{2\,h\,l}\int_{-l}^{+l} \ln \frac{4\,(l^2 - X^2)}{h^2}\, d\,X \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Die Durchführung der Integration auf elementarem Weg ergibt:

$$A_2' = \frac{2\,\pi}{h}\left(\ln \frac{4\,l}{h} - 1\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Ferner:

$$A_2'' = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{h}{\varrho} \frac{d\,Y\,d\,X}{\varrho^2} = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{h}{\sqrt{Y^2 + h^2}} \frac{d\,Y}{Y^2 + h^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\ln \frac{h}{Y + h\,i} + \ln \frac{h}{Y - h\,i}\right) \frac{d\,Y}{Y^2 + h^2} \quad (2).$$

Da hier der Integrand im Unendlichen wie $\frac{\ln y}{y^2}$ verschwindet, können wir den Integrationsweg in der komplexen Y-Ebene zu Schleifen um die Pole zusammenziehen, und zwar für den ersten Teil um den Pol $Y = +\,h\,i$, für den zweiten Teil um den Pol $Y = -\,h\,i$. Also:

$$A_2'' = 2\,\pi\,i \frac{\ln {}^1/_2\,i}{2\,h\,i} - 2\,\pi\,i \frac{\ln -{}^1/_2\,i}{-\,2\,h\,i} = \frac{2\,\pi}{h} \ln {}^1/_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Schließlich:

$$A_2''' = \int_{-l}^{+l}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,Y\,d\,X}{R\,\varrho^2} = \int_{-l}^{+l}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,Y\,d\,X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + h^2}} = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathfrak{Ar\,Sin}\,\frac{l}{|Y|}}{Y^2 + h^2}\, d\,Y \quad . \quad . \quad (3).$$

Wir machen nun Gebrauch davon, daß wegen des Nenners $Y^2 + h^2$ in diesem Integral nur solche Integrationsgebiete wesentlich sind, in denen $|Y|$ von der Größenordnung h, also sehr klein gegen l ist, können daher mit verschwindend kleinem Fehler setzen:

$$\mathfrak{Ar\,Sin}\,\frac{l}{|Y|} = \ln \frac{2\,l}{|Y|}.$$

Den Integrationsweg betrachten wir als längs der positiven und negativen reellen Achse verlaufend und schließen ihn durch einen kleinen Halbkreis in der oberen Halbebene um $y = 0$. Das ist gestattet, da das Integral über dem Halbkreis beliebig klein gemacht werden kann (Abb. 3). So ist

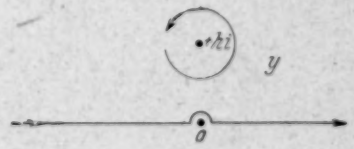


Abb. 3

längs der positiv reellen Achse: $\ln \frac{2\,l}{|Y|} = \ln \frac{2\,l}{Y}$,

» » negativ » » : $\ln \frac{2\,l}{|Y|} = \ln \frac{2\,l}{Y} + \pi\,i$.

Der Integrationsweg kann nun für den logarithmischen Teil des Integranden zu einer Schleife um den Punkt $Y = +\,h\,i$ zusammengezogen werden und ergibt so:

$$A_2''' = 2\int_{h\,i} \frac{\ln \frac{2\,l}{Y}}{Y^2 + h^2} d\,Y + 2\,\pi\,i \int_{-\infty}^{0} \frac{d\,Y}{Y^2 + h^2} = 2\,\pi\,i \frac{2 \ln \frac{2\,l}{h\,i}}{2\,h\,i} + 4 \ln i \frac{\pi}{2\,h} = \frac{2\,\pi}{h} \ln \frac{2\,l}{h} \quad (10).$$

Im ganzen bekommen wir nach (7) bis (10):

$$A_2 = \frac{J^2\,h}{4\,\pi^2\,\lambda\,l}\left[\frac{2\,\pi}{h} \ln \frac{2\,l}{h} - \frac{2\,\pi}{h}\left(\ln\left(\frac{4\,l}{h}\right) - 1\right) - \frac{2\,\pi}{h} \ln {}^1/_2\right] = \frac{J^2}{2\,\pi\,\lambda\,l} \quad . \quad (11).$$

(6) und (11) ergibt nun nach (5) die ganze Leistung:

$$A = A_1 - A_2 = \frac{J^2}{2\,\pi\,\lambda}\left[\frac{1}{r_0} - \frac{1}{l}\left(\ln \frac{2\,l}{h} + 1\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Der Widerstand der Strömung ist somit nach der obigen Definition (3):

$$W = \frac{A}{J^2} = \frac{1}{2\pi\lambda r_0} - \frac{1}{2\pi\lambda l}\left(\ln\frac{2l}{h} + 1\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Dies ist das gesuchte Resultat, dessen wesentlicher Inhalt nicht ohne weiteres vorauszusehen war. In der Formel (13) bezeichnet nämlich das erste Glied den Widerstand, den die Strömung bei radialer Ausbreitung aus der erdenden Elektrode (Halbkugel vom Radius r_0) findet oder, mit einer kurzen, in der Elektrotechnik üblichen Ausdrucksweise, den Erdungswiderstand dieser Elektrode. Bei anderen Erderformen würde an Stelle von r_0 eine andere, von den mittleren Dimensionen der Erdung abhängige Länge treten. Die Halbleiterlänge l ist aber unter allen Umständen äußerst groß gegen dieses r_0, und das gleiche gilt auch noch für $\frac{l}{\ln\frac{2l}{h}}$; es folgt daher, daß im Widerstand immer das erste, von der Umgebung des Einzelerders herrührende Glied das weit überwiegende ist. Die Anordnung der ganzen geerdeten Leitung hat auf den Widerstand nur äußerst geringen Einfluß, im Zusammenhang mit der geringen Erdstromdichte, wie sie z. B. auch Abb. 2 überall, außer in der unmittelbarsten Umgebung der Elektrode, zeigt. Für die praktische Anwendung erwächst daraus die Berechtigung, von einem bestimmten Widerstand des Einzelerders zu sprechen.

Prinzipiell aber ist daran festzuhalten, daß es sich um den Erdwiderstand handelt, der von der Anordnung des ganzen Netzes abhängt, da Fälle denkbar sind, in denen dieser Einfluß stärker wird. Das wäre z. B. der Fall, wenn nicht der ganze Erdboden, sondern nur eine dünne, durchfeuchtete Schicht über sehr trockenem Boden leitend ist. Aehnliche Voraussetzungen liegen der für hohe Frequenzen durchgeführten Untersuchung von A. Abraham (ds. Zeitschr. 2, 1922, S. 109 bis 131) zugrunde[1]). [164]

Zur Theorie der kleinen Schwingungen.[2])

Von **R. COURANT** in Göttingen.

Das Ziel der folgenden Ausführungen ist, die Aufmerksamkeit auf eine bisher kaum beachtete Minimum- bezw. Maximum-Minimum-Eigenschaft der Schwingungszahlen eines beliebigen mechanischen Systems zu lenken, das um eine stabile Gleichgewichtslage kleine Schwingungen ausführt. Diese Extremumeigenschaft beruht auf einer in **1** angegebenen Umsetzung bekannter Tatsachen aus der Theorie der quadratischen Formen in eine weniger bekannte[3]) Gestalt und ist deshalb von Wichtigkeit, weil sie gestattet, fast unmittelbar eine Reihe grundlegender (für die Anschauung übrigens durchaus plausibler) Sätze[4]) über das Verhalten der Schwingungszahlen bei Modifikationen des vorgelegten mechanischen Systems abzulesen. Als solche Modifikationen werden wir Auferlegung von Zwangsbedingungen und Veränderung der Massen oder der inneren Spannungen des Systems in Betracht ziehen. Insbesondere vergleichen wir in **2** zwei Systeme S und S' von endlich vielen Freiheitsgraden. Erlegen wir unter Festhaltung der kinetischen und der potentiellen Energie dem System S von n Freiheitsgraden r Zwangsbedingungen auf $(r < n)$, sodaß das neue System S' r Freiheitsgrade weniger als das alte hat, so ergibt sich, daß

---

[1]) Ueber verwandte Fragen s. auch den Vortrag von L. Lichtenstein: Erdstromfragen in Theorie und Praxis. Elektrotechnische Zeitschrift 1921, S. 447.

[2]) Man vergleiche zu der vorliegenden Arbeit eine ausführlichere Abhandlung des Verfassers »Ueber die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik«, Math. Ztschr. Bd. 7, S. 1 bis 57, wo die hier entwickelten Gedankengänge zum Teil bei wesentlich allgemeineren Problemstellungen Verwendung finden.

[3]) Vergl. E. Fischer, Monatshefte für Math. und Phys. Bd. 16, S. 245, sowie a. a. O. [1]), S. 19.

[4]) Man vergleiche zu diesen Sätzen Rayleigh, Theorie of sound, Band 1, Kap. IV, V.

der Grundton von S' nicht tiefer ist als der Grundton von S und nicht höher als der $(r+1)$te Oberton von S. Geht andererseits S' aus S dadurch hervor, daß bei ungeänderter potentieller Energie durch Vergrößerung einzelner Massen von S die Trägheit des Systems vergrößert wird, so zeigt sich, daß hierbei der Grundton und jeder Oberton fällt oder wenigstens nicht steigt. Bleibt schließlich umgekehrt die kinetische Energie von S ungeändert, während ein Teil der inneren Spannungen vergrößert wird, dann steigt der Grundton und jeder Oberton oder fällt wenigstens nicht. In **3** übertragen wir solche und ähnliche Betrachtungen auf Systeme von unendlich vielen Freiheitsgraden, für die entsprechende Sätze gelten; werden z. B. einer schwingenden Saite irgendwelche Zwangsbedingungen auferlegt, so können der Grundton und jeder Oberton nicht fallen usw. Diese Ueberlegungen weisen schließlich einen Weg, die Schwingungszahl hoher Obertöne asymptotisch zu berechnen.

Vorab sei der Leser noch in Kürze an die hier in Frage kommenden Tatsachen aus der Theorie der quadratischen Formen und an deren Zusammenhang mit der Lehre von den kleinen Schwingungen erinnert.

Die Bewegung eines mechanischen Systems von n Freiheitsgraden, das um eine stabile Gleichgewichtslage Schwingungen ausführt, wird beschrieben durch die Lagrangeschen Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial \xi_1}=-\frac{\partial U}{\partial \xi_1},\ \ldots,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_n}\right)-\frac{\partial T}{\partial \xi_n}=-\frac{\partial U}{\partial \xi_n},\quad \dot{\xi}_h=\frac{d\xi_h}{dt}\ (h=1,\ldots,n).$$

Dabei charakterisieren die verallgemeinerten oder Lagekoordinaten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ die Abweichung des Systems von der Gleichgewichtslage $\xi_1=0, \ldots, \xi_n=0$ (z. B. sind im Falle des n-fachen Pendels für $\xi_1, \ldots, \xi_n$ die n Ausschlagwinkel $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ zu nehmen), während die Funktion U die potentielle, die Funktion T die kinetische Energie des Systems darstellt. Sind die Schwingungen klein, so ist U als quadratische Form der Koordinaten ξ_h mit konstanten Koeffizienten a_{hk}, T als quadratische Form der Ableitungen $\dot{\xi}_h$ der Koordinaten nach der Zeit mit ebenfalls konstanten Koeffizienten b_{hk} anzusehen [1]):

$$U=\sum_{h,k} a_{hk}\,\xi_h\,\xi_k;\qquad T=\sum_{h,k} b_{hk}\,\dot{\xi}_h\,\dot{\xi}_k.$$

Diese Formen sind ihrer Natur nach positiv definit, die eine, weil die kinetische Energie wesentlich positiv ist, die andere wegen der vorausgesetzten Stabilität des Gleichgewichtes in $\xi_1=0, \ldots, \xi_n=0$.

Für derartige kleine Schwingungen lauten also die Lagrangeschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} &b_{11}\ddot{\xi}_1+\ldots+b_{1n}\ddot{\xi}_n+a_{11}\xi_1+\ldots a_{1n}\xi_n=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &b_{n1}\ddot{\xi}_1+\ldots+b_{nn}\ddot{\xi}_n+a_{n1}\xi_1+\ldots a_{nn}\xi_n=0. \end{aligned}$$

Durch eine Transformation der Variablen ξ_h läßt sich für sie eine einfache »Normalform« finden.

Nach einem bekannten Satze der Algebra lassen sich für zwei positiv definite quadratische Formen von n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$

$$F=\sum_{h,k} a_{hk}\,x_h x_k \quad \ldots \quad (1),\qquad G=\sum_{h,k} b_{hk}\,x_h x_k \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

stets durch eine lineare Transformation der Gestalt

$$x_h=\sum_k t_{hk}\,y_k \quad (h=1,\ldots,n) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

mit reellen Koeffizienten t_{hk} neue Veränderliche $y_1, \ldots, y_n$ so einführen, daß F und G in je eine Summe von Quadraten übergehen:

$$F=\sum_h \lambda_h y_h^2 \quad \ldots \quad (4),\qquad G=\sum_h y_h^2 \quad (h=1,\ldots,n) \ldots \quad (5).$$

Dabei sind die reellen und positiven Größen λ_h die Wurzeln der Determinantengleichung:

$$|a_{hk}-\lambda b_{hk}|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda b_{11} & \ldots & a_{1n}-\lambda b_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1}-\lambda b_{n1} & \ldots & a_{nn}-\lambda b_{nn}\end{vmatrix}=0.$$

[1]) Alle Summationsbuchstaben in dieser Arbeit laufen, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt ist, von 1 bis n.

Führen wir also anstelle der ursprünglichen Koordinaten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ durch die Gleichungen $\xi_h = \sum_k t_{hk} \eta_k$ $(h = 1, \ldots, n)$ die »Normalkoordinaten« $\eta_1, \ldots, \eta_n$ ein, so wird

$$U = \sum_h \lambda_h \eta_h^2, \qquad T = \sum_h \dot{\eta}_h^2,$$

und die Lagrangeschen Gleichungen nehmen die einfache Gestalt

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} + \lambda_1 \eta_1 = 0, \ldots, \qquad \frac{d^2\eta_n}{dt^2} + \lambda_n \eta_n = 0$$

an. Ihre Lösung ist $\eta_h = y_h e^{i\nu_h t} = y_h e^{i\sqrt{\lambda_h}\, t}$ bei beliebiger Wahl der reellen oder imaginären zeitlichen Konstanten $y_1, \ldots, y_n$. Man sieht, daß die Wurzeln λ_h der Determinantengleichung mit den Quadraten der Eigenschwingungszahlen ν_h übereinstimmen. Untersuchungen über die λ_h liefern demnach Aussagen über die ν_h.

Wir wollen diese λ_h die »Eigenwerte von F in bezug auf G« nennen und nach wachsender Größe geordnet denken. Aus der Darstellung (4), (5) liest man dann unmittelbar ab, daß λ_1 der kleinste Wert ist, den die Form F unter der Nebenbedingung

$$G = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

annehmen kann, daß weiter λ_p das Minimum von F darstellt, wenn für die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ außer (6) noch die Nebenbedingungen $y_1 = 0, \ldots, y_{p-1} = 0$ oder die äquivalenten aus diesen durch die Gleichungen (3) hervorgehenden Bedingungen gestellt werden.

1. Maximum-Minimum-Eigenschaft der Eigenwerte. Wir betrachten das Problem: F zum Minimum zu machen, wenn außer der Bedingung (6) noch $p-1$ weitere Bedingungen

$$\sum_h \alpha_{hj} x_h = 0 \qquad (j = 1, \ldots, p-1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

für die Größen $x_1, \ldots, x_n$ erfüllt sein müssen, wobei die α_{hj} gegebene Konstanten bedeuten. Ein solches Minimum muß es nach den elementaren Sätzen über stetige Funktionen stets geben. Wir wollen den Minimalwert von F mit $f(\alpha)$ bezeichnen, um seine Abhängigkeit von den Konstanten α_{hj} zum Ausdruck zu bringen. Führen wir nun an Stelle der x_h durch (3) die Veränderlichen y_h ein, so geht (6) in

$$\sum_h y_h^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

über, während die Gleichungen (7) wieder die analoge Form

$$\sum_h \beta_{hj}\, y_h = 0 \qquad (j = 1, \ldots, p-1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

erhalten, wobei auch die β_{hj} gegebene Konstanten sind. Wir können diesen Bedingungen durch ein Wertsystem der Variabeln y_h genügen, für welches $y_{p+1} = 0, \ldots, y_n = 0$ ist; denn es resultieren dann für die p Größen $y_1, \ldots, y_p$ aus (7) gerade $p-1$ homogene lineare Gleichungen, welche gewiß stets eine nicht triviale Lösung besitzen, und eine solche Lösung läßt sich immer durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor der Bedingung (8) anpassen. Für das so sich ergebende Wertsystem $y_1, \ldots, y_n$ wird $F = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_p y_p^2$, und da $\lambda_{h+1} \geqq \lambda_h$ gilt, so folgt mit Rücksicht auf (8) $F \leqq \lambda_p (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_h^2) = \lambda_p$; das Minimum $f(\alpha)$ ist also erst recht nicht größer als λ_p. Andererseits wird, wenn wir als Nebenbedingungen (9) gerade $y_1 = 0, \ldots, y_{p-1} = 0$ wählen, nach dem in der Einleitung Gesagten das Minimum gerade gleich λ_p; es ergibt sich also folgendes Resultat:

Satz 1. Der $p$te Eigenwert der quadratischen Form F in bezug auf die quadratische Form G ist der größte Wert, welchen das Minimum von F bei der Nebenbedingung (6) sowie irgendwelchen $p-1$ linearen homogenen Nebenbedingungen der Gestalt (7) annehmen kann, wenn die Gestalt dieser Nebenbedingungen variiert wird.

2. Anwendungen auf schwingende Systeme von n Freiheitsgraden. Die mechanische Bedeutung einer Gleichung von der Form (7) ist, daß dem vorgelegten System, welches wir von nun an mit dem Buchstaben S bezeichnen wollen, ein Freiheitsgrad geraubt wird. Wir könnten dies zum Ausdruck bringen, indem wir eine der Variabeln x_h durch die anderen berechnen und diesen Wert in die rechten Seiten von (1) und (2) einführen, so daß F und G dann als quadratische Formen von $n-1$ Variabeln erscheinen; doch wollen wir der Uebersicht halber diese Elimination nicht ausgeführt denken. Bezeichnen wir von den nach wachsender Größe geordneten

Eigenschwingungszahlen $\nu, \ldots, \nu_n$ die erste als den Grundton, die weiteren als den ersten, zweiten usw. Oberton des Systems, so liefert uns Satz 1 sofort folgende Tatsache:

Satz 2. Der $p$te Oberton eines schwingenden Systems ist der höchste unter den Grundtönen aller Systeme, welche aus dem gegebenen durch Auferlegung von irgendwie gewählten p Bindungen entstehen.

Wir wollen uns nun neben dem ursprünglichen System S ein zweites S' vorstellen, welches aus S durch Hinzufügung von r Zwangsbedingungen

$$\sum_k \gamma_{kl} x_k = 0 \quad (l = 1, \ldots, r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

entsteht, wobei die γ_{kl} fest gegebene Konstanten bedeuten. Die Schwingungszahlen von S' seien nach wachsender Größe geordnet $\nu_1', \ldots, \nu'_{n-r}$, die Eigenwerte des entsprechenden Eigenwertproblems (für dessen Ausführung man sich vermöge (10) r Variable aus F und G eliminiert denken müßte) seien $\lambda_1', \ldots, \lambda'_{n-r}$. Der Wert λ_p' entsteht offenbar durch genau das entsprechende Maximum-Minimum-Problem wie der Wert λ_p; nur sind im ersten Falle den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ jeweils außer den $p-1$ Bedingungen (7) noch die weiteren r Bedingungen (10) auferlegt. Es wird also wegen der Verengerung der Gesamtheit der zur Konkurrenz zugelassenen Wertsysteme $x_1, \ldots, x_n$ das einzelne Minimum $f'(\alpha)$ für S' nicht kleiner sein, als das entsprechende $f(\alpha)$ für S, und daher muß dasselbe auch für die Maxima dieser Minima gelten, d. h. es ist $\lambda_p' \geqq \lambda_p$ und somit $\nu_p' \geqq \nu_p$. Ferner ist der Wert λ_{p+r} gleich dem Maximum von $f(\alpha)$, wenn zu den Gleichungen (7) noch r weitere analoge Gleichungen $\sum_h \alpha_{hj} x_h = 0$ $(j = p, \ldots, p+r-1)$ hinzutreten; dieses Maximum ist also sicher größer oder wenigstens nicht kleiner als das Maximum, das man bekommt, wenn man für die Größen α_{hj} $(j > p-1)$ die Werte γ_{kl} $(l = 1, \ldots, r)$ festhält; dieses letztere Maximum ist aber nach der Definition des Systems S' nichts anderes als der Wert λ_p'. Wir erhalten also das Resultat:

Satz 3. Geht ein System S durch Auferlegung von r Zwangsbedingungen der Form (10) in ein »$r$fach gebundenes« System S' über, so sind die Schwingungszahlen $\nu_1', \ldots, \nu'_{n-r}$ des gebundenen Systems nicht kleiner als die entsprechenden Schwingungszahlen $\nu_1, \ldots, \nu_{n-r}$ des freien Systems, aber auch nicht größer als die Schwingungszahlen $\nu_{r+1}, \ldots, \nu_n$ des freien Systems, d. h. es gelten die Beziehungen

$$\lambda_p \leqq \lambda_p' \leqq \lambda_{p+r}, \qquad \nu_p \leqq \nu_p' \leqq \nu_{p+r} \quad (p = 1, \ldots, n-r).$$

Wir betrachten nun ein System S', welches aus S dadurch hervorgeht, daß einzelne der Massen in S vergrößert werden, keine aber verringert wird, oder, wie wir kurz sagen wollen, ein System, welches aus S durch Vermehrung der Trägheit entsteht. Dieser Uebergang drückt sich dadurch aus, daß für jede Konfiguration der Koordinaten und Geschwindigkeiten die kinetische Energie von S' nicht kleiner ist als die von S, während die potentiellen Energien gleich bleiben; mathematisch gesprochen tritt an die Stelle der quadratischen Form G eine andere Form $G' = G + G''$, wobei G'' wieder eine negativer Werte nicht fähige quadratische Form ist. Wenn daher für ein Wertsystem $x_1, \ldots, x_n$ die Beziehung (6) gilt, so wird $G' \geqq 1$; man muß daher die Variablen mit einem gemeinsamen Faktor, der absolut genommen mindestens gleich 1 ist, dividieren, wenn man

$$G' = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6\,a)$$

machen will. Hierdurch verkleinert sich der Wert von F entsprechend, und man schließt nun unmittelbar dasselbe für die Minima von F unter den Nebenbedingungen (6), (7) bezw. den Nebenbedingungen (6 a), (7), also auch für die zugehörigen Maximinima: es wird somit $\lambda'_p \leqq \lambda_p$, und wir haben folgendes Resultat:

Satz 4. Bei Vergrößerung der Trägheit fällt der Grundton und jeder Oberton oder nimmt wenigstens nicht zu.

In entgegengesetzter Richtung wie die Vermehrung der Trägheit wirkt eine »Versteifung« des Systems; darunter wollen wir den Uebergang zu einem System S' verstehen, für welches bei ungeänderter kinetischer Energie die potentielle Energie einer gegebenen Konfiguration größer oder wenigstens nicht kleiner ist als die des Systems S; hier tritt also an die Stelle der quadratischen Form F eine andere Form $F' = F + F''$,

wobei F'' wieder eine negativer Werte nicht fähige quadratische Form bedeutet. Ganz genau wie der vorige Satz ergibt sich

Satz 5. Bei einer Versteifung des Systems steigt der Grundton und jeder Oberton oder nimmt wenigstens nicht ab.

Es bedarf kaum einer besonderen Erwähnung, daß sich das umgekehrte Verhalten zu den in Satz 3 bis 5 gekennzeichneten Tatsachen ergibt, wenn wir Zwangsbedingungen aufheben, Massen vermindern oder das System lockern, d. h. zu einem System S' übergehen, demgegenüber S als versteift erscheint.

Es liegt ferner nahe, eine Bindung, wie sie durch eine Relation (10) gegeben ist, als Grenzfall einer Versteifung anzusehen, was man mathematisch zum Ausdruck bringen kann, indem man zu F einen Term der Form $t(\gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_n x_n)^2$ addiert und dann den Parameter t über alle Grenzen wachsen läßt; dabei werden, wie man aus den obigen Ausführungen leicht einsieht, der Grundton und die Obertöne monoton von den Werten für das ungebundene zu den entsprechenden Werten für das gebundene System ansteigen, während der höchste Oberton über alle Grenzen wächst.

3. Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden. Die unhomogene schwingende Saite. Bei Systemen mit unendlich vielen Freiheitsgraden lassen sich dieselben Fragen behandeln, wenn man die Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Variablen heranzieht; anstatt diesen Weg einzuschlagen, empfiehlt es sich jedoch, von Integralausdrücken der kinetischen und potentiellen Energie auszugehen; es treten dann an die Stelle der oben behandelten gewöhnlichen Minimumprobleme entsprechende Extremumprobleme der Variationsrechnung. Wir wollen hier das Beispiel einer eingespannten schwingenden Saite behandeln, deren Elastizitätsmodul und Massendichte Funktionen des Ortes sind. Die Saite möge in der Ruhelage das Stück $0 \leqq x \leqq l$ der x-Achse decken; mit $w(x, t)$ bezeichnen wir die transversale Elongation der Punkte der Saite als Funktion von x und der Zeit t, mit $\dot{w}$ die Ableitung von w nach der Zeit, mit w' die nach x. Dann erhalten wir für die potentielle Energie einen Ausdruck der Form

$$U = \int_0^l e\, w'^2\, dx,$$

für die kinetische Energie einen Ausdruck

$$T = \int_0^l q\, \dot{w}^2\, dx,$$

wobei e, q durchweg positive Funktionen von x sind (und zwar ist dabei q die halbe Massendichte, e die halbe Spannung der Saite an der Stelle x). Die Bewegungsgleichung der Saite lautet $\frac{\partial}{\partial x}\left(e \frac{\partial w}{\partial x}\right) = q \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$; an den Endpunkten muß für jeden Wert von t die Randbedingung $w = 0$ erfüllt sein. Wir gelangen zu den Eigenschwingungen, wenn wir für w den Ansatz $w = u\, e^{i\nu t}$ machen, wobei u eine nur von x abhängige, für $x = 0$ und $x = l$ verschwindende Funktion ist. Für diese ergibt sich dann sofort die Differentialgleichung

$$(eu')' + \lambda q\, u = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12),$$

falls wir $\nu^2 = \lambda$ setzen; es handelt sich also bei der Untersuchung der Bewegung der schwingenden Saite um die Ermittlung derjenigen »Eigenwerte« $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ für den Parameter λ, für welche es Lösungen $u_1, u_2, \ldots$ von (12) gibt, die, ohne identisch zu verschwinden, am Rande Null sind. Die Eigenwerte λ_h sind die Quadrate der Eigenschwingungszahlen ν_h. Man erhält nach den elementaren Grundregeln der Variationsrechnung in bekannter Weise die nach wachsender Größe geordneten Eigenwerte λ_h und die zugehörigen »Eigenfunktionen« u_h $(h = 1, 2, \ldots)$ folgendermaßen: Wenn zum Vergleich alle im Intervalle $0 \leqq x \leqq l$ mit stückweise stetiger erster Ableitung versehenen stetigen Funktionen u zugelassen werden, welche am Rande $x = 0$, $x = l$ verschwinden, so wird λ_1 gleich dem Minimum des Integrals

$$F = \int_0^l e\, u'^2\, dx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

unter der Nebenbedingung

$$G = \int_0^l q u^2 \, dx = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14),$$

und zwar wird dieses Minimum erreicht für $u = u_1$. Der $p$te Eigenwert λ_p ist entsprechend gleich dem kleinsten Wert, welchen das Integral F annehmen kann, wenn außer der Nebenbedingung (14) noch die $p-1$ weiteren Nebenbedingungen

$$\int_0^l q u u_h \, dx = 0 \quad (h = 1, \ldots, p-1) \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

für die zum Vergleiche zugelassenen Funktionen gestellt werden. Dieses Minimum wird angenommen für $u = u_p$.

Für die Eigenfunktionen besteht außer den Relationen

$$\int_0^l q u_h^2 \, dx = 1, \quad \int_0^l q u_h u_k \, dx = 0 \quad (h \neq k) \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

noch die aus (12) sich unmittelbar ergebenden Gleichungen

$$\int_0^l e u_h' u_k' \, dx = 0 \quad (h \neq k), \quad \int_0^l e u_h'^2 \, dx = \lambda_h \quad \ldots \ldots \quad (17).$$

Aus der soeben formulierten wohlbekannten und elementar beweisbaren Minimumeigenschaft der Eigenwerte und Eigenfunktionen erhalten wir ähnlich wie in **1** folgende Maximum-Minimum-Eigenschaft: Es seien $s_1, \ldots, s_{p-1}$ stückweise stetige Funktionen von x für $0 \leqq x \leqq l$, es sei $f\{s\}$ das Minimum des Integrals F, wenn zum Vergleich solche am Rande verschwindende stetige und mit stückweise stetigen Ableitungen versehene Funktionen u zugelassen werden, für welche außer der Bedingung (14) noch die weiteren Bedingungen

$$\int_0^l q s_h u \, dx = 0 \quad (h = 1, \ldots, p-1) \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

erfüllt sind. Dann erhalten wir für $f\{s\}$ einen möglichst großen Wert, und zwar den Wert λ_p, wenn $s_1 = u_1, \ldots, s_{p-1} = u_{p-1}$; $u = u_p$ gesetzt wird.

Zum Beweise beachten wir, daß die Bedingungen (18), (14) sich stets durch eine lineare Kombination $\bar{u} = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_p u_p$ der ersten p Eigenfunktionen erfüllen lassen, da die Gleichungen (18) $p-1$ homogene lineare Relationen für die p Größen $c_1, \ldots, c_p$ darstellen, und man ja stets solchen Gleichungen durch ein nicht identisch verschwindendes Wertsystem genügen kann; durch Multiplikation mit einem geeigneten gemeinsamen Faktor wird dann auch noch die Bedingung (14) befriedigt. Setzen wir diesen Wert $\bar{u}$ an Stelle von u in F und G ein, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (16) und (17) unmittelbar

$$F = \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + \ldots + \lambda_p c_p^2,$$
$$G = 1 = c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_p^2,$$

wegen $\lambda_h \leqq \lambda_{h+1}$ wird also $F \leqq \lambda_p (c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_p^2) = \lambda_p$, daher ist das Minimum $f\{s\}$ erst recht nicht größer als λ_p; da es aber für $s_1 = u_1$, $s_2 = u_2$, $\ldots$, $s_{p-1} = u_{p-1}$ genau gleich λ_p wird, so ist die Behauptung erwiesen.

Nunmehr folgen für das Schwingungsproblem genau wie in **2** folgende Tatsachen: Werden einer Saite irgendwelche Zwangsbedingungen auferlegt, so wird der Grundton und jeder Oberton nicht fallen. Denn durch Verschärfung der Konkurrenzbedingungen des betreffenden Variationsproblems muß für jedes Funktionssystem $s_1, \ldots, s_{p-1}$ das Minimum $f\{s\}$ vergrößert oder wenigstens nicht verkleinert werden; dasselbe gilt also auch für das Maximum dieses Minimums. Dabei ist es ganz gleichgültig, welcher Art die auferlegten Bedingungen sind, ob sie z. B. durch

Bedingungsgleichungen für einzelne Punkte der Saite oder Gleichungen, in welche alle Punkte der Saite eingehen, oder auch Ungleichungen ausgedrückt sind.

Ferner ergibt sich wie in **2**: Bei Vermehrung der Trägheit, d. h. Vergrößerung oder jedenfalls Nichtverminderung der Funktion q an jeder Stelle, nimmt der Grundton und jeder Oberton nicht zu. Bei Versteifung der Saite, d. h. Vergrößerung oder jedenfalls Nichtverkleinerung der Funktion e, nimmt der Grundton und jeder Oberton nicht ab. Das Umgekehrte gilt natürlich, wenn Zwangsbedingungen aufgehoben, die Trägheit vermindert oder das System gelockert wird.

Wir wollen von diesen Sätzen eine Anwendung machen, indem wir den $n$ten Eigenwert λ_n für großes n asymptotisch berechnen.

Denken wir der Saite S Zwangsbedingungen auferlegt, indem wir sie an $r-1$ äquidistant über sie verteilten Punkten festhalten, d. h. dort $u=0$ fordern, so wird sicher der $n$te Eigenwert λ_n' des so entstehenden Systems S' nicht kleiner sein als der $n$te Eigenwert λ_n der ursprünglichen Saite. Nun besteht das System S' einfach aus r unabhängig voneinander schwingenden, an den Endpunkten eingespannten Saiten von der Länge $\frac{l}{r}$. Der $n$te Eigenwert λ_n' dieses Systems ist die $n$tkleinste Zahl unter den zusammengenommenen Eigenwerten der Teilsysteme $S_1, S_2, \ldots, S_r$. Bezeichnen wir also mit $A(\lambda)$ die Anzahl der unterhalb einer Schranke λ gelegenen Eigenwerte der ursprünglichen Saite, mit $A_1(\lambda), A_2(\lambda), \ldots, A_r(\lambda)$ die entsprechenden Anzahlen für die Teilsaiten, so folgt unmittelbar

$$A(\lambda) \geqq A_1(\lambda) + A_2(\lambda) + \ldots + A_r(\lambda) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Zweitens denken wir uns das mechanische System der Saite gelockert, indem wir an den Endpunkten die Bedingung $u=0$ aufheben und der Funktion u überdies in den $r-1$ Teilpunkten beliebige sprunghafte Unstetigkeiten gestatten (die Integrale F sind dann einfach als die Summen der entsprechenden Integrale für die Teilintervalle zu verstehen). Der $n$te Eigenwert λ_n'' des so gelockerten Systems S'' wird nach den obigen Ausführungen der Bedingung $\lambda_n'' \leqq \lambda_n$ genügen. Andererseits besteht das System S'' wieder aus r völlig unabhängig voneinander schwingenden Saiten von der Länge $\frac{l}{r}$, deren Endpunkte frei, d. h. ohne Widerstand auf den zugehörigen Vertikalen beweglich sind. Der erste Eigenwert einer solchen Saite ist Null, da den Bedingungen des Variationsproblems für $p=1$ durch $u=$ konst. genügt werden kann. Bezeichnen wir nun mit $B_1(\lambda), B_2(\lambda), \ldots, B_r(\lambda)$ die Anzahlen der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte unserer Teilsysteme, so folgt wie oben

$$A(\lambda) \leqq B_1(\lambda) + B_2(\lambda) + \ldots + B_r(\lambda) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Nun können wir für die Anzahlen $A_h(\lambda)$, $B_h(\lambda)$ untere bezw. obere Schranken auf folgende Art bestimmen: Es seien e_M^h, q_M^h die Maxima, e_m^h, q_m^h die Minima der Funktionen e, q im $h$ten Teilintervall. Ersetzen wir in unserem System die Funktion e im $h$ten Teilintervalle durch die Konstante e_M^h, die Funktion q durch die Konstante q_m^h, und betrachten wir etwa zunächst das Schwingungsproblem der eingespannten Teilsaite S_h für das $h$te Teilintervall; die Ersetzung der Funktionen e, q durch die angegebenen Konstanten bedeutet Uebergang zu einem System S_h^*, welches zugleich gegenüber S_h in seiner Trägheit gemindert und versteift ist; zwischen der Anzahl $A_h(\lambda)$ der unterhalb λ gelegenen Eigenwerte von S_h und der entsprechenden Anzahl $A_h^*(\lambda)$ von S_h^* besteht also die Beziehung $A_h(\lambda) \geqq A_h^*(\lambda)$. Nun läßt sich $A_h^*(\lambda)$ explizite angeben. Die Eigenwerte von S_h^* sind nämlich nichts anderes als die Eigenwerte der Differentialgleichung $u'' e_M^h + \lambda q_m^h u = 0$ für das Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{l}{r}$ bei der Randbedingung $u=0$. Die Eigenfunktionen und Eigenwerte dieses Problems werden aber durch die Ausdrücke $\sin\left(k \frac{x}{l} r\pi\right)$, $\frac{k^2 r^2}{l^2} \pi^2 \frac{e_M^h}{q_m^h}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ und somit $A_h^*(\lambda)$ durch den Ausdruck $\frac{l}{r\pi} \sqrt{\frac{q_m^h}{e_M^h}} \sqrt{\lambda}$ ge-

geben, wie man sofort erkennt, wenn man $k = A(\lambda)$ einsetzt. Somit ergibt sich aus (19)

$$A(\lambda) \geqq \sqrt{\lambda}\,\frac{l}{\pi}\,\frac{1}{r}\sum_{h=1}^{r}\sqrt{\frac{q_m^h}{e_M^h}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21).$$

Genau so erhält man eine untere Schranke, indem man beachtet, daß die Eigenwerte der Differentialgleichung $u''\,e_m^h + \lambda\,q_M^h\,u = 0$ für das $h$te Teilintervall bei der Randbedingung $u' = 0$, welche freien Rändern, d. h. dem Fehlen von Randbedingungen im Variationsproblem, entspricht, mit den Zahlen $\frac{k^2 r^2}{l^2}\pi^2\frac{e_m^h}{q_M^h}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ identisch sind, indem hier die Eigenfunktionen durch die Ausdrücke $\cos\left(k\frac{x}{l}\,r\pi\right)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ geliefert werden.

Es wird demgemäß die Anzahl $B_h^*(\lambda)$ der unterhalb λ gelegenen Eigenwerte dieses Problems durch $1 + \frac{l}{r\pi}\sqrt{\frac{q_M^h}{e_m^h}}\sqrt{\lambda}$ gegeben. Da die Ersetzung von q durch q_M^h, von e durch e_m^h eine Vermehrung der Trägheit bei gleichzeitiger Lockerung des Systems bedeutet, so folgt sofort $B_h(\lambda) \leqq B_h^*(\lambda)$ und somit wegen (20)

$$A(\lambda) \leqq r + \sqrt{\lambda}\,\frac{l}{\pi}\,\frac{1}{r}\sum_{h=1}^{r}\sqrt{\frac{q_M^h}{e_m^h}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22).$$

Die Gleichungen (21), (22) gelten für jeden beliebigen, festgewählten Wert von r; indem wir r hinreichend groß nehmen, können wir erreichen, daß die Ausdrücke $\frac{1}{r}\sum_{h=1}^{r}\sqrt{\frac{q_m^h}{e_M^h}}$, $\frac{1}{r}\sum_{h=1}^{r}\sqrt{\frac{q_M^h}{e_m^h}}$ sich beide beliebig wenig von dem Integral $\int_0^l\sqrt{\frac{q}{e}}\,dx$ unterscheiden, und so ergibt sich aus den Gleichungen (21), (22) unmittelbar die Beziehung

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} = \frac{l}{\pi}\int_0^l\sqrt{\frac{q}{e}}\,dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23),$$

welche man auch in der Form schreiben kann

$$\sqrt{\lambda_n} \cong \frac{n\pi}{l}\,\frac{1}{\int_0^l\sqrt{\frac{q}{e}}\,dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

oder, indem man die $n$te Eigenschwingungszahl $\nu_n = \sqrt{\lambda_n}$ einführt,

$$\nu_n \cong \frac{n\pi}{l}\,\frac{1}{\int_0^l\sqrt{\frac{q}{e}}\,dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25).$$

Dies ist die gesuchte asymptotische Darstellung von λ_n bezw. ν_n für große Werte von n.

Zum Schluß sei bemerkt, daß die Ueberlegungen dieser Nummer nur ein Beispiel für eine Methode zur Untersuchung eines ausgedehnteren Feldes von Problemen darstellen; für diese weitergehenden, sich insbesondere auf das Eigenwertproblem für partielle Differentialgleichungen beziehenden Untersuchungen muß auf die in Anmerkung [1] zitierte Abhandlung verwiesen werden. 121

Wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen zum Strahlungsgesetz.

Von **E. J. GUMBEL** in Berlin.

Das Plancksche Strahlungsgesetz ist wegen seines engen Zusammenhanges mit der Quantentheorie eine der wesentlichsten Grundlagen der modernen Physik. Durch die Messungen war es nach der bisherigen Auffassung bis auf kleine Fehler gut bestätigt. Nernst und Wulf[1]) kamen aber bei einer Durchsicht sämtlicher bis 1919 vorliegender Messungen zu dem Schluß, die Abweichungen seien doch so bedeutend, daß man die Formel modifizieren müsse, und schlugen ein empirisches multiplikatives Zusatzglied $1+\alpha$ vor. Da die beiden Grenzübergänge der Planckschen Formel für große und kleine Werte der unabhängigen Veränderlichen x und das Wiensche Verschiebungsgesetz auf Grund allgemeiner Erfahrungen als gesichert gelten müssen, kann α nur eine Funktion von x sein, die für große und kleine Werte von x den Wert null annimmt. Dabei ist $x = ch/k\lambda T$, wo c die Lichtgeschwindigkeit, λ die Wellenlänge, k die Boltzmannsche Konstante, h das Elementarquantum und T die absolute Temperatur bedeuten. Das Strahlungsgesetz lautet demnach nach Nernst und Wulf:

$$E_\lambda = \frac{c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^x - 1} (1 + \alpha),$$

wobei E_λ die spezifische Helligkeit eines schwarzen Körpers für die Wellenlänge λ bezeichnet. Für α, das nach der Planckschen Theorie stets den Wert null haben müßte, geben die Autoren als Kompromiß zwischen den Abweichungen der verschiedenen, als zuverlässig betrachteten Messungen von der Planckschen Formel eine empirische Zahlentafel, die einen Höchstwert von $\alpha = 0{,}07$ für $x = 2{,}5$ aufweist. Die vorgeschlagene Aenderung ist, wenn berechtigt, von außerordentlich weitgehenden Folgen. Denn durch sie würde das Plancksche Strahlungsgesetz zu einer theoretisch nicht begründeten Approximationsformel. Da es aber aus den statistischen Ueberlegungen der Quantentheorie erwachsen ist, müßte an diesen selbst etwas falsch sein. Mit Rücksicht auf die Wichtigkeit dieser Frage hat nun Rubens[2]) eine systematische Reihe von Messungen der Energieverteilung im Normalspektrum vorgenommen. Rubens nahm die Wellenlängen λ von 4 bis 16 μ und veränderte die Temperatur T, sodaß der ganze Bereich der x, in dem die Nernstsche Korrektur gelten sollte, überdeckt war.

Im folgenden wird versucht, durch fehlertheoretische Ueberlegungen, und zwar von den Gesichtspunkten der Gaußschen Theorie, der Kollektivmaßlehre und der Korrelationstheorie, aus den Rubensschen Messungen eine begründete Entscheidung zwischen dem Nernstschen und Planckschen Standpunkt zu gewinnen. Das Ergebnis fällt bei allen drei Betrachtungen, in Uebereinstimmung mit den Folgerungen, die Rubens in einer vom Standpunkt der Statistik m. E. nicht zwingenden Weise gezogen hat, zugunsten des Planckschen Gesetzes aus. Zum Schluß wird gezeigt, daß auch ein origineller Ansatz von Charlier durch die Rubensschen Messungen widerlegt ist.

1. Betrachtungen vom Standpunkt des Gaußschen Fehlergesetzes. Hat man zu den verschiedenen x die zugehörige spezifische Helligkeit E_λ beobachtet, so kann man den Planckschen bezw. Nernstschen Ausdruck auf die Form bringen

$$E_\lambda (e^x - 1) = C, \qquad \frac{E_\lambda (e^x - 1)}{1 + \alpha} = C'$$

wobei C bezw. C' konstant sein muß für eine bestimmte Wellenlänge und alle Temperaturen, also nur eine Funktion der Wellenlänge sein darf. Die Entscheidung über die Plancksche bezw. Nernstsche Formel ist damit auf die Untersuchung der Konstanz der Größen C bezw. C' zurückgeführt.

Man könnte zunächst die gemessenen C bezw. C' für eine bestimmte Wellenlänge als Funktionen der x auftragen und nachsehen, welche der beiden Reihen konstantere

---

[1]) W. Nernst und Th. Wulf, Ueber eine Modifikation der Planckschen Strahlungsformel auf experimenteller Grundlage, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, 21, 1919, S. 29.

[2]) H. Rubens und G. Michel, Beitrag zur Prüfung der Planckschen Strahlungsformel. Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften v. 21. Juli 1921.

Werte ergibt, bezw. systematische Abweichungen, entsprechend dem Gang der Werte von $1 + \alpha$ aufweist. Doch liefert dies kein genügend deutliches Bild; bei einigen Messungen sieht man zwar einen systematischen Gang der C-Werte, bei andern schwanken aber beide Größen scheinbar unregelmäßig, so daß dieses Kriterium versagt.

Entscheidend läßt sich die Frage lösen, indem man untersucht, ob die gemessenen Abweichungen von der Konstanz dem Gaußschen Fehlergesetz genügen oder nicht. Da die Größen C und C' aber von den λ abhängen, wird diese Untersuchung nicht an den Fehlern selbst, sondern an ihren relativen Werten durchgeführt werden müssen. Man berechnet also für die verschiedenen C und C' die beiden zugehörigen Mittelwerte und dividiert die Abweichungen davon durch sie. Die beiden Häufigkeitskurven der relativen Fehler, von nun an mit δC und $\delta C'$ bezeichnet, sind in den Abb. 1 und 2 (untere Linien) aufgetragen. Als Größe der Intervalle wurde 2 Promille genommen und die Häufigkeit eines Intervalles jeweils dem zentralen Wert zugeordnet. Werte, die gerade an die Grenze zweier Intervalle fielen, wurden jeweils zur Hälfte auf beide verteilt.

Sollen die so ermittelten Fehler nur zufällige sein, d. h. den Messungen einer konstanten »wahren« Größe entstammen, so muß nach der Fehlertheorie die Häufigkeit eines Fehlers für den $|\delta C| \leqq a$ bezw. $|\delta C'| \leqq a$ durch

$$\frac{2N}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{a}{\vartheta\sqrt{\pi}}} e^{-t^2} dt$$

gegeben sein, wobei $N = 130$ die Gesamtzahl aller Messungen und ϑ bezw. ϑ' den durchschnittlichen Fehler bedeutet. Die beiden durchschnittlichen Fehler waren $\vartheta = 43{,}4$ und $\vartheta' = 107{,}7$ für die Plancksche bezw. Nernstsche Kurve.

Wählt man die Integrationsgrenzen gleich den jeweils summierten Intervallgrenzen, so ergeben sich durch Subtraktion der in Zahlentafeln [1]) angegebenen Werte der Integrale die erwartungsgemäßen theoretischen Häufigkeiten der betreffenden relativen Fehler. Die beiden theoretischen Kurven sind in den Abb. 1 und 2 mit aufgetragen. Man sieht deutlich, daß sich die Kurve der Abweichungen von C der zugehörigen erwartungsgemäßen Kurve besser anschmiegt, als die Kurve der Abweichungen von C'. Die Verteilung der Fehler spricht also mehr für die Plancksche als für die Nernstsche Formel.

Bei diesem Vergleich besteht aber wegen der Art der Intervalleinteilung noch eine gewisse Willkür. Man könnte einwenden, daß die Nernstsche Kurve wegen der größeren Intervallanzahl (da in beiden Kurven die Intervallbreiten konstant gehalten sind) eine schlechtere Anpassung an die Theorie ergeben muß. In der Tat ergibt sich, wenn man die Nernstschen Fehler, wie dies in Abb. 3 geschehen ist, durch Wahl der Intervalle, zu je 6 vT. auf nur 17 Intervalle verteilt, eine weit bessere Anpassung an die zugehörige erwartungsgemäße Kurve als bei der früheren Art der Einteilung. Immerhin bleibt aber auch die Güte dieser Anpassung hinter der Anpassung der Planckschen Kurve zurück. Um diesen willkürlichen Faktor überhaupt auszuschalten, empfiehlt sich ein von der Art der Intervalleinteilung unabhängiger Vergleich von Erfahrung und Theorie. Die Zahlentafeln des Fehlerintegrals geben die Häufigkeit der Fehler, die unterhalb einer bestimmten absoluten Größe des Fehlers liegen. Summiert man also in den betreffenden Grenzen die beobachteten Fehler, so hat man bei diesem Vergleich von Theorie und Erfahrung die Willkür der Intervalleinteilung beseitigt, da die Resultate der Summation unabhängig von der Intervalleinteilung sind. Aber man würde die Unsymmetrien der beobachteten Fehler verwischen, wenn man bei diesem Verfahren nicht auch die Vorzeichen der Fehler berücksichtigte. Man berechnet also zunächst aus den Messungen, wieviele Ergebnisse jeweils unterhalb eines bestimmten δC- bezw. $\delta C'$-Wertes liegen. Man trägt dann als Abszissen sämtliche Beobachtungen nach ihrer Größe auf, und als Ordinate jeweils die Zahl der bis zu dem betreffenden δC- bezw. $\delta C'$-Wert eingetretenen Ergebnisse. So bekommt man eine Treppenlinie, die innerhalb der Variationsbreite von Null bis zur Gesamtzahl aller Messungen ansteigt.

Andererseits entnimmt man den Zahlentafeln der Gaußschen Funktion die Werte von Φ, die man halbiert und von der Mitte (dem arithmetischen Mittel der Fehler als Abszisse und $N/2 = 65$ als Ordinate) aus nach rechts aufwärts sowie nach links abwärts aufträgt. So bekommt man durch graphische Interpolation die zu der oben konstruierten

[1]) z. B. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung Bd. I, Leipzig 1914, S. 385.

empirischen Summenkurve gehörige theoretische Summenkurve. Das Ergebnis der für beide Theorien durchgeführten Rechnung ist in den Abb. 1 und 2 (obere Kurven) dargestellt. Man sieht auch hier, daß die summierten Abweichungen von der Planckschen Formel sich der zugehörigen erwartungsgemäßen Summenverteilung besser anschmiegen, als die Abweichungen von der Nernstschen Formel der zu ihr gehörigen theoretischen Summenverteilung.

2. Präzisionsmaß und Variationsbreite. Es könnte nun eingewendet werden, man könne schon aus der Variationsbreite der Beobachtungen entnehmen, daß die Nernstsche Formel die unrichtigere sei. Sie ergebe nämlich einen viel größeren Variationsbereich, so daß man ihr von vornherein einen viel geringeren Wert zuschreiben müsse.

Diese Beurteilung ist nur insoweit berechtigt, als sie sich auf das bessere Präzisionsmaß der nach Planck gedeuteten Messungen stützt. Denn dies ist für Planck $h = 0{,}013$ und für Nernst $h' = 0{,}005$. Andererseits läßt sich zeigen, daß die Variationsbreiten in beiden Fällen mit den Präzisionsmaßen in der von der Theorie geforderten Uebereinstimmung stehen. Für die nach Nernst gedeuteten Messungen ist diese Uebereinstimmung sogar besser. Wenn man nämlich den erwartungsgemäßen Variationsbereich für die beiden als Gaußsche Kurven betrachteten Verteilungen berechnet und dabei die von L. v. Bortkiewicz[1]) angegebene Formel für die erwartungsgemäße Variationsbreite v als Funktion des durchschnittlichen Fehlers ϑ und der Zahl der Messungen N verwendet, so ergibt sich für $N = 130$, $v = 6{,}54\,\vartheta$, also

	Variationsbreite erwartungsgemäß	beobachtet	prozentuelle Abweichung
für die Plancksche Kurve . .	284	327	15,1
für die Nernstsche Kurve . .	706	771	9,2

Die Nernstsche Kurve liegt etwas besser innerhalb des ihr zugehörigen Variationsbereiches als die Plancksche. Aus den beiden Größen der Variationsbreite läßt sich jedenfalls kein neues Argument gegenüber dem gewinnen, was bereits aus der Betrachtung des Präzisionsmaßes hervorgeht.

3. Betrachtung vom Standpunkt der Kollektivmaßlehre. Um ein exakteres Bild von der Annäherung der beiden Fehlerkurven an die Gaußsche Kurve zu bekommen, bediene ich mich des von Bruns ausgebildeten Verfahrens der Kollektivmaßlehre. Das Verfahren besteht darin, daß man die beobachtete Verteilung durch eine Reihe von Funktionen, nämlich die Gaußsche Funktion und ihre Derivierten, wiedergibt, ähnlich wie man eine willkürliche Funktion in einem endlichen Intervall durch eine Fourier-Reihe wiederzugeben pflegt. Zunächst stellt man nach der von v. Mises gegebenen Deutung[2]) die wiederzugebende Verteilungskurve durch die Gaußsche Funktion dar, dann den Ueberschuß der wirklichen Messungsergebnisse über die erwartungsgemäße Anzahl von unterhalb eines bestimmten Wertes liegenden Resultaten wieder durch die Gaußsche Funktion usw. So bekommt man für die beobachtete Verteilung $\mathfrak{v}(x)$ die Entwicklung

$$\mathfrak{v}(x) = \sum_{1}^{n} c_\nu \, \mathfrak{q}_\nu(x),$$

wobei die $\mathfrak{q}_\nu$ jeweils die $(\nu-1)$ ten Differentialquotienten von

$$\mathfrak{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

bedeuten. Durch geeignete Wahl des Koordinatenanfangspunktes und des Maßstabes gelingt es, c_2 und c_3 gleich null zu machen. Die c_ν berechnen sich nach denselben Methoden wie bei der Fourier-Reihe. Denn die $\mathfrak{q}_\nu$ genügen (v. Mises[3])) der Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2} \mathfrak{q}_\nu(x)\, \mathfrak{q}_\mu(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \mu, \\ \dfrac{2^{\nu-1}\,(\nu-1)!}{\sqrt{\pi}} & \text{für } \nu = \mu. \end{cases}$$

[1]) L. v. Bortkiewicz, Variationsbreite und mittlerer Fehler, Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft, 21, 1912, S. 3 bis 11.

[2]) R. v. Mises, Ueber die Grundbegriffe der Kollektivmaßlehre, Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, 21, 1912, S 9 bis 20.

[3]) a. a. O. Gl. (7) und (8).

THIS CHART WILL BE THE FIRST CHART
APPEARING AT THE END OF THIS FILM.

Demnach erhält man durch gliedweise Integration der Reihe

$$c_\nu = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu-1}(\nu-1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{v}(x)\, \varphi_\nu(x)\, e^{x^2}\, dx\,.$$

Da $\varphi_\nu(x)\, e^{x^2}$ ein Polynom in x ist, so hat man damit die Berechnung der Koeffizienten auf die Berechnung der Momente von $\mathfrak{v}(x)$ zurückgeführt. Setzt man $v = h(x-A)$, wo A den Mittelwert und h das Präzisionsmaß der Fehlertheorie bedeutet, so bekommt man für die Verteilung die Entwicklung:

$$v(x) = h\,\varphi_1(v) + \frac{D_3}{2^2}\, h\,\varphi_4(v) + \frac{D_4}{2^3}\, h\,\varphi_5(v) + \ldots.$$

oder für die Summenfunktion durch Integration:

$$2\,\mathfrak{S}(x) = 1 + \Phi(v) + \frac{D_3}{2^2}\,\Phi_3(v) + \frac{D_4}{2^3}\,\Phi_4(v) + \ldots.$$

Dabei ist $\Phi(v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^v e^{-x^2} dx$ und die Indizes 3, 4 ..... bedeuten die Ableitung dritter, vierter ..... Ordnung nach v.

Bezeichnet man das ν-te Moment, berechnet vom arithmetischen Mittel A als Ausgangspunkt, mit μ_ν^ν

$$\mu_\nu^\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-A)^\nu\, v(x)\, dx,$$

so ist

$$D_3 = -\frac{{\mu_3}^3}{3\sqrt{2}\,{\mu_2}^3}, \qquad D_4 = {}^1\!/_{12}\left(\frac{{\mu_4}^4}{{\mu_2}^4} - 3\right), \ldots.$$

Hat man die Momente einer Verteilung berechnet, so hat man in den Konstanten D_3, D_4 ... einfache Kriterien der Anpassung an die Gaußsche Verteilung. Da die ungeraden Momente nur für unsymmetrische Kurven von Null verschieden sind, so ist D_3 ein Maß der Schiefe; denn die Division durch ${\mu_2}^3$ führt nur dazu, einen dimensionslosen Faktor zu erzeugen. Für $D_3 \lessgtr 0$ ist linksseitige bezw. rechtsseitige Asymmetrie vorhanden. Da D_4 (wie alle D überhaupt) für die Gaußsche Kurve gleich null wird, so bietet die Abweichung des $\frac{{\mu_4}^4}{{\mu_2}^4}$ vom Wert 3 ein weiteres Maß der Abweichung.

Wie Pearson[1]) gezeigt hat, ist $\frac{{\mu_4}^4}{{\mu_2}^4}$ ein Kriterium für die Verbreiterung der Kurve in der näheren Umgebung des Maximums. Ist dieser Ausdruck größer oder kleiner als 3, so ist das Maximum breiter oder spitzer als bei der Gaußschen Kurve. Wie die untenstehende Tabelle zeigt, ist das Maß der Schiefe D_3 bei der Nernstschen Kurve wesentlich größer, dagegen das Maß der Spitzigkeit D_4 umgekehrt kleiner als bei der Planckschen Kurve. Man hat daher das Bedürfnis nach einem zusammenfassenden Kriterium, das die beiden einander widersprechenden Kriterien verbindet.

Um zu einem solchen eindeutigen Kriterium für die Güte der Anpassung einer gegebenen Verteilung an die Gaußsche zu gelangen, kann man nach einem Vorschlag von v. Mises das Integralquadrat der Abweichung zwischen der empirischen, durch die Reihe dargestellten, und der theoretischen, Gaußschen Verteilung in der Weise berechnen, daß man die einzelnen Abweichungswerte noch jeweils mit $e^{\frac{v^2}{2}}$ multipliziert in Rechnung stellt. Damit erhält man das Kriterium der Anpassung

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathfrak{v}(x) - h\,\varphi_1(v)]^2\, e^{v^2}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{D_3}{2^3}\,\varphi_4(v) + \frac{D_4}{2^3}\,\varphi_5(v) + \ldots\right]^2 e^{v^2}\, dv.$$

Zufolge der oben dargelegten Orthogonalitätsbeziehungen berechnet sich die rechte Seite zu

$$F = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{{D_3}^2}{2^4}\, 2^3 \cdot 3! + \frac{{D_4}^2}{2^6}\, 2^4 \cdot 4! + \ldots\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,(3\,{D_3}^2 + 6\,{D_4}^2 + \ldots).$$

[1]) K. Pearson, London Philosophical transactions, Bd. 198 A, 1902, S. 235 bis 229.

Kennt man alle Koeffizienten der Brunsschen Reihe einer Beobachtungsfolge, so hat man in F ein exaktes Maß für die Güte der Anpassung an die Gaußsche Normalverteilung. Im folgenden sind die Werte angegeben, die sich bei Beschränkung auf die ersten beiden Koeffizienten D mit der Genauigkeit des Rechenschiebers ergeben haben.

Bezeichnung	Symbol	Wert für die Plancksche Kurve	Wert für die Nernstsche Kurve
Arithmetisches Mittel	A	1,846	0,462
Durchschnittlicher Fehler	ϑ	43,4	114
Präzisionsmaß	h	0,0127	0,00495
1. Koeffizient der Brunsschen Reihe (Maß der Schiefe)	D_3	$-0{,}118$	0,141
2. Koeffizient der Reihe (Maß der Verbreiterung)	D_4	0,062	0,054
Maß der Abweichung von der Gaußschen Verteilung	F	0,0648	0,0761

Es zeigt sich also wieder, daß die Nernstsche Kurve ein größeres Maß von Unregelmäßigkeit aufweist als die Plancksche Kurve.

4. Betrachtung vom Standpunkt der Korrelationstheorie. Wir haben bisher stets die Frage untersucht, inwieweit die Größen C bezw. C' konstant sind, also inwieweit die Abweichungen von ihnen als zufällig betrachtet werden können. Der Ausgangspunkt unserer Fragestellung war aber, ob die α-Korrektion des Planckschen Gesetzes zur Darstellung der Messungen selbst nötig ist. Oder ob durch sie ein systematischer Gang in die jeweils konstant sein sollenden Werte der Helligkeit hineingebracht ist. Hierüber können die beiden bisherigen Methoden nichts aussagen. Diese Frage läßt sich mit Hilfe der Korrelationsmethode beantworten. Zunächst stellt man eine Tabelle auf, welche für jedes x den zugehörigen Wert der vorgeschlagenen Korrektur $1+\alpha$ und die δC und $\delta C'$ enthält. Verfolgt man den Gang der δC und $\delta C'$ für wachsende x, so sieht man, daß die δC regellos schwanken, daß dagegen die $\delta C'$ zuerst abnehmen bis $x = 2{,}5$ und von da an wieder zunehmen. Das ist aber genau der Gang, den die reziproken Werte von $1+\alpha$ besitzen. Diese Tabelle wurde durch entsprechende Mittelwertbildung auf 6 Zeilen konzentriert und ist in Abb. 4 wiedergegeben, wobei zu jeder Intervallmitte das zugehörige δC und $\delta C'$ und $\frac{100}{1+\alpha}$ aufgetragen ist.

Die graphische Darstellung ergibt einen ausgesprochenen Parallelismus zwischen dem Verlauf der $\delta C'$ und $\frac{100}{1+\alpha}$, während die δC vom Verlaufe der α-Korrektur ziemlich unabhängig sind. Nach der Nernstschen Hypothese müßte der Verlauf gerade umgekehrt sein. Der Schluß ist also berechtigt, daß die α-Korrektur in die Messungen ein ihnen fremdes Element hineinträgt. Unsere Darstellung hat nur den Nachteil, daß die verschiedenen Mittelwerte ganz verschiedene Gewichte haben, da in den verschiedenen x-Intervallen eben eine verschiedene Anzahl von Messungen vorgenommen wurde.

Eine andere Betrachtungsweise geht von den numerischen Werten der Korrektur $1+\alpha$ aus und liefert ein einfaches numerisches Maß für den Zusammenhang dieser Größen mit den jeweils zugehörigen Größen von δC und $\delta C'$. Man teile sowohl die Werte von $1+\alpha$ wie die von δC bezw. $\delta C'$ in eine Anzahl von Intervallen ein. Da die α nur ziemlich unsicher bestimmt sind, habe ich nur je 5 Intervalle genommen. Zu den Werten von $1+\alpha$ innerhalb eines gewissen Intervalls ergeben die Messungen eine bestimmte Anzahl von δC- bezw. $\delta C'$-Werten, die in ihr erstes Intervall, eine andere Zahl, die in ihr zweites Intervall fallen usw. Auf diese Weise bekommt man 2 Tafeln mit doppeltem Eingang, welche die Frage beantworten, ob zu großen Werten von $1+\alpha$ hauptsächlich große oder kleine Werte von δC bezw. $\delta C'$ gehören, oder ob diese Werte zufällig schwanken, gleichgültig welchen Wert $1+\alpha$ besitzt. Den einfachsten Ueberblick gewährt es, wenn man für jedes Intervall der δC bezw. $\delta C'$ die zugehörigen Mittelwerte der $1+\alpha$ und umgekehrt für jedes Intervall der $1+\alpha$ die zugehörigen Mittelwerte der δC bezw. $\delta C'$ berechnet. Die Resultate der Rechnung, die sogen. »Regressionslinien«, sind in den Abb. 5 und 6 wiedergegeben, wobei die Intervalle jeweils durch die Intervallmitten dargestellt wurden.

Man sieht, daß wenn $1+\alpha$ fällt, $\delta C'$ wächst, d. h. infolge der α Korrektur werden die Messungen nicht mit einer konstanten, sondern mit einer von $1+\alpha$ abhängigen

Größe verglichen; also ergibt die Strahlungsformel ohne die Korrektur eine konstante Größe C. Dies sieht man deutlich bei Betrachtung der Abb. 5. Sie läßt sich viel eher als die erste dahin deuten, daß für jeden Wert der einen Variabeln die andere zufällig schwankt. Vollkommen wäre dies der Fall, wenn die Regressionslinien aufeinander senkrecht ständen. Einen numerischen Ausdruck für dieses Verhalten bildet der Korrelationskoeffizient[1]). Er beruht darauf, daß man die Regressionskurven nach der Methode der kleinsten Quadrate durch Gerade ausgleicht. Bezeichnet man die Abweichungen vom Mittelwert der beiden Variabeln δC bezw. $\delta C'$ und $1+\alpha$ mit x und y und nimmt den Punkt, der dem Mittelwert beider Variabeln entspricht, zum Koordinatenanfangspunkt, so lauten die Gleichungen der beiden Geraden

$$x_1 = b_1 y_1 \text{ und } y_2 = b_2 x_2.$$

Dann ist als Definition gesetzt $r^2 = b_1 b_2$, das Quadrat des Korrelationskoeffizienten r. Sind die Variabeln zusammenhanglos (wenn die Regressionslinien aufeinander senkrecht stehen), so ist er null. Ist er nicht null, so ist ein Zusammenhang zu vermuten. Praktisch berechnet man r aus der Beziehung

$$r = \frac{\Sigma x y}{\sqrt{\Sigma x^2 \cdot \Sigma y^2}},$$

wobei der mittlere Fehler dieses Koeffizienten $\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$ beträgt. In unserem Fall ist für den Zusammenhang von δC und $1+\alpha$ das $r = 0{,}198$ mit einem mittleren Fehler von 0,087 und für den Zusammenhang von $\delta C'$ und $1+\alpha$ das $r' = 0{,}525$ mit einem mittleren Fehler von 0,063. Daß überhaupt für den Zusammenhang von δC und $1+\alpha$ ein von null sich unterscheidender Wert herausgekommen ist, liegt vor allem an der Messung $\delta C = 25$, für $1+\alpha = 1{,}070$. Dies ist ein extremer Wert, der wahrscheinlich auf einem systematischen Fehler beruht. Würde man ihn weglassen, so ergäbe sich ein viel kleinerer Koeffizient r, während sich der Koeffizient r', da hier diese Messung keine extreme Rolle spielt, praktisch nicht ändern würde. Daß der Wert des Koeffizienten r' kleiner ist, als man nach der Abbildung erwarten möchte, liegt daran, daß die Korrelationsmethode die in ein Intervall fallenden Messungen genau so häufig wertet, wie sie vorgekommen sind, während in der Abbildung bei der Mittelwertbildung die Gewichte der einzelnen Messungen nicht berücksichtigt sind und die verschiedenen Punkte daher ein ganz verschiedenes Gewicht besitzen.

Die vorliegenden Koeffizienten berechtigen zu dem Schluß: Die nach der Planckschen Formel gedeuteten Messungen zeigen einen ganz geringen Zusammenhang mit dem Verlauf der von Nernst vorgeschlagenen Korrektur $1+\alpha$, den man als zufällig betrachten kann. Dagegen weisen die nach Nernst gedeuteten Messungen einen ausgesprochenen Gang, entsprechend dem Verlauf der Werte $1+\alpha$, auf. Die Plancksche Formel stellt eine Konstante, die Nernstsche eine vom Verlauf der $1+\alpha$ abhängige Größe dar. Sie ist also keine Formel für die Strahlungsintensität.

5. Das Charliersche Strahlungsgesetz. Charlier[2]) hat versucht, die Energieverteilung im Normalspektrum auf das Gaußsche Verteilungsschema zurückzuführen. Die Energie ist Null für $\lambda = 0$ und für $\lambda = \infty$, hat also dazwischen, da sie überall positiv, ein Maximum. Führt man an Stelle von λ den Logarithmus der Wellenlänge ein, so läuft dieser von $-\infty$ bis $+\infty$. Setzt man also $y = \lg \lambda$, so geht der Charliersche Ansatz dahin, daß die Verteilung der Energie über y durch die Brunssche Reihe wiedergegeben werden kann. Praktisch untersucht hat Charlier nur den Fall, daß die Reihe beim ersten Glied abbricht. Dann lautet die Annahme, daß die Verteilung dem Gaußschen Gesetz genügt.

Demnach ist

$$E_y = \frac{k}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(y-M)^2}{2\sigma^2}}.$$

Dies entspricht dem Galtonschen Fehlergesetz. Zur Bestimmung der Konstanten k, σ, M verwendet man 3 Gesetze, die aus der Theorie bekannt sind.

---

[1]) Vergl. von neueren Deutschen Darstellungen H. Gravelius, diese Zeitschr. 1, 1920, S. 199 bis 205 und P. Riebesell, ebenda 2, 1922, S. 195 bis 198 und die umfangreiche englische Originalliteratur, zitiert bei G. U. Yule, An introduction to the theory of statistics, London 1912.

[2]) Arkiv for Mathematik, Fysik och Astronomie, Bd. 9, 1913/14, Nr. 11.

a) Das Stefan-Boltzmannsche Strahlungsgesetz, wonach die gesamte, von einem schwarzen Körper ausgestrahlte Energie für alle Wellenlängen proportional der 4. Potenz der absoluten Temperatur ist, daß also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_\lambda \, d\lambda = a T^4.$$

b) Nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz ist die spezifische Helligkeit proportional λ^{-5} multipliziert mit einem Ausdruck, der nur eine Funktion von λT ist. Erste Folgerung daraus ist, daß es eine Wellenlänge λ_m gibt, für die die Strahlungsintensität ein Maximum besitzt, wobei $\lambda_m T = b = \text{konst.}$

c) Weiter folgt aus dem Wienschen Verschiebungsgesetz, daß diese Strahlungsintensität E_{max} proportional der 5. Potenz der Temperatur, also daß $E_{max} = C T^5$.

Bestimmt man so die Konstanten k, σ und M aus den numerisch bekannten a, b, C und kehrt man dann von der Verteilung der y zur Verteilung der λ zurück, so wird

$$E_\lambda = \text{konst. } T^5 \, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\lg \frac{\lambda T}{b}\right)^2},$$

wobei sich σ aus den Konstanten a, b, C durch eine transzendente Gleichung berechnen läßt. Führt man wieder die Größe $x = \frac{ch}{k\lambda T}$ ein, so läßt sich das Zutreffen dieses Gesetzes an Hand der Messungen von Rubens wieder mit Hilfe des oben geschilderten Schemas untersuchen.

Man braucht den Ausdruck mit Hilfe geeigneter Multiplikation nur auf die Form zu bringen

$$\frac{E_\lambda}{x^5} \, e^{\frac{1}{2\sigma^2}\left(\lg \frac{ch}{kb}\frac{1}{x}\right)^2} = \text{konst.} \left(\frac{ch}{\lambda k}\right)^5 = C'',$$

so muß wieder die rechte Seite nur von der Wellenlänge abhängen, also für monochromatische Messungen unabhängig von der Temperatur, nur den von Meßfehlern herrührenden Schwankungen unterworfen sein. Doch erübrigt sich die Anwendung der Methode hier, weil die Formel eine wesentliche Konsequenz enthält, die von der Erfahrung nicht bestätigt ist. Die spezifische Strahlungsintensität hätte nämlich danach für konstante Wellenlängen ein von der Temperatur abhängiges Maximum. Die Messungen von Rubens ergeben aber in Uebereinstimmung mit dem Planckschen Gesetz, daß für Isochromaten die Energie mit wachsendem T wächst im Widerspruch zum Ansatz von Charlier, so daß das Charliersche Strahlungsgesetz zu verwerfen ist.

Zusammenfassung. Die aus der Fehlertheorie, der Kollektivmaßlehre und der Korrelationstheorie entnommenen Kriterien führen uns zu dem übereinstimmenden Schluß, daß nach den Messungen von Rubens die Nernstsche Formel abzulehnen ist und die ursprüngliche Plancksche Formel bestätigt wird. Das Charliersche Strahlungsgesetz ist zu verwerfen.

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie.[1]

Von **H. HENCKY** in Delft.

Daß in der mathematischen Physik die linearen Differentialgleichungen eine so vorherrschende Rolle spielen, ist kein Zufall und auch nur in beschränktem Maße ein reines Erfahrungsergebnis. Es ist dies vielmehr in gewissem Sinne das Ergebnis einer sehr allgemein vollzogenen Potenzentwicklung, bei der man die höheren Glieder vernachlässigt hat. So genau eine derartige Näherung die Erscheinungen auch darstellen mag, es gibt doch immer Erscheinungsgruppen, wo die Annäherung versagt

[1] Dieser Bericht bringt nur eine kurze Uebersicht über die neuere Literatur. Auf die sachlichen Probleme wird in späteren Einzelberichten näher eingegangen werden. Der Herausg.

und wo man die höheren Glieder heranziehen muß. Eine solche Gruppe, bei der die Linearisierung des Problems unzulänglich wird, d. h. nicht zur Beantwortung aller Fragen ausreicht, haben wir in den Stabilitätsproblemen der Elastizitätslehre vor uns.

In zweifacher Weise wird das Problem der Elastizitätstheorie künstlich linearisiert. Einmal in kinematischer Beziehung, indem man nämlich unendlich kleine Deformationen voraussetzt, wodurch man sich die Möglichkeit einer Superposition der elastischen Verschiebungen sichert, dann auch in Hinsicht auf die Ursache der Deformationen, indem man lineare Beziehungen zwischen Kraft und Deformation voraussetzt. Demgemäß erkennen wir schon im voraus die Notwendigkeit, die Stabilität unter zwei verschiedenen Voraussetzungen zu behandeln,

1. unter Annahme des Hookeschen Gesetzes,
2. unter Annahme eines Gesetzes, welches auch den Uebergang zum plastischen Zustand (Fließen) noch berücksichtigt.

Die Behandlung des Problems erfordert vor allem eine klare Definition der Begriffe Stabilität und Instabilität. Als solche hat sich die Definition von Love-Bryan[1]) bewährt. Danach ist eine Gleichgewichtslage immer stabil, wenn sie die einzig mögliche ist und wenn die potentielle Energie der angreifenden und der elastischen Kräfte einen Kleinstwert hat.

Ueber die Methoden zur Lösung von Stabilitätsproblemen mag hier folgendes bemerkt werden[2]).

Der allgemeinste Vorgang bei Lösung von Stabilitätsproblemen besteht darin, die Kräfte, welche durch elastische Verschiebungen erzeugt werden, zu berücksichtigen. Man erhält auf diese Weise nach konsequenten Vernachlässigungen homogene lineare Differentialgleichungen, deren Eigenwerte die Stabilitätsgrenzen liefern.

In solchen Fällen, in denen die Differentialgleichung in einfacher Form nicht gelöst werden kann, empfiehlt sich ein Verfahren, dessen ausführliche Darlegung und Anwendung wir Timoschenko[3]) verdanken. Bezeichnen wir mit y die Ausbiegungen eines axial gedrückten Stabes, so ist die potentielle Energie der Biegung bekanntlich (E Elastizitätsmodul, J Trägheitsmoment) $V = \frac{EJ}{2}\int y''^2\,ds$. Die Arbeit der äußeren Kräfte ergibt sich aus der Stabverkürzung infolge der Biegung zu $P\,{}^1\!/_2 \int y'^2 ds$. Im Knickfall muß diese Arbeit gerade gleich der potentiellen Energie sein, d. h. $P_k = \frac{EJ\int y''^2\,ds}{\int y'^2\,ds}$. Man kann nun für y eine beliebige die Randbedingungen befriedigende Reihe ansetzen und nach einem von Ritz[4]) angegebenen Verfahren die Koeffizienten dieser Entwicklung so bestimmen, daß P_k ein Minimum wird. Das Verfahren ist natürlich auf den speziellen Fall des geraden axial gedrückten Stabes nicht beschränkt und gerade darin besteht seine praktische Bedeutung.

Auch dieses Verfahren hat aber Grenzen für seine Anwendung. Man kann dann eine in der Tat allgemein verwendbare Methode einschlagen, die wenn auch oft um den Preis umständlicher Rechnungen, doch immer zu dem gewünschten Ziele führt. Es ist dies das Rechnen mit endlichen Differentialen, d. h. der Uebergang von der Differentialgleichung zu Differenzengleichungen[5]). Dieses Verfahren gestattet auch eine sehr anschauliche Deutung, es besteht in der Verwandlung des kontinuierlichen Systems in eine Kette starrer Teile, die durch elastische Gelenke[6]) verbunden sind. An dieser

---

[1]) G. H. Bryan, Cambridge Phil. soc. Proc. 6 (1889), S. 199. A. E. Love, Lehrbuch der Elastizität, dtsch. von Timpe, Leipzig 1907, S. 470.

[2]) Zusammenfassende Werke: A. u. L. Föppl, Drang und Zwang, II. Bd., München 1920. R. Mayer, Die Knickfestigkeit, Berlin 1921.

Vgl. ferner das Referat über Festigkeitsprobleme im Maschinenbau von Th. v. Kármán, Encyklop. der math. Wiss. Bd. IV, 27, S. 870 u. f.

[3]) Timoschenko, Sur la stabilité des systèmes élastiques, Ann des ponts et chaussées. Fasc. III, IV u. V, 1913 (Uebersetzung einer älteren russischen Arbeit desselben Verfassers).

[4]) Ritz, Journal für reine und angewandte Math, 135 (1909): Ueber eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme.

[5]) Vergl. hierzu v. Mises, Ueber die Stabilität rotierender Wellen, Monatshefte für Math. u. Phys., 22, 1911, S. 33 bis 52.

[6]) H. Rode, Beitrag zur Theorie der Knickerscheinungen mit Anwendungen im Eisenbau, Dissertation, Hannover 1916.

H. Hencky, Ueber die angenäherte Lösung von Stabilitätsproblemen im Raum mittels der elastischen Gelenkkette, Der Eisenbau, 1920, S. 438 bis 452.

Stelle verdient auch die graphische Methode von Vianello[1]) Erwähnung. Sie beruht auf den bekannten Eigenschaften des Seilpolygons, welche Mohr zur Konstruktion der elastischen Linie eines gebogenen Balkens benutzt hat. Um die Knicksicherheit eines axial gedrückten Stabes zu finden, nimmt Vianello eine virtuelle Verschiebung der Gleichgewichtslage an und rechnet oder zeichnet mit Hilfe des Seilpolygons die zugehörige Momentenlinie. Durch ein zweites Seilpolygon bekommt man jetzt eine neue Biegelinie. Das Verfahren wird solange fortgesetzt, bis die Biegelinie der anfänglichen Annahme affin zur verbesserten Biegelinie ist.

Wie Marcus[2]) gezeigt hat, besitzt das Seilpolygon ein genaues zweidimensionales Gegenstück, das man zweckmäßig als elastisches Gewebe oder Seilpolygonkette bezeichnen kann. Dieses elastische Gewebe oder Netz von sich überkreuzenden Seilpolygonen steht nun zur gebogenen ebenen Platte in demselben Verhältnis wie das Seilpolygon zum Balken. Zu allen Konstruktionen, welche sich mit dem Seilpolygon ausführen lassen, existiert ein genaues Gegenstück mit dem elastischen Gewebe. Sämtliche Knickprobleme, welche sich an plattenförmigen Konstruktionsteilen ergeben können, lassen sich auf diese Weise nunmehr behandeln und zwar mit einem erstaunlich einfachen mathematischen Apparat.

Außer diesen beschriebenen Methoden gibt es noch zwei Verfahren, denen eine gewisse Willkür anhaftet, die aber doch zur Abschätzung der Knickgefahr manchmal brauchbar sein können. Das eine Verfahren besteht darin, daß man an dem auf Stabilität zu untersuchenden Konstruktionsteil eine Lastgruppe anbringt, welche eine ähnliche Deformation ergibt wie die wirkliche Knicklast. Diese so erhaltene Biegelinie legt man nun der weiteren Berechnung zugrunde[3]).

Das andere Verfahren hat einen sehr allgemeinen Charakter, man könnte es als Variation der kinematischen Bedingungen bezeichnen. Es liegt vielen Näherungstheorien der technischen Elastizitätslehre zugrunde und besteht im wesentlichen darin, daß man den Elastizitäts- bezw. Schubmodul eines Konstruktionsteils 0 oder ∞ setzt, wodurch man zwei Grenzen erhält, zwischen denen das wirkliche Verhalten der untersuchten Konstruktion schwanken muß.

1. Stabilität des geraden vollwandigen oder gegliederten Stabes mit axialer Belastung. Das Problem des geraden axial gedrückten Stabes ist bekanntlich für schlanke Stäbe schon von Euler erledigt worden.

Die Theorie des gedrungenen Knickstabes dagegen (Knickspannung > Spannung an der Proportionalitätsgrenze) wurde erst von Engesser in Angriff genommen, eine versuchsmäßige Lösung verdanken wir v. Tetmajer[4]). Zu einem wissenschaftlich vollständig befriedigenden Abschluß ist diese Frage durch v. Kármán[5]) geführt worden. v. Kármán hat auf Grund von theoretischen und sehr sorgfältigen experimentellen Untersuchungen gefunden:

1. Die Eulersche Formel gibt bei sehr schlanken Stäben, wenn die Knickspannung unterhalb der Proportionalitätsgrenze liegt und die Randbedingungen des Versuchs mit denen der Rechnung übereinstimmen, sehr genau die wirklichen Verhältnisse wider.

2. Bei Ueberschreitung der Propornationalitätsgrenze ist an Stelle des Elastizitätsmoduls E in den Eulerschen Formeln ein bestimmter, für jeden Querschnitt berechenbarer Knickmodul T zu setzen, der einen Mittelwert zwischen dem Modul der gesamten und der elastischen Formänderungen darstellt.

3. Die Tetmajerschen empirischen Formeln ergeben für Flußeisen einen gewissen Ueberschuß an Sicherheit.

Man muß bedenken, daß es sich im Bauwesen fast stets um den Fall der unelastischen Knickung handelt. Nur ganz leicht gehaltene Konstruktionsteile wie Wind- und Horizontalverbände in Eisenkonstruktionen machen davon eine Ausnahme. Die

---

[1]) Vianello, Z. d. V. d. I. 1898, S. 1436.

[2]) Marcus, Armierter Beton, 1919, S. 107 u f.

[3]) Vergl. hierzu H. Kayser, Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, herausgegeben vom V. d. I., Heft 207. Beziehungen zwischen Druckfestigkeit und Biegungsfestigkeit.

[4]) L. v. Tetmajer, Die Gesetze der Knickungs- und zusammengesetzten Druckfestigkeit. 3. Aufl., Wien 1903.

[5]) v. Kármán, Untersuchungen über Knickfestigkeit. Dissertation, Göttingen 1909.

allgemeine Knickformel lautet $\sigma_k = \pi^2 T \left(\frac{i}{l}\right)^2$, wobei l die Knicklänge (von Wendepunkt zu Wendepunkt), i der Trägheitsradius des Querschnitts und σ_k die Knickspannung. Die empirische Tetmajersche Formel lautet $\sigma_k = \alpha - \beta \left(\frac{l}{i}\right)$, wobei α und β feste für die verschiedenen Stoffe verschiedene Koeffizienten. Eliminiert man hier $\frac{l}{i}$ aus den beiden Gleichungen, so ergibt sich für den Knickmodul $T = \frac{\sigma_k (\alpha - \sigma_k)}{\pi^2 \beta^2}$ eine Formel, die bei den Anwendungen auf kompliziertere Querschnitte eine Rolle spielt, für welche eine theoretische Berechnung von T nicht ohne weiteres möglich ist.

Häufig zieht man es vor, aus Gründen der Material- und Gewichtsersparnis die Druckstäbe nicht vollwandig auszuführen, sondern 2 oder 4 Vollwandstäbe durch 2 oder 4 Fachwerkscheiben zu einem Ganzen zu verbinden. Man hat zur Berechnung derartiger gegliederter Druckstäbe verschiedene Wege eingeschlagen. Zunächst läßt sich das Problem stets reduzieren auf die Untersuchung einer Tragwand gegen Ausknicken in ihrer Ebene. Da die Gurtungen durchlaufen, so ist das System stets hochgradig statisch unbestimmt [1]). Die Momente, welche in den Gurtungen auftreten, sowie die Stabkräfte der Vergitterung lassen sich durch die Verschiebungen der Knotenpunkte ausdrücken. Stellt man nun die Gleichgewichtsbedingungen auf, so erhält man ein System von homogenen Gleichungen mit den Knotenpunktsverschiebungen als Unbekannten, deren Zahl ebenso groß ist wie die Zahl der Unbekannten. Das Verschwinden der Nennerdeterminante dieses Systems liefert die Knickbedingung. Natürlich ist es unmöglich, die Rechnung in dieser Strenge praktisch zu verwirklichen. Müller-Breslau [2]) macht daher eine Reihe von Vereinfachungen, die im wesentlichen darauf hinauslaufen, daß man den mehr oder weniger vollwandartigen Charakter eines solchen Fachwerkes berücksichtigt. Müller-Breslau erhält schließlich die Knickkraft für den Gitterstab in der Form $P_k = \varkappa \varkappa' \pi \frac{\pi^2 E J}{l^2}$, wobei $\varkappa'$ ein nur von der Felderteilung abhängiger, $\varkappa$ ein von den Dimensionen der Vergitterung abhängiger Wert ist.

Für Rahmenstäbe läßt sich die Knickkraft auf die Form $P_k = \alpha \frac{\pi^2 E J}{l^2}$ bringen, wo α ein Abminderungskoeffizient. Handelt es sich um einen Fall unelastischer Knickung, so setzt man an Stelle des Elastizitätsmoduls den Knickmodul T, der unter Benutzung der Tetmajerschen Formel auch als Funktion der Knickspannung geschrieben werden kann.

Zeichnet sich die von Müller-Breslau herrührende Theorie durch ihre wissenschaftliche Strenge und Vollständigkeit aus, so hat das von Engesser [3]) eingeschlagene Verfahren den Vorzug einer größeren Uebersichtlichkeit und Einfachheit. Engesser geht von der Annahme aus, daß die Biegelinie des gegliederten oder Rahmenstabes eine Sinuswelle sein wird. Wegen der Nachgiebigkeit der Querverbindungen entsteht zu der Durchbiegung des vollwandig gedachten Stabes noch eine zusätzliche Sinuswelle [4]). Das Verhältnis der Amplituden der Sinuswellen für den Vollwandstab und für den Stab mit elastischen Querverbindungen gibt dann sofort den Abminderungskoeffizienten α in der Formel $P_k = \alpha \frac{\pi^2 E J}{l^2}$, was sich durch Anschreiben der Differentialgleichungen leicht zeigen läßt. Die Formeln von Engesser stimmen in der Hauptsache mit den Formeln von Müller-Breslau überein.

Obgleich diese beiden Verfahren von Engesser und Müller-Breslau die wissenschaftlich befriedigendste Lösung darstellen, haben sie sich bisher in der Praxis nicht einbürgern können. Es liegt dies daran, daß die Benutzung dieser Methoden immerhin den Arbeitsaufwand für eine Bauwerksberechnung nicht unwesentlich vergrößern würde.

---

[1]) betr. die Theorie vergl. das Referat von K. Wieghardt, Spezielle Fragen aus der Theorie der Fachwerke. Encyklopädie der math. Wiss., IV. 29 C.

[2]) Müller-Breslau Neuere Methoden der Festigkeitslehre, Leipzig 1913, S. 415 u. f.

[3]) F. Engesser, Ueber die Knickfestigkeit von Rahmenstäben, Zentralblatt der Bauverwaltung, 1909, S. 136. Knicksicherheit von Gitterstäben. Z. d. V. d. I. 1908, S. 359.

[4]) Es handelt sich hier eigentlich um eine Taylorsche Entwicklung, wobei das erste Glied der Stab mit unendlich steifen Querverbindungen ist.

H. Kayser[1]) schlägt vor, auf die Berücksichtigung der unelastischen Knickung ganz zu verzichten und dafür mit einem anfänglich nach einer Sinuswelle ausgebogenen Stab zu rechnen, wobei man den Biegungspfeil allerdings willkürlich annehmen muß. Begründen läßt sich dieser Vorschlag damit, daß infolge der stets vorhandenen Exzentrizität des Kraftangriffs die Einführung eines für zentrische Belastung gültigen Knickmoduls doch auch etwas unsicher ist.

In der Praxis mehr Beachtung hat ein anderer von Krohn[2]) angegebener Weg zur Abschätzung der Knickgefahr gegliederter Druckstäbe gefunden. Allerdings sind diese Formeln rein empirisch und gründen sich einerseits auf die Annahme, daß die Knickkraft eines Stabes um so kleiner ist, aus je mehr Teilen sich der Stab zusammensetzt, andererseits auf die Tetmajerschen Formeln. Trotzdem sie daher für die elastische Knickung nicht am Platze sind, werden sie viel gebraucht, weil man dabei die Dimensionen der Querverbindungen noch nicht zu kennen braucht.

Ein interessanter Sonderfall eines gegliederten Systems ergab sich bei der Aufstellung der Entwürfe zur Erbauung einer Straßenbrücke über den Rhein bei Köln[3]). Bei dem Entwurf einer Hängebrücke war der Horizontalzug der Kette zurückgeleitet in den Versteifungs- und Fahrbahnträger, so daß die Frage nach der Stabilität eines derartigen Systems in der Tragwandebene entstand. Untersuchungen von Engesser und R. Mayer[4]) zeigen aber, daß diese Anordnung im allgemeinen stabil ist. Modellversuche bestätigten dieses Ergebnis.

Eine Reihe von Sonderfragen der Stabknickung ist bei der Holmberechnung im Flugzeugbau aufgetreten; darüber ist in dem Bericht über die Probleme der Flugzeugstatik referiert worden[5]).

2. Stabilität des krummen Stabes in seiner Ebene. Eine besondere Stellung nehmen die Stabilitätsprobleme ein, welche sich auf gekrümmte Stäbe beziehen, weil hier auch senkrecht zum Stab gerichtete Lasten Instabilität ergeben können. Hierher gehört das Einbeulen von Rohren unter äußerem Ueberdruck in der elementaren Auffassung als allseitig gedrückter Kreisring. Im Bauwesen handelt es sich häufig um die Stabilität von Bogenbrücken. Das Problem des kreisförmigen Bogens wurde von R. Mayer[6]) für verschiedene Randbedingungen und Belastungen behandelt. In seinem Buche: Die Knickfestigkeit[7]) gibt Mayer die Lösung für den gelenkig gelagerten und den eingespannten Bogen und berichtet über Modellversuche an einem Bogen von 180 cm Stützweite und 24 cm Pfeilhöhe, welche eine sehr gute Uebereinstimmung mit den theoretischen Formeln erkennen ließen. F. Bleich[8]) untersucht in einer umfangreichen Arbeit auch die Stabilität biegungssteifer gebrochener Stabzüge.

3. Stabilität des geraden und krummen Stabes gegen räumliche Verzerrung. Wenn die Mittellinie eines Stabes sich beim Knickvorgang in eine Raumkurve verwandelt, so bezeichnet man diesen Vorgang nach Prandtl[9]) nicht als Knicken, sondern als Kippen. Beim geraden Stab ist das Kippen durch die Torsionssteifigkeit bestimmt, der krumme Stab dagegen kann auch bei unendlich großer Torsionssteifigkeit kippen. Die Kippsicherheit des einfachen Balkens für verschiedene Belastungen und Randbedingungen hat bereits Prandtl in seiner Dissertation untersucht.

---

[1]) H. Kayser, Die Knickversteifung doppelwandiger Druckquerschnitte. Der Eisenbau, 1910.

[2]) Krohn, Beitrag zur Untersuchung gegliederter Stäbe, Zentralblatt der Bauverwaltung, 1908, S. 559.
R. Mayer, Zur Knickfestigkeit gegliederter Stäbe, Zeitschr. des österr. Architekt.- u. Ing.-Vereins, 1914, Heft 13.

[3]) K. Bernhard, Engerer Wettbewerb um die Erbauung einer Straßenbrücke bei Köln Z. d. V. d. I. 1913, S. 1170.

[4]) R. Mayer, Die Knickfestigkeit, S. 111 u. f.

[5]) J. Ratzendorfer, diese Zeitschr. 1, 1921, S. 47 bis 61.

[6]) R. Mayer, Ueber Elastizität und Stabilität des geschlossenen und offenen Kreisbogens, Zeitschrift für Math. u. Phys. 1912, S. 206.

[7]) R. Mayer, Die Knickfestigkeit, S. 143.

[8]) F. Bleich, Die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen, Der Eisenbau, 1919, Nr. 2, 4, 6 und 8.

[9]) L. Prandtl, Kipperscheinungen, Dissertation 1899.
H. Reißner, Stabilität der Biegung, Sitzungsberichte der Berliner math. Gesellschaft.

Eine Nachlese der von Prandtl noch unerledigten Kippfälle rührt von Dinnik[1]) her. Dinnik behandelt unter anderem den Balken mit einer Einzellast, welche nicht in der Mitte angreift, sowie Lasten, welche ihren Angriffspunkt nicht in der Balkenmittellinie, sondern höher oder tiefer haben. Die Kipperscheinungen an Walzwerk- und Doppel-T-Profilen hat Timoschenko[2]) untersucht.

Ueber krumme Stäbe liegen nur wenig Untersuchungen vor. H. Hencky[3]) erhält eine einfache Formel für den Eintritt der Achterbildung bei einem allseitig gedrückten Kreisring.

Die Kippsicherheit gebrochener Stabzüge und flacher Bogen behandelt H. Hencky[4]) mittels der elastischen Gelenkkette. Es ergibt sich, daß bei einem gebrochenen biegungssteifen Stabzug oder einem krummen Stab auch Zugkräfte in der Sehnenrichtung Instabilität hervorrufen können. Eine praktische Anwendung können diese Untersuchungen finden auf die Kipperscheinungen an Bogenträgern und Rahmen. In einem dem Verfasser bekannt gewordenen Fall hat die Verkennung der Kippgefahr zu einer endlichen Deformation eben montierter Zweigelenkrahmen und zu einer nachträglichen Abänderung der ursprünglichen geplanten Konstruktion geführt.

Obgleich Kipperscheinungen seltener auftreten und meist nur mit bleibenden Deformationen, nicht mit Zerstörung des Bauwerkes endigen, können sie doch sehr gefährlich werden, weil die Herabsetzung der Knickgrenze bei kombinierten Kipp- und Knickproblemen eine sehr große ist.

Die Uebertragung der Tetmajerschen Formeln für den Fall der unelastischen Knickung ist hier nicht ohne weiteres möglich, weil man ja über den Einfluß der Torsion nichts Sicheres weiß. Arbeiten über diese Fragen scheinen noch nicht vorzuliegen.

4. Stabilität des geraden und krummen Stabes mit elastischer Querstützung. Das Hauptanwendungsgebiet für die Theorie des elastisch gestützten Stabes ist die Berechnung der Obergurte oben offener Brücken, wobei der obere versteifende Horizontalverband entweder ganz oder teilweise fehlen kann. Es ist also eigentlich eine Kipperscheinung, um die es sich hier handelt, man umgeht aber das Kippproblem, indem man den Obergurt unter dem Bilde eines elastisch quergestützten Stabes betrachtet. Die ersten grundlegenden Arbeiten über dieses Problem verdanken wir Zimmermann[5]).

Die Sicherheit der Obergurte oben offener Brücken hat Engesser[6]) unter vereinfachenden Bedingungen untersucht. Ersetzt man nämlich die in den Knotenpunkten durch die Pfosten bewirkte elastische Querstützung durch eine kontinuierlich verteilte im Durchschnitt statisch gleichwertige Stützung, und betrachtet die dem Knickfall entsprechende Ausbiegung als Sinuswelle, so muß die innere Arbeit wieder der äußeren Arbeit der Knickkraft gleich sein. Aus dieser Gleichsetzung ergibt sich die Knickkraft. Die unbekannte Länge der halben Sinuswelle ermittelt man aus der Bedingung, daß die Knickkraft ein Minimum werden muß. Die Kraft des elastischen Widerstandes mißt man durch Anbringen der Krafteinheit am Pfosten und Ermittlung der Ausbiegung. Auch der Uebergang zur unelastischen Knickung läßt sich ebenso wie beim Stab durchführen.

Engesser hat später seine Ergebnisse auch durch Modellversuche[7]) an einem 1 m langen Flacheisenband geprüft, der Versuchsstab war dabei durch elastische Ständer gestützt, deren Abstand beliebig verändert werden konnte. Diese Versuche, die mit Spannungen innerhalb der Elastizitätsgrenze des Materials durchgeführt wurden, bildeten eine willkommene Bestätigung der Theorie.

Die Ansätze Müller-Breslaus[8]) sind wesentlich allgemeiner. Auf Grund der Theorie des mehrfeldrigen Stabzuges mit elastischen Einzelstützen ergibt sich die Knickbedingung

---

[1]) A. N. Dinnik, Ueber die Kipperscheinungen. Mitteilungen des donischen polytechnischen Instituts, 1913, Bd. II, Abt. II (in russischer Sprache).

[2]) Timoschenko, Sur la stabilité des systèmes élastiques; ferner Zeitschrift für Math. und Phys., 1910, S. 378: Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie.

[3]) H. Hencky, diese Zeitschrift, 1, 1921, 451 bis 455.

[4]) H. Hencky, Der Eisenbau, 1920, S. 438, Ueber die angenäherte Lösung von Stabilitätsproblemen im Raum.

[5]) H. Zimmermann, Die Knicksicherheit eines Stabes mit elastischer Querstützung, Berlin 1906; ferner Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der Berliner Akademie, 1905, 1907, 1909.

[6]) Engesser, Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken, Berlin 1893, Bd. II, S. 142.

[7]) F. Engesser, Versuche und Untersuchungen über den Knickwiderstand des seitlich gestützten Stabes. Der Eisenbau, 1918, S. 28.

[8]) Müller-Breslau, Graph. Statik der Baukonstruktionen, Bd. II, 2 Abt., Leipzig 1908, S. 309 u. f.

in Gestalt einer Determinante $n$ten Grades, wenn die Brücke n Felder besitzt. Einen unteren Näherungswert für die Knickkraft erhält Müller-Breslau, indem er in den Knotenpunkten der Gurtung Gelenke voraussetzt.

Mit der Berechnung der Druckgurte offener Bogenbrücken beschäftigt sich eine Arbeit von Briske[1]).

5. Die Stabilität ebener Platten. Bildet man einen Stab nach dem Gesichtspunkt der größtmöglichen Materialersparnis aus, so kommt man bald zu einem Gebilde, welches sich aus einzelnen plattenförmigen Stücken zusammensetzt. Es kann dann vorkommen, daß bei Druckbeanspruchungen der Querschnitt des Stabes eine endliche lokale Deformation erfährt. Hieraus ergibt sich für die Praxis die Notwendigkeit, über die Stabilität von Platten unter passend gewählten Randbedingungen Regeln aufzustellen.

Die Stabilität von T- und L-Profilen untersuchen Timoschenko und Reißner[2]).

Die Knickkraft der freigelagerten und der am Rand eingespannten Kreisplatte bei allseitig auf die Ränder wirkenden Druckkräften in der Mittelebene berechnet Dinnik[3]). Die Knicklasten verhalten sich etwa wie 1 : 3,5 für diese beiden Randbedingungen. In der gleichen Arbeit wird auch die Stabilität der elastisch gestützten Kreisplatte behandelt.

Für die gleichen Probleme, offenbar unabhängig von den russischen Arbeiten, findet auch H. Rode[4]) eine Lösung. Rode sucht außerdem in systematischer Weise aus der Lösung von Stabilitätsproblemen für plattenförmige Körper Anhaltspunkte zur Formgebung der Querschnitte im Eisenbau zu gewinnen. Die nötigen Unterlagen hierzu schafft er sich, indem er die rechteckige Platte für eine Reihe typischer Randbelastungen und Randbedingungen untersucht; auf diese Weise gelingt es, übersichtliche Regeln für die lokale Stabilität der üblichsten Profile zu gewinnen.

6. Die Stabilität von Schalen. Mit Rücksicht auf die analytischen Schwierigkeiten suchte man von jeher bei den Schalenproblemen die Ansätze weitgehend zu vereinfachen. Man unterscheidet im wesentlichen zwei Arten von Schalendeformationen, die Fältelung ohne Dehnung der Mittelebene und die allgemeine Deformation, welche sich in eine Verbiegung und in eine Verzerrung der Mittelebene zerlegen läßt.

Ein Beispiel für eine reine Fältelung ist die elementare Behandlung der Stabilität von Zylinderschalen bei äußerem Ueberdruck. Unter Berücksichtigung der Verzerrung der Mittelfläche haben diese Aufgabe zuerst R. Lorenz[5]) und Timoschenko unter vereinfachenden Annahmen behandelt. In aller Strenge auf Grund der Theorie dünner Schalen wurde der Fall eines auf äußeren Druck beanspruchten Zylinders von endlicher Länge von R. v. Mises[6]) untersucht. Aus einem Vergleich der Ergebnisse mit den vorliegenden Versuchen, soweit sie den angenommenen Randbedingungen gerecht werden, zieht v. Mises den Schluß, daß die gefundene Formel für den kritischen Druck ebenso zuverlässig ist wie die Eulersche Knickformel.

Für die Stabilität der Kugelschale und Kugelkalotte für symmetrische Lasten und symmetrische Form der Ausbiegung hat Zoelly[7]) Formeln aufgestellt, die von Schwerin[8]) genauer begründet wurden.

Erweiterungen von Stabilitätsuntersuchungen für Schalen und Platten für den Fall der unelastischen Knickung scheinen gegenwärtig nicht vorzuliegen. Die allgemeine Vorschrift, den Elastizitätsmodul E durch die entsprechende Neigung der Dehnungs-Spannungslinie zu ersetzen, kann allerdings auch hier zu einer Abschätzung führen, erwünscht wäre aber eine genauere Untersuchung, wie sie sie durch v. Kármán für den Stab durchgeführt wurde.

---

[1]) R. Briske, Die Knicksicherheit der Druckpunkte offener Bogenbrücken. Zeitschrift für Arch.- u. Ing.-Wesen, 1911, S. 238.

[2]) H. Reißner, Zentralblatt der Bauverwaltung 1909, S. 93.

S. Timoschenko, Zeitschrift für Math. und Phys., 1910, Heft 4. Mitteilungen der Techn. Hochschule zu St. Petersburg 1906 bis 1907. Mitteilungen der techn. Hochschule zu Kiew 1907 bis 1908.

[3]) A. N. Dinnik, Mitteilungen des donischen Polytechnischen Instituts, 1913, Bd. II, Abt. II (in russischer Sprache). Anwendungen der Besselschen Funktionen in der Elastizitätstheorie.

[4]) H. Rode, Beitrag zur Theorie der Knickerscheinungen mit Anwendungen im Eisenbau, Dissertation, Hannover 1916.

[5]) R. Lorenz, Z. d. V. d. I., 1908, S. 1706.

S. Timoschenko, Zeitschrift für Math. u. Phys. 1910, S. 376.

[6]) R. v. Mises, Z. d. V. d. I., 1914, S. 750.

[7]) R. Zoelly, Dissertation, Zürich 1915. Stabilität der Kugelschale.

[8]) Diese Zeitschr. 2, 1922, S. 81 bis 91.

7. Dynamische Stabilität. Von dynamischen Stabilitätsproblemen der Elastizitätstheorie ist bisher nur eines in der Technik von Bedeutung geworden. Es betrifft die Erscheinungen rotierender Wellen, die sich unter dem Einfluß der Fliehkraft ausbiegen. In einer kurz nach Drucklegung des Referats von v. Kármán erschienenen Arbeit von R. v. Mises[1]) sind einige bis dahin noch ungeklärte Unstimmigkeiten aufgeklärt worden. Ueber die neuere, sehr reichhaltige und vielseitige Litteratur auf diesem Gebiete unterrichtet die eben erschienene Neuauflage des Buches von Stodola über Dampfturbinen[2]).

Wir haben am Eingang unserer Betrachtungen bereits hervorgehoben, daß der Knickvorgang mit der Linearisierung der Probleme in einer gewissen Beziehung steht. Aus den linearen Differentialgleichungen gewinnt man niemals vollkommenen Aufschluß über die Verhältnisse an der Stabilitätsgrenze. Setzen wir in die Biegungsformel den richtigen Wert der Krümmung, so erhalten wir eine kubische Differentialgleichung, die auf elliptische Funktionen führt und die Gleichgewichtsformen für Lastgrößen, die nahe der Stabilitätsgrenze liegen, richtig darstellt. Oberhalb der kritischen Lastgrößen ist die Lösung der Differentialgleichung mehrdeutig[3]). Es ist also der nichtlineare Charakter einer Differentialgleichung geradezu eine Voraussetzung für die Möglichkeit des Vorkommens von Instabilität.

Auch in anderen Gebieten der Mechanik kann man von dieser Erkenntnis Gebrauch machen. In der Hydrodynamik ist bereits die Analogie der Turbulenzerscheinung mit einem Knickvorgang hervorgehoben worden. In der Tat liegt auch hier eine quadratische Differentialgleichung der Strömung zugrunde. Wenn es zum Zweck praktischer Anwendungen nützlich ist, die konkrete Seite der Dinge zu betrachten, so macht uns andererseits die Erkenntnis der mathematischen Zusammenhänge frei von den Beschränkungen des Einzelfalles und zeigt uns die invarianten Formen, in welchen sich alles Geschehen notwendig ausdrücken muß. 106

Bisherige Lösungen des Torsionsproblems.

Von **C. WEBER** in Hildesheim.

Zu dem zusammenfassenden Berichte über Lösungen des Torsionsproblems von Herrn Prof. Pöschl (Bd. 1, S. 312 bis 328) möchte ich einige Ergänzungen für die Näherungslösungen bringen.

1. Streifenquerschnitte. Bei einem langen rechteckigen Streifenquerschnitt von der Breite b erhält man mit Ausnahme der Streifenenden einen Spannungshügel mit einem Querschnitt, dessen oberer Rand die Gleichung

$$z_f = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

hat. Für lange nicht-rechteckige Streifenquerschnitte mit gerader Streifenachse und nicht sich sprungweise ändernder Breite werden die Querschnitte des Spannungshügels ebenfalls annähernd Parabelflächen mit obiger Gleichung für den Oberrand, nur ist der Wert b veränderlich.

So gilt für die lange Ellipse, deren Breiten gleich b gesetzt sind, bei einem Achsenverhältnis $m:1$

$$z_f = \frac{1}{1+\frac{1}{m^2}}\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2\right].$$

Die Pfeilhöhe der Parabeln ist hier etwas geringer als nach Gl. (1). Der Unterschied ist jedoch für genügend lange Ellipsen nur gering; für $m = 5$ z. B. nur 4 vH.

---

[1]) R. v. Mises, Ueber die Stabilität rotierender Wellen. Monatshefte für Math. und Physik, 22, 1911, S. 33 bis 52.

[2]) A. Stodola, Die Dampf- und Gasturbinen, 5. Aufl., Berlin 1922, S. 358 bis 397, 917 bis 937.

[3]) Vgl. z. B. C. J. Kriemler, Labile und stabile Gleichgewichtsfiguren vollkommen elastischer auf Biegung beanspruchter Stäbe, Karlsruhe 1902.

Wird der Stabquerschnitt durch zwei sich schneidende Gerade begrenzt, so daß sich ein unendlich langer Streifen mit dem Spitzenwinkel 2α bildet, so lautet die Gleichung des Spannungshügels:

$$\psi = \frac{1}{\cos 2\alpha}(x^2 \sin^2\alpha - y^2\cos^2\alpha) = \frac{\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2\right].$$

Auch hierfür kann für kleine Winkel α Gl. (1) genommen werden, da dann $\frac{\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha} \sim 1$ wird; so ist für $\alpha = 8^0$ . . . $\frac{\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha} = 1{,}02$.

Man begeht keinen zu großen Fehler, wenn man Gl. (1) für beliebige Streifenquerschnitte mit gerader Längsachse, die mit der X-Achse zusammenfalle, nimmt.

Erstreckt sich der Streifen von x_1 bis x_2, so gilt dann für das Moment die Näherungsgleichung:

$$M = {}^1/_3\, G\,\omega \int_{x_1}^{x_2} b^3\, dx.$$

Ist der Streifen an den Enden ähnlich dem Rechtecke stumpf abgeschnitten, so daß man die Endbreiten b_1 und b_2 erhält, so sind für den Abfall des Spannungshügels an den Enden als weitere Verbesserung der Momentengleichung die Glieder ${}^1/_3\, G\,\omega\, 0{,}315\, b_1^4$ und ${}^1/_3\, G\,\omega\, 0{,}315\, b_2^4$ abzuziehen. Die Gleichung für das Moment lautet somit:

$$M \sim {}^1/_3\, G\,\omega\left[\int_{x_1}^{x_2} b^3\, dx - 0{,}315\,(b_1^4 + b_2^4)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Für die Randspannung gilt mit Ausnahme der Streifenenden

$$\tau \sim G\omega b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Die Gl. (2) und (3) sind besonders für die Flansche der üblichen Walzeisenquerschnitte geeignet.

Auf für nicht zu stark gekrümmte Streifen kann Gl. (2) angewandt werden, nur ist nicht nach dx, sondern nach ds, entlang der gekrümmten Mittellinie des Streifens, zu integrieren. Die Randspannungen werden in der hohlen Seite etwas größer, in der erhabenen etwas geringer, als Gl. (3) ergibt.

2. Zusammengesetzte Querschnitte. Querschnitte, die aus Teilen (Rechtecken, Ellipsen usw.) bestehen, die durch Streifen verbunden sind, so daß jedoch nur einfach zusammenhängende neue Querschnitte entstehen, sind auf folgende Weise zu untersuchen. Für alle Teile, einschließlich der Verbindungsstreifen, sind die Momente und Spannungen als Funktion der Querschnittsabmessungen und des Ausdruckes $G\,\omega$ zu finden. Das Moment des zusammengesetzten Querschnittes ist dann annähernd gleich der Summe der Momente der Einzelteile, die Spannungen bleiben unverändert bis auf die Verbindungsstellen, in denen ein Uebergang der Spannungen aneinander stoßender Teile auftritt. Die Richtigkeit dieser Annäherung kann man sich durch das Prandtlsche Seifenhautgleichnis veranschaulichen.

Dies Verfahren ist von A. Föppl ausführlich für Querschnitte, die aus schmalen Rechtecken bestehen, dargelegt (A. Föppl: Ueber den elastischen Verdrehungswinkel eines Stabes, Sitzungsbericht der Bayer. Akad. d. Wissenschaften) und wird hiermit auch auf anders geformte, zusammengesetzte Querschnitte übertragen.

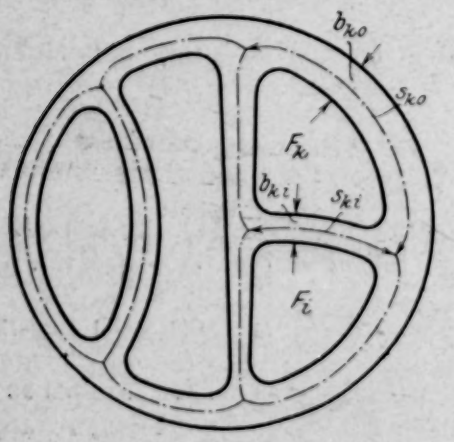


Abb. 1

Es lassen sich hiermit hinlänglich genau alle Walzeisenprofile untersuchen.

3. Aus Streifen gebildete, mehrfach zusammenhängende Querschnitte. Die sich hierbei bildenden Hohlräume werden nach dem hydrodynamischen Gleichnis von Flüssigkeitsmengen $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n$ umströmt. Nach dem Seifenhautgleichnis sind die ψ-Werte die Höhenunterschiede der Seifenhaut zwischen der äußeren Querschnittsbegrenzung und den inneren Begrenzungen der Hohlräume. Die Größe $G\omega\,\psi_k$ stellt die Schubkraft dar, die in einem Längsschnitt zwischen der $k$ten Höhlung und dem Außenraume des ge-

drehten Stabes von der Länge 1 in Längsrichtung wirkt. Zwischen benachbarten Hohlräumen wirkt entsprechend die Schubkraft $G\,\omega\,(\Psi_k - \Psi_i)$. Zeichnet man die Mittellinien der Streifen nach Abb. 1 ein, so bildet sich um jeden Hohlraum ein geschlossener Linienzug, für den $k$ten Hohlraum von der Länge $s_k = s_{ko} + \Sigma s_{ki}$, wo s_{ki} die Längen für benachbarte Höhlungen sind. Die umschlossene Fläche ist F_k, die Streifenbreiten b_{ko} bezw. b_{ki}, die mittlere Spannung, die annähernd gleich der Spannung der Mittellinien ist, wird:

$$\tau_{ko} = \frac{G\,\omega\,\Psi_k}{b_{ko}}, \quad \text{bezw.} \quad \tau_{ki} = \frac{G\,\omega\,(\Psi_k - \Psi_i)}{b_{ki}} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Man erhält dann für jede Höhlung die Gleichung:

$$\int_{(s_k)} \tau_{ko}\, d\,s = 2\,G\omega\,F_k$$

oder

$$\Psi_k \int_{(s_{ko})} \frac{d\,s}{b_{ko}} + \Sigma\,(\Psi_k - \Psi_i) \int_{(s_{ki})} \frac{d\,s}{b_{ki}} = 2\,F_k \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Aus diesen n in Ψ linearen Gleichungen lassen sich deren Werte berechnen. Die mittlere Spannung in den Streifen gibt hierauf Gl. (4).

Zur Berechnung der Spannungsverteilung über die Streifendicke schlage ich folgenden Weg vor. Die Differentialgleichung der Schubspannungslinien lautet in Polarkoordinaten:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -2.$$

Läßt man den Pol mit dem Krümmungsmittelpunkt einer Spannungslinie zusammenfallen, so wird das zweite Glied gleich Null, r gleich dem Krümmungshalbmesser ϱ, $-G\,\omega\,\frac{\partial \Psi}{\partial r}$ gleich der Schubspannung τ in Richtung der Spannungslinien und $-G\,\omega\,\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} = \frac{\partial \tau}{\partial n}$ gleich der Ableitung dieser Spannung senkrecht zur Spannungslinie. Die Gleichung wird:

$$\frac{\partial \tau}{\partial n} + \frac{\tau}{\varrho} = 2\,G\,\omega \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Bei Untersuchung der Spannungsverteilung in einem Normalschnitte eines Streifens sind bekannt die Krümmungshalbmesser der Begrenzungslinien, die Breite des Streifens $b = \int dn$ und die Schubkraft $\int_{(b)} \tau\, dn = \tau_{ki}\, b$. Sind die äußeren Begrenzungen des Streifens in der untersuchten Stelle gerade, so können sämtliche Spannungslinien als Gerade angenommen werden; man erhält:

$$\frac{\partial \tau}{\partial n} = 2\,G\,\omega,$$

$$\tau = \tau_{ki} + 2\,G\,\omega\,n \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Hier ist n entlang der Breitenlinie des Streifens von der Mitte ab gemessen. Die innere Spannung wird $\tau = \tau_{ki} - G\omega b$, die äußere $\tau = \tau_{ki} + G\,\omega b$. Man erhält eine Ueberlagerung der sich linear ändernden Schubspannung, die im geraden Streifen auftritt, mit der unveränderlichen Schubspannung τ_{ki}.

Für Streifen von unveränderlicher Breite fallen die Mittelpunkte des äußeren und inneren Krümmungshalbmessers zusammen; es wird $\varrho_a - \varrho_i = b$ und es kann $dn = d\varrho$ gesetzt werden. Die Lösung der Differentialgleichung (6) lautet dann:

$$\tau = G\,\omega\,\varrho + \frac{b\,[\tau_k - {}^1/_2\,G\,\omega\,(\varrho_a + \varrho_i)]}{\lg \varrho_a - \lg \varrho_i}\,\varrho^{-1} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Bei veränderlicher Breite fallen die Mittelpunkte der Krümmungshalbmesser nicht zusammen; man wird einen möglichst der Wirklichkeit entsprechenden Zusammenhang zwischen dn und $d\varrho$ aufstellen und die Lösung von Gl. (6) finden müssen.

Diese Gleichungen können auch zur Bestimmung der Randspannungen einfacher gekrümmter Streifen benutzt werden.

Das Moment des mehrfach zusammenhängenden Querschnitts wird

$$M \infty 2\,G\,\omega \left[\sum_1^n F_k\,\Psi_k + {}^1/_6 \int_{(s)} b^3\, d\,s \right] \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Das erste Glied entspricht dem Moment für den Fall, daß die Schubkräfte in den Mittellinien der Streifen vereinigt sind, das zweite Glied ist eine Ergänzung infolge der ungleichmäßigen Verteilung der Schubspannung über die Streifenbreiten. Für den einfachen Fall eines Kreisringes mit den Halbmessern r_a und r_i gibt Gl. (8) die Lösung

$$\tau = G\,\omega\,r.$$

Das Moment wird nach Gl. (9)

$$M = \frac{\pi}{2} G\,\omega\,(r_a^4 - r_i^4)\left[1 + {}^1/_6\,\frac{(r_a - r_i)^2}{(r_a^2 - r_i^2)}\right].$$

Die Formel für die Spannung entspricht der genauen Lösung; für das Moment ist der Fehler durch das zweite Glied der eckigen Klammer gegeben und beträgt für $r_a = 2\,r_i$ nur 3,3 vH.

Man wird mit Hilfe dieser Näherungsformeln mit Leichtigkeit fast alle Querschnitte der Praxis untersuchen können. 144

KURZE AUSZÜGE

Elastizität und Festigkeit.

Der Plattenbalken. Decken oder quer zu ihrer Ebene belastete Wandungen werden im Eisenbetonbau entweder durch Rippen versteift oder selbst als tragende Konstruktionen (als kontinuierliche Decken) armiert. Das Traggerüst der ersten Art von Konstruktion besteht aus den (meist rechtwinklig sich schneidenden) Systemen von Balken und Unterzügen, die mit der Decke eine zusammenhängende Masse bilden. Bei dieser, offenbar aus der Praxis der Holzbauweise übernommenen Konstruktion entsteht die Frage, welches Trägheitsmoment den Plattenbalken zuzuschreiben ist. Nach den im Eisenbetonbau geltenden Anschauungen wird ein Teil der anschließenden Decke auf der mitwirkenden Plattenbreite zu den Balken gerechnet und auf einer gewissen Breite zum Flansch des T-förmigen Profiles hinzugeschlagen. Dieser Anschauung liegt der Gedanke zugrunde, daß der Biegungssteifigkeit der Decke im großen und ganzen keine tragende oder nur eine sekundäre Wirkung im Tragen beizulegen ist. Die wahren Verhältnisse sind, wie man weiß, nicht von einfacher Art. Einzelheiten über das Verhalten der Plattenbalken haben Schüle, C. v. Bach u. a. durch zahlreiche Versuche näher erforscht. Die eigenartige Verkoppelung der Biegung eines Balkens mit der einer rechteckigen Platte erschwert das Problem. Dabei spielt die Rippenhöhe (im Verhältnis zur Plattenstärke) eine wesentliche Rolle. Das statische Verhalten des Plattenbalkens wird ein wesentlich verschiedenes sein, je nachdem die Höhe des Steges groß im Verhältnis zur Dicke der Platte oder von gleicher Größenordnung mit ihr ist.

R. Bortsch (Der Bauingenieur Bd. 2, S. 662—667, 1921) hat die Frage nach dem genaueren Spannungszustand eines Plattenbalkens aufgeworfen und zu beantworten versucht. Er sieht zunächst von der Biegungssteifigkeit der Platte ab und betrachtet einen Plattenbalken mit einer einzigen Rippe, an die sich eine unbegrenzte Decke anschließt. Aus diesem Gebilde schneidet er senkrecht zur Rippe einen Parallelstreifen heraus und untersucht dessen Spannungszustand, wenn 2 Kräftepaare ihn in der Ebene der Rippe zu verbiegen suchen. Anstatt aber, wie man erwarten würde, die Spannungen in der Übergangsfläche der Rippe und der Platte als unbekannte Funktionen des Abstandes in der Längsrichtung der Rippe einzuführen, nimmt er an, daß die Beanspruchung der Decke einfach vom Rande her durch zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete konzentrierte Kräfte erfolgt. Das Randwertproblem der anschließenden Platte dürfte unter den gemachten Voraussetzungen verwickelter liegen. Nimmt man die Richtung der Rippe als x Achse, die einer Seite des Streifens als y Achse ($x = a$ ist die zweite) an, so scheint mir in der Decke ein ebener Spannungszustand mit der Verschiebung $\eta = o$ auf $y = o$ vorzuliegen, der von einem System von Kräften herrührt, daß auf dieser Geraden derart anzubringen ist, daß die durch die entgegengesetzt gerichtete Verteilung von Kräften im anschließenden Balken hervorgerufenen Verschiebungen ξ in Richtung der Rippe punktweise mit den Verschiebungen der Platte übereinstimmen. Außerdem müssen die Seiten $x = o$ und $x = a$ in der Platte spannungsfrei bleiben und an den Balkenenden die beiden Momente angreifen. Bortsch bestimmt nur den Verlauf der Spannung σ_x, die von den zwei auf dem Rande der Decke angreifenden konzentrierten Kräften herrührt (eine Randwertaufgabe, die übrigens von A. Sommerfeld und von E. Melan in aller Strenge gelöst worden ist). Zu diesem Zweck geht er von der Lösung der Einzelkraft in der Halbebene aus und spiegelt diese etliche Male an den Kanten $x = o$ und $x = a$. Dadurch gelingt ihm die Befriedigung der Randbedingung für die Spannungskomponenten σ_x, in dem diese nach unbegrenzter Wiederholung des Vorganges schließlich auf den Rändern

verschwinden. Da der Verfasser die Schubspannungen τ seiner Lösung nicht verfolgt hat, scheint ihm jedoch entgangen zu sein, daß sich diese auf den Rändern nicht fortheben. Die parallelen Ränder der Platte werden, im Gegensatz zum Vorgehen der vorgenannten Autoren, nicht frei von Spannungen erhalten.

Bei der Ermittlung der Spannungen im Rippenbalken, der durch eine Einzelkraft verbogen wird, verdient eine als ein vorbereitendes Problem formulierte Aufgabe wegen ihres allgemeinen Interesses eine Erwähnung, die Bortsch näherungsweise löst. Es handelt sich um den ebenen Spannungszustand, den eine Einzelkraft in einer dünnen Scheibe erzeugt, wenn sie in einem gegebenen Abstand von der (einzigen) geradlinigen Begrenzung angreift und zu dieser senkrecht gerichtet ist. Nach einer einmaligen Spiegelung der Kraft an dieser Geraden können, wenn die ursprüngliche und die gespiegelte Kraft in einer unbegrenzten Platte angreifend gedacht werden, diesmal die Schubspannungen, die von der ersten herrühren, auf der Begrenzung zum Verschwinden gebracht werden. (Je nachdem die beiden Kräfte gleichsinnig oder gegenläufig gerichtet sind, heben sich entweder die Normalspannungen oder die Schubspannungen längs der Geraden auf, die zu der Verbindungsstrecke der beiden singulären Stellen in deren Mitte senkrecht steht.) Es verbleiben aber die Normalspannungen, und um diese ebenfalls fortzuschaffen, ist eine weitere Lösung erforderlich. Bortsch hat den ersten der beiden Schritte sich dadurch vereinfacht, daß er für die Spannungen, die von einer — in einem allseitig vom Material umschlossenen Angriffspunkt angreifenden — Einzelkraft herrühren, dieselben Formeln anwendet, die er zuvor für die in einem Randpunkt angreifende Kraft benutzte. Die Kombination von 2 Spannungszuständen von Michell von der erforderlichen Art

$$\sigma_x' = \frac{P}{\pi}\left[\frac{(3x^2 + y_2^2)\, y_2}{r_2^4} - \frac{(3x^2 + y_1^2)\, y_1}{r_1^4}\right]$$

$$\sigma_y' = \frac{P}{\pi}\left[\frac{(-x^2 + y_2^2)\, y_2}{r_2^4} - \frac{(-x^2 + y_1^2)\, y_1}{r_1^4}\right]$$

$$\tau' = \frac{P}{\pi}\left[\frac{(-x^2 + y_2^2)\, x}{r_2^4} - \frac{(-x^2 + y_1^2)\, x}{r_1^4}\right]$$

hätte ihm den ersten Teil des gewünschten Spannungszustandes streng liefern können. (Hier bedeuten x, y_1, $r_1^2 = x^2 + y_1^2$ die Koordinaten eines Punktes, gerechnet vom Angriffspunkt der Kraft P und x, y_2, $r_2^2 = x^2 + y_2^2$, die Koordinaten desselben Punktes, vom gespiegelten Angriffspunkt aus gerechnet.) Auf der Begrenzungsgeraden $-y_1 = y_2 = \eta$, wo $r_1 = r_2$, $\tau' = o$ sind, verbleiben die unerwünschten Spannungen

$$\sigma_y' = \frac{2P(-x^2 + \eta^2)\,\eta}{\pi (x^2 + \eta^2)^2}$$

die unter Anwendung eines weiteren ebenen Zustandes der Form

$$\sigma_x'' = \int_0^\infty A(\alpha)\,[-1 + \alpha(y_1 + \eta)]\, e^{-\alpha(y_1+\eta)} \cos \alpha x\, d\alpha$$

$$\sigma_y'' = -\int_0^\infty A(\alpha)\,[1 + \alpha(y_1 + \eta)]\, e^{-\alpha(y_1+\eta)} \cos \alpha x\, d\alpha$$

$$\tau'' = -\int_0^\infty A(\alpha)\,\alpha(y_1 + \eta)\, e^{-\alpha(y_1+\eta)} \sin \alpha x\, d\alpha$$

sich beseitigen lassen. Zur Bestimmung von $A(\alpha)$ steht die Bedingung zur Verfügung

$$y_1 + \eta = 0 \qquad \sigma_y'' = -\sigma_y',$$

aus welcher der Wert von

$$A(\alpha) = \frac{2P}{\pi}\,\alpha\,\eta\, e^{-\alpha\eta}$$

folgt.

Die Integrationen lassen sich nunmehr ausführen und liefern die zweite, von den Angaben von Bortsch abweichende Gruppe von Formeln,

$$\sigma_x'' = \frac{P}{\pi}(y_2 - y_1)\left[\frac{x^2 - y_2^2}{r_2^4} + \frac{(y_1 + y_2)(-3x^2 y_2 + y_2^3)}{r_2^6}\right]$$

$$\sigma_y'' = \frac{P}{\pi}(y_2 - y_1)\left[\frac{x^2 - y_2^2}{r_2^4} - \frac{(y_1 + y_2)(-3x^2 y_2 + y_2^3)}{r_2^6}\right]$$

$$\tau'' = \frac{P}{\pi}(y_2^2 - y_1^2)\,\frac{(-x^3 + 3x y_2^2)}{r_2^6}$$

durch welche im Verein mit der für die $\sigma'\,\tau'$ die Spannungen gegeben sind, die von einer in einem inneren Punkt der Halbebene angreifenden Einzelkraft herrühren, sofern die Kraft zu der Begrenzung senkrecht steht. (Der Abstand des Angriffspunktes von der Geraden ist $\eta = \frac{y_2 - y_1}{2}$.) Sie lassen erkennen, daß zur Befriedigung der Randbedingung auf einer freien Geraden außer dem Spannungszustand von Michell für die gegebene Kraft P, die in den beiden Formelgruppen enthaltene zweite zugeordnete Singularität (deren Ort der gespiegelte Angriffspunkt ist) hinzuzunehmen ist. Dieses Ergebnis dürfte vermutlich weiterer Verallgemeinerung in der Theorie der Spannungszustände von ebenen Scheiben und dünnen Platten fähig sein.

In der Arbeit von Bortsch werden weiter die Plattenbalken mit gleichförmig verteilter Belastung und mit mehreren Rippen näherungsweise behandelt.

In seinem **Beitrag zur strengen Lösung des Pilzdeckenproblems durch Fouriersche Reihen** weist Lewe („Bauingenieur", S. 111 bis 112, 1922) darauf hin, daß man den ungünstigsten Lastfall nicht bei einer gleichförmigen Belastung erhält, sondern in der streifenweisen Belastung. Die Überlagerung der Spannungszustände eines gleichmäßig belasteten, frei aufliegenden Plattenstreifens und der unbegrenzten, in einem rechteckigen Gitter von Punkten aufruhenden und gleichförmig belasteten Platte ergibt eine kontinuierliche Decke, die abwechselnd auf einem Streifen von Feldern zwischen zwei benachbarten Säulenreihen belastet und auf dem nächstfolgenden Streifen unbelastet ist. Bei dieser einseitigen Kraftwirkung ist jedoch die Wirkung der Einspannmomente, die unter Vermittlung

der meist viereckig ausgeführten Säulenköpfe von den Säulen auf die Decke übertragen werden, nicht berücksichtigt. Um auch ihren Einfluß zu bestimmen, berechnet Lewe die verbogene Gestalt einer Decke, die in kleinen viereckigen Flächen Lasten trägt, deren Wirkung innerhalb jedes Rechtecks einem Moment äquivalent ist. Sie ergibt sich ihm in einer einfachen und in einer Doppelsumme. Es ist ein erfreuliches Zeichen für die Fruchtbarkeit der Ansätze der Plattenlehre, daß sie bereits das Zusammenwirken der Decken mit den Säulen in ihren Einzelheiten zu erfassen gestatten. Ob freilich die angenommene einfache Verteilung des Druckes zwischen Säulenkopf und Decke im Falle eines Momentes den tatsächlichen Verhältnissen entspricht, werden weitere Untersuchungen oder Versuche zeigen müssen. Vielleicht wird hier aber noch ein anderer Weg zum Ziele führen können. Man braucht bei allen derartigen Aufgaben die genauere Druckübertragung an der Angriffsstelle der Last vorerst nicht anzunehmen, wenn man, wie dies auch sonst in der Statik geschieht, nur den Spannungszustand untersucht, der von der konzentrierten Kraft, oder im vorliegenden Fall — von den regelmäßig angeordneten konzentrierten Momenten herrührt. Mit den Spannungszuständen, die von den Einzelkräften oder Momenten oder den regelmäßig angeordneten Singularitäten herstammen, sind nämlich die Funktionen bekannt, denen sich die Spannungen aller in der Umgebung der Singularität möglichen äquivalenten Verteilungen mit der Entfernung von der Angriffsstelle rasch anschließen müssen. Sodann kann unabhängig von den Bedingungen, die der Platte auf ihrem Rand vorgeschrieben sind, nach Annahme des ungefähren Verlaufes der zu erwartenden Druckverteilung die lokale Abweichung der Spannungen abgeschätzt werden.

Plattenbiegung. S. Timoschenko („Bauingenieur, S. 51—54, 1922) bringt einige bemerkenswerte Anwendungen der Ansätze von M. Lévy auf die Biegungsaufgaben der allseitig unterstützten rechteckigen Platte durch eine Einzelkraft. Er knüpft zunächst an die Lösung des unendlich langen Plattenstreifens an, der die Grenzbedingungen $w = o$, $\Delta w = o$ erfüllt und behandelt im Anschluß an sie den Fall, daß die Last in einem Punkte der Symmetrieachse des Rechtecks angreift. Wenn sie im Mittelpunkt wirkt, vereinfachen sich die Formeln weiter und gestatten eine bequeme Angabe über die größte Biegungsbeanspruchung zu machen. Der Ansatz führt auch zum Ziele, wenn zwei gegenüberliegende Seiten des Rechtecks eingespannt sind. Hier werden die Durchbiegungen aus zwei Teilen zusammengesetzt, nämlich aus der Lösung, welche die Grenzbedingungen $w = o$ $\Delta w = o$ ringsum erfüllt und aus einer zweiten, die an dem einen Seitenpaar Momente besitzt. Die Zusatzlösung konvergiert aus leicht ersichtlichen Gründen sehr gut. Die Bemerkungen dürften die Möglichkeit zur Angabe weiterer Lösungen im Rechteck bieten.

Knickungserscheinungen. Eine zusammenfassende Bearbeitung der Knickungserscheinungen elastischer Systeme hat H. M. Westergaard in einem Bericht (Proceedings of the American society of civil Engineers, Vol 47 S. 455—533) der Gesellschaft amerikanischer Bauingenieure vorgelegt.

Er erörtert zunächst die Knickung gerader Stäbe unter der Wirkung gemischter, achsialer und seitwärts gerichteter Kräfte. Die Momentenkurven werden, soweit sie sich nicht unmittelbar anschreiben lassen, auf Grund von Entwicklung der Momentenlinien in Fouriersche Reihen erhalten. Im Anschluß an die Arbeiten von Bryan, Timoschenko und Reißner bespricht Westergaard die Knickung elastischer Platten am Beispiel der in ihrer Ebene nach zwei zu einander senkrechten Richtungen mit verschiedenen Spannungen gedrückten rechteckigen Platte. Er gibt für die Momente einer sowohl durch seitliche, als auch in ihrer Ebene wirkenden Kräfte, belasteten rechteckigen Platte Näherungsformeln an. Zu einem bemerkenswerten Falle der Knickung führt die Belastung eines Gitters von zwei senkrecht sich kreuzenden Scharen von Stäben in seiner Ebene. Da das Gitter zu einer Regelfläche deformiert werden kann, ohne daß in irgend einem der Stäbe Spannungen entstehen, besitzt es keine Steifigkeit gegenüber Schubwirkungen; es knickt, wenn die Enden der Stäbe gewisse Grenzbedingungen erfüllen, wie ein zweidimensionales System mit Biegungssteifigkeit, jedoch ohne Schubspannungen. Westergaard denkt dabei an eine Knickung einer Betonplatte mit den in ihrem Innern enthaltenen Eiseneinlagen. Die Knickung der unbewehrten, homogenen Platte bildet den einen, die des frei beweglichen Stabgitters den andern Grenzfall, der für die Verhältnisse der Verbundplatte in Betracht gezogen werden kann.

Der speziellen Erörterung schließt sich eine allgemeine,auf dem Prinzip der virtuellen Verrückungen elastisch deformabler Körper fußende an, in der die Entwicklung nach Orthogonalfunktionen hervortritt. Erwähnt sei ferner seine Unterscheidung einer astatischen Biegung (indifferentes Gleichgewicht, wenn das System unter seiner Knicklast steht) von einer orthostatischen Biegung (gewöhnliches, stabiles Gleichgewicht, Linearität zwischen den Durchbiegungen und den Kräften) und einer heterostatischen Biegung (gemischte Belastung). Bei dieser Untersuchung könnte es gelegentlich vorkommen, daß ein Biegungszustand der einen Art stetig in einen der anderen Art übergeht. Den Schluß der Schrift bilden einige Lösungen zur Plattenbiegung und zur Biegung eines Gitters von Stäben mit rechteckigen Maschen durch transversale Kräfte.

In seinem **Beitrag zur Härteprüfung** beschäftigt sich F. Waizenegger (Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens Heft 283, 1922, 32 S.) mit der Brinellschen Kugeldruckprobe. Seine Arbeit fußt zu einem guten Teil auf den Untersuchungen von Eugen Meyer und E. Kürth über Härteprüfung

und Härte, vor allem auf dem von E. Meyer angegebenen, für alle Stoffe gültigen Potenzgesetz nach dem die Belastung P, unter der eine Stahlkugel in einen plastisch deformablen Körper eindringt, proportional einer Potenz des Eindruckdurchmessers d

$$P = ad^n$$

ist, wobei die Zahl n zwischen 2,0 und 2,5 liegt und von der Vorbehandlung des Materials abhängt. Die Härtezahl H definiert Meyer durch Division des Druckes P durch die Fläche des Eindruckkreises, während sie Brinell bekanntlich auf die Fläche des Kugelabschnittes bezieht. Waizenegger verfolgt den Verlauf der Härtezahl nach dem Potenzgesetz mit der Kugelbelastung, sie bildet, in Abhängigkeit von dieser letzteren aufgetragen, eine der Spannungsdehnungslinie der bildsamen Stoffe ähnliche Kurve, die zuerst ansteigt, ein Maximum erreicht und dann abfällt. Statt der Spannung aus dem von Brinell festgelegten Kugeldruck von 3000 kg (bezw. 500 kg für weiche Stoffe), schlägt Waizenegger, einer Anregung von R. Baumann folgend, die Größthärtezahl in seinem Diagramm als Maß der Härte vor. Er berechnet diesen größten Wert mit Hilfe des Meyerschen Potenzgesetzes und findet, daß er von den beiden Stoffkonstanten a und n in verhältnismäßig einfacher Art abhängt. Um ihn aus einem Kugeldruckversuch zu berechnen, wird man erst diese Festwerte zu bestimmen haben. Er zeigt dafür zwei Wege, deren einer in dem bereits von Meyer vorgeschlagenen Auftragen der Beobachtungen auf Logarithmenpapier besteht, und deren zweiter Parameterdarstellungen von Kurvenscharen benutzt. Schließlich überträgt er die Untersuchungen von Kürth und Meyer über die Beziehungen der Streckgrenze und der Zugfestigkeit zur Härte auf die Größthärtezahl.

Stoßartige Beanspruchung. Von den Konstruktionsteilen des Motoren- und Automobilbaues wird gegenüber rasch veränderlichen Belastungen und Stößen eine ausreichende Widerstandkraft verlangt. Ihre Festigkeitseigenschaften hat W. Müller, Darmstadt, (Heft 247 der Mitt. über Forschungsarbeiten des V. d. I., 38 S., 1922) an der für die Anwendungen wichtigsten Gruppe von Materialien, die stoßartigen Beanspruchungen zu widerstehen vermögen, nämlich an den legierten Sonderstählen (Mangan-, Chrom-, Nickel- und Nickel-Chromstählen) untersucht. Er prüft ihre Schlagbiegefestigkeit und Schlaghärte, doch erstreckt sich seine Untersuchung auch auf ihre anderen Festigkeitseigenschaften. Die Schlagbiegefestigkeit wird an einem Kruppschen Dauerschlagwerk ermittelt, das die Schläge zählt, die ein durch diese auf Biegung beanspruchter Rundstab bis zu seinem Bruche aushält. Die Probestäbe hatten einen Durchmesser von 15 mm, erhielten in ihrer Mitte eine Rundkerbe von 1 mm Tiefe und 0,8 mm Halbmesser und ruhten mit 100 mm Stützweite auf. Auf den Stab fiel ein Gewicht von 4 kg aus 3 cm Höhe 86 mal in der Minute herab, nach jedem Schlag wurde der Stab um seine Achse um 180° gedreht. Außer der Schlagzahl, die den Bruch herbeiführt, ermittelte Müller die Zahl der Schläge, bei der die ersten Risse im Kerbgrund sich zeigten. Diese wurden durch eine Lupe aufgesucht.

Die Schlaghärte bestimmte er in einem Schlaghärteprüfer von Wilk. Dieser Apparat treibt eine kleine Stahlkugel (von 2,4 mm Durchmesser) durch einen Schlag nach plötzlicher Entspannung einer Feder in das zu untersuchende Stück. Gemessen wird nach Wilk die Tiefe des Eindruckes, nach Müller sein Durchmesser. Unter Schlaghärte versteht Wilk das Verhältnis der Schlagarbeit zum verdrängten Volum der Eindruckkalotte. Müller zieht es vor, diese Arbeit auf die Oberfläche der Kalotte zu beziehen. Er vergleicht diese Schlaghärte an den gleichen Probestücken mit ihrer Brinellschen Härte bei einer langsam veränderlichen (ruhenden) Belastung, die solange gesteigert wird, bis mit einer Stahlkugel von gleichem Durchmesser dieselbe Eindrucktiefe wie im Schlagversuch erreicht wird. Er berechnet das Verhältnis der Schlaghärte zur statischen Last und findet für die untersuchten Stahlsorten annähernd einen unveränderlichen Wert. Ob die geometrische Aehnlichkeit (im vorliegenden Falle Kongruenz) zweier Eindrücke, die durch einen Schlag, beziehungsweise durch ein langsames Eindringen einer Kugel entstanden sind, auch eine mechanische Aehnlichkeit des Fließvorganges um die Eindruckstelle im Material bedingt und wie der Zusammenhang der Eindruckkraft mit dem Eindruckweg von der Geschwindigkeit des Stoßes oder Versuches beeinflußt wird, hat der Verfasser nicht verfolgt. Einen großen Teil der Arbeit bildet eine vergleichende Darstellung von Verhältniszahlen aus den charakteristischen Größen des Zugversuches, als der Proportionalitäts-, der Streck- und der Bruchgrenze mit den Schlagbiegezahlen und der Schlag- und Brinellschen Härte, deren engere oder weitere Anwendungsmöglichkeit vom geringeren oder größeren Grad der Vollkommenheit abhängen wird, mit der diese Begriffe definiert sind. Den Dauerschlagversuchen legt der Verfasser den Wert einer technologischen Probe bei. Von der Schlaghärteprüfung erhofft er dagegen ein weiterer Verbreitung fähiges Verfahren.

Kohäsion, Härte, Zähigkeit. Eine treffliche Uebersicht über die drei Grundeigenschaften der Werkstoffe Kohäsion, Härte und Zähigkeit gewinnt man aus der technologischen Studie von P. Ludwik (Zeitschr. f. Metallkunde, 14. Jahrg., S. 101—110, 1922). Die Kohäsion ist der spezifischen Zugspannung gleich aufzunehmen, die die Trennung benachbarter Teile senkrecht zur Zugrichtung herbeiführt. Die Trennung durch Schubspannungen nimmt er vom Kohäsionsbegriff aus, was sich im wesentlichen mit der Unterscheidung des Trennungsbruches vom Verschiebungsbruch von Prandtl (Dresdener Naturforschervortrag) deckt. Die Bestimmung der

wahren Zerreißspannung aus einem Zugversuch bietet bei den dehnbaren Stoffen, wie den Metallen wegen der dem Bruch vorangehenden Einschnürung beträchtliche Schwierigkeiten, weil die Spannungsverteilung im Augenblick des Bruches weit entfernt von einer gleichförmigen ist. Er verweist auf die Mängel des Begriffes der auf den ursprünglichen Querschnitt bezogenen »Zugfestigkeit«, der bei näherem Zusehen keine bestimmte charakteristische Eigenschaft des Stoffes entspricht. Ueber die Härte sagt Ludwik, daß sie im Gegensatze zur Kohäsion leichter zu messen, als zu erklären sei. Mit der üblichen Definition der Härte als des Widerstandes, den ein Körper dem Eindringen eines andern entgegensetzt, wird man sich erst befriedigt erklären können, wenn es gelungen sein wird, diesen Widerstand auf den Spannungszustand im plastisch deformierten Teil und auf die bestimmenden Materialeigenschaften zurückzuführen. Die Mängel der in der Praxis eingebürgerten Härteprüfverfahren haben die Forschung angeregt, ihren Ursachen nachzugehen. Ludwik betont zwei derselben; eine der Hauptursachen für die verschiedenen Härtezahlen, die man an einem und demselben Stoff erzielt, ist die, daß das Metall je nach dem Grad seiner bereits vollzogenen plastischen Verformung verschieden bildsam geworden ist. Metalle, die sich stark verfestigen, wie beispielsweise Kupfer, widerstehen nach stärkerer Formänderung mit einem größeren Widerstand, erscheinen also härter als sie waren. Dieser Vorgang vollzieht sich aber während des Eindruckversuches selbst und läßt das Metall um so härter erscheinen, je stärker es deformiert wurde. Eine weitere Komplikation kommt wegen der geometrisch unähnlichen Eindrücke mit steigender Belastung hinzu. Diese läßt sich vermeiden, wenn man statt der Kugel einen Kegel aus hartem Material in das zu untersuchende eintreibt. Nach den Feststellungen von Ludwik bleibt das Verhältnis der Kraft durch die Eindruckfläche bei der Kegelprobe bei allen Belastungen dasselbe. Unter der Kegeldruckhärte versteht er das Verhältnis der Kraft zur Fläche des Eindruckkreises, wobei es gleichgültig ist, wie tief der Kegel in den Stoff eingetrieben wird. Bei den einschnürenden Stoffen besteht eine einfache Beziehung zwischen der Kugeldruckhärte von Brinell und der Zugfestigkeit, bei nicht einschnürenden nicht.

Um für die dritte Grundeigenschaft, die Zähigkeit, vergleichende Maßzahlen zu schaffen, bemühen sich die Technologen seit langem. Die Aufzählung der Reihe von Proben, die sie zu ihrer Bestimmung ersonnen haben, können wir hier übergehen, weil sich an ihnen kaum ein einwandfreier Maßstab ausbilden ließ. Der Grund liegt einerseits in der Mehrdeutigkeit, in der das Wort Zähigkeit in den Anwendungen benutzt wird, andererseits in den ziemlich verwickelten Vorgängen, die den Zähigkeitsproben zugrunde liegen. Ludwik nimmt lediglich die bis zur Zerstörung erreichbare Formänderung ohne Rücksicht auf die sie erzeugenden Kräfte oder Spannungen als die zu vergleichende Größe an. Er bemerkt aber, daß naturgemäß noch andere Einflüsse, um nur einen zu nennen, die Geschwindigkeit der Formänderung, zu berücksichtigen sein werden. Zur Kennzeichnung dieser Stoffeigenschaft schlägt er das Wort »Schmeidigkeit«, zu ihrer näherungsweisen Abschätzung eine sehr einfache neue Probe vor. Diese besteht darin, daß ein gehärteter Stahlkegel (Körner) nahe zum Rande einer rechtwinkeligen Körperecke so tief in den Stoff eingedrückt wird, bis ein Riß entsteht. Dabei bewegt sich die Körnerspitze seitwärts und der Rand weicht um einen kleinen Betrag aus. Das Maß der Schmeidigkeit entnimmt er irgend einem Verhältnis zweier charakteristischer Längen des entstandenen Wulstes, beispielsweise dem Verhältnis der größten Ausbauchung zur Entfernung der Körnerspitze von ihrem Rand, wobei diese Zahl von der Entfernung, in der die Spitze von der Körperkante angesetzt wurde, wegen der geometrisch ähnlichen Fließvorgänge unabhängig ist.

A. Nádai. 185

KLEINE MITTEILUNGEN

Aus dem Institut für angewandte Mathematik an der Universität Berlin. [1])

1. Die Bewegung des Dollarkurses seit 1918. Wer die fortlaufenden Nachrichten über den Stand des deutschen Geldwertes — etwa in Form des täglichen amtlichen Dollarpreises an der Berliner Börse — aufmerksam verfolgt, wird zunächst den Eindruck einer verwirrenden Mannigfaltigkeit regellos aufeinander folgender Zahlen gewinnen. Bei näherem Zusehen wird sich aber jedem die Erkenntnis erschließen, daß das dauernde Hin- und Herschwanken von einer einsinnigen Bewegung begleitet wird, die das Niveau der Schwankungen höher und höher hebt. Im Folgenden ist der Versuch gemacht, durch eine sachgemäße mathematische Analyse der Preiskurve des Dollars von November 1918 bis Juli 1922 die Trennung zwischen Grundbewegung und darüber gelagerten Schwankungen möglichst objektiv durchzuführen und die beiden Bestandteile der Bewegung ihrem Wesen nach zu kennzeichnen. Hierzu ist eine

[1]) Unter dieser Sammelüberschrift sollen von Zeit zu Zeit Mitteilungen über die Ergebnisse gelegentlicher, kleinerer Arbeiten, die innerhalb des Instituts ausgeführt werden und allgemeineres Interesse in Anspruch nehmen dürfen, zur Veröffentlichung gelangen.

Reihe von zum Teil grundsätzlichen Ueberlegungen nötig.

1. Die logarithmische Auftragung.

Will man den zeitlichen Verlauf eines Wechselkurses klar erfassen, so muß man als Funktion der Zeit nicht den ursprünglichen Kurs selbst, sondern seinen Logarithmus ansehen. Denn die Kurszahlen haben nicht als absolute Werte, sondern nur als Verhältniszahlen Bedeutung. Wenn man etwa in einer Kurve die Dollarpreise jeder Woche nebeneinander auftragen wollte, z. B. nacheinander die Zahlen 249, 310, 278, so würden die Höhenunterschiede der drei Punkte, nämlich + 61 und − 42, die Preisdifferenzen für einen Dollar darstellen, während die Geldwertschwankungen durch die beiden Verhältnisse 310:249 und 278:310 bestimmt werden. Die Schwankungen waren drei Jahre früher ebenso groß, wenn die betreffenden Zahlen für den Dollarpreis etwa 24,9, 31,0, 27,8 betrugen; diese aber würden bei der gewöhnlichen Darstellung 10mal kleinere Differenzen, nämlich + 6,1 und − 4,2 aufweisen. Ueberhaupt ließe sich ein natürlicher Maßstab gar nicht finden, der den ganzen Verlauf der Kursbewegung in der betrachteten Zeit, von etwa 10 ℳ für den Dollar Ende 1918 bis etwa 1000 ℳ in unseren Tagen, zur Anschauung bringen könnte, ohne daß dabei die Schwankungen der Anfangszeit völlig verwischt würden. Umgekehrt, wenn wir nicht den Dollarpreis in Mark, sondern den Markpreis in Dollar aufzeichneten, was offenbar genau ebenso berechtigt ist, so würden wir ein Bild erhalten, das den Anschein erweckt, als gäbe es heute so gut wie gar keine Schwankungen, da der Markpreis eine ganz kleine, kaum noch veränderliche Zahl sei.

Von allen diesen Schwierigkeiten und Nachteilen befreit man sich, wenn man die Logarithmen des Wechselkurses zu den (in natürlichem Maßstabe aufgetragenen) Zeiten aufträgt. Jetzt ist die Linie für den Dollarpreis in Mark identisch mit der für den Markpreis in Dollar, es kommt nur darauf an, ob man die Ordinaten von unten nach oben oder von oben nach unten mißt. Gleich große prozentuelle Schwankungen erscheinen im Bilde gleich ausgeprägt, gleichgültig zu welcher Zeit und auf welchem Kursniveau sie stattgefunden haben. Auf eine besondere Bedeutung dieses Umstandes wird noch später, Punkt 3, hingewiesen werden.

Unsere Abb. 1 zeigt zwei übereinander gezeichnete logarithmische Kurslinien, die für die 190 Wochen vom 18. November 1918 bis zum 8. Juli 1922 je das Maximum bezw. Minimum des Dollarpreises in Berlin darstellen[1]). Das Original der Abbildung ist auf Liniennetzpapier Nr. 373½ von Schleicher & Schüll in Düren gezeichnet worden. Die Kurswerte sind für die Zeit von Anfang 1920 bis zum Ende, den amtlichen Aufzeichnungen des Warenkurses für den Dollar an der Berliner Börse entnommen. Für die Zeit vom November 1918 bis Ende 1919 sind die Berliner amtlichen Kurse für den Schweizer Franken verwandt und mit dem amtlichen Dollarkurs an der Züricher Börse umgerechnet worden. Diese Umrechnung erfolgte in einfachster Weise mit Hilfe der Rechenwalze »Loga-Kalkulator«, die ein für derartige Berechnungen sehr zweckmäßiges Gerät darstellt, da sie mit der Einfachheit des gewöhnlichen Rechenschiebers eine Genauigkeit von 5 Stellen verbindet. Aus den Aufzeichnungen der sämtlichen in einen Wochenabschnitt von Montag bis Sonnabend fallenden Kurse wurden dann je der größte und der kleinste Wert ausgewählt und jeder von diesen in das Kurvenblatt eingetragen[1]).

Schon ein flüchtiger Blick auf die beiden nahe benachbarten Linien läßt erkennen, daß es sich hier um eine von Anfang bis zum Ende fast geradlinig fortschreitende Grundbewegung handelt, die von wenigen großen und vielen kleinen Schwankungen überlagert wird.

2. Die lineare und parabolische Ausgleichung.

Es liegt nahe, nach dem in der Ausgleichsrechnung üblichen Verfahren die sogenannte plausibelste Gerade zu suchen, die sich im Sinne der Voraussetzungen der Ausgleichsrechnung den Beobachtungslinien am besten anschmiegt. Zu diesem Zwecke wurden zunächst die beiden in Abb. 1 gezeichneten Linien für die Rechnung durch eine einzige ersetzt, indem das arithmetische Mittel aus dem Kleinst- und Höchstwerte jeder Woche gebildet und zu diesem der Logarithmus aufgesucht wurde. Mit diesen 190 Zahlen der fünfstelligen Logarithmen der mittleren Kurse hat Herr Jenne auf einer elektrischen Additions-Rechenmaschine die Ausgleichsrechnung durchgeführt. Das Ergebnis der Rechnung kommt in der Geraden zum Ausdruck, die in Abb. 1 eingezeichnet ist. Ihr Anfangswert entspricht einem Dollarpreis von 10,14 ℳ, ihr Endwert einem solchen von 298,95 ℳ. Die Neigung der Geraden wird gemessen durch einen Anstieg von $0{,}00773 = \log 1{,}018$ pro Woche. Dies besagt also, daß der deutsche Geldwert sich in den vier Jahren durchschnittlich um 18 vT pro Woche verschlechtert hat oder (da $39 \cdot 0{,}00773 \sim 0{,}303 = \log 2$) in je ¾ Jahren auf die Hälfte gesunken ist. Nach der in der Theorie des radioaktiven Zerfalls üblichen Ausdrucksweise ist also neun Monate die »Halbwertzeit« des deutschen Geldes. Aus $52 \cdot 0{,}00773 = 0{,}4020 = \log 2{,}52$ gewinnt man die mehr geschäftsmäßige Fassung des Ergebnisses: Wer sein Geld in Dollar anlegt, hat, in Mark gerechnet, eine

[1]) Die Werte für die drei Wochen vom 10. bis zum 29. Juli sind in dieser, wie in Abb. 3 ebenfalls eingetragen, aber bei den Rechnungen nicht berücksichtigt.

[1]) Für die Woche vom 15. bis zum 20. März 1920, für die eine amtliche Notierung nicht vorliegt, ist das arithmetische Mittel der Nachbarwochen angenommen worden.

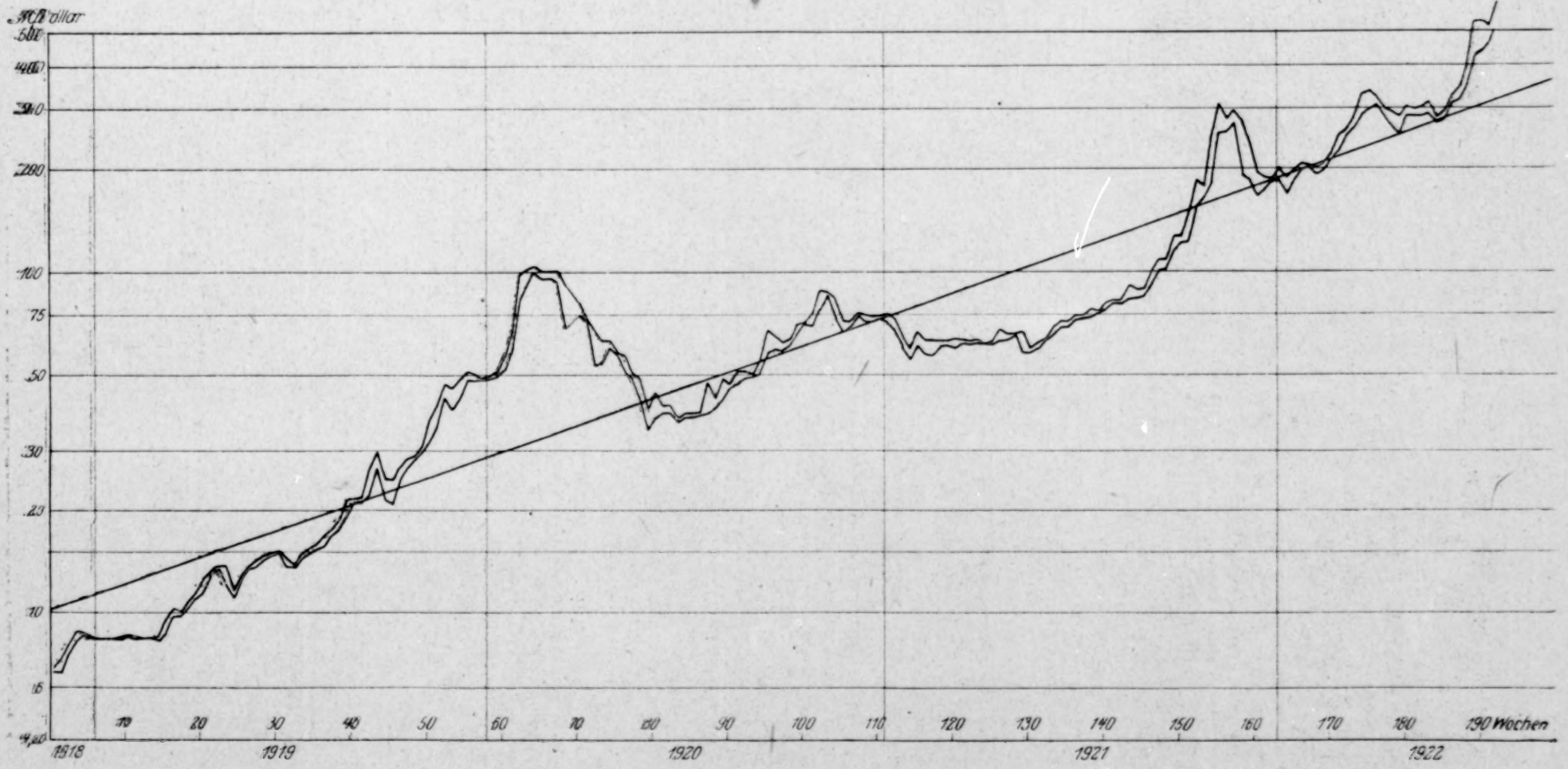


Abb. 1

Logarithmische Darstellung des Dollarpreises in Mark vom 18. November 1918 bis 29. Juli 1922. Größt- und Kleinstwerte jeder Woche und Ausgleichsgerade.

jährliche Verzinsung mit 152 vH. Natürlich gilt diese Aussage nur, wenn man über alle Schwankungen hinwegsieht.

Zwischen den eingezeichneten Beobachtungslinien und der die Ausgleichung darstellenden plausibelsten Geraden erkennt man weitgehende Abweichungen. Insbesondere ist es auffallend, daß der tatsächliche Anfangswert weit unterhalb, der tatsächliche Endwert weit oberhalb der Geraden zu finden ist. Es war von vornherein von besonderem Interesse, zu fragen, zu welchem Ergebnis eine höhere Ausgleichung führen würde. Wenn man nämlich statt der plausibelsten Geraden die plausibelste Parabel zweiten Grades aufsucht, so muß man statt einer konstanten Steigung eine mit der Zeit veränderliche erhalten; aus den Vorzeichen der Veränderung muß sich ein Schluß darüber ergeben, ob die Verschlechterung unseres Geldwertes mit der Zeit zunimmt oder abnimmt, d. h. schneller wird oder langsamer. Herr Jenne hat auch diese weitere Rechnung durchgeführt, wobei sich ergeben hat, daß der oben genannte durchschnittliche Koeffizient die Verschlechterung, nämlich die Zahl 0,00773, eine ganz geringfügige Vergrößerung aufweist, u. zw. um 0,0000033 pro Woche. Wenn man die dieser parabolischen Ausgleichung entsprechende plausibelste Parabel konstruiert, so zeigt sich, daß sie von der in Abb. 1 eingetragenen plausibelsten Geraden nur ganz unmerklich abweicht. Der Unterschied würde nur wenige Millimeter Senkung der Linie in der Mitte und Hebung an den Enden bedeuten. Man muß daraus schließen, daß die Verminderung des Geldwertes einen im Durchschnitt des betrachteten Zeitraumes ziemlich stabilen Charakter besitzt.

Eine Ausgleichung dritter Ordnung würde, wie man leicht sieht, das letzte Resultat, nämlich das durchschnittliche Konstantbleiben der Geldentwertung, in ganz bestimmter Weise modifizieren. Man erkennt aus dem Verlauf der Linie, daß in der ersten Hälfte des Beobachtungs-Zeitraumes vom Beginn bis zur Mitte die Verschlechterung des Geldwertes sich verlangsamt hat, während sie sich von der Mitte bis zum Schluß in den letzten beiden Jahren in gleichem Maße beschleunigt. Dadurch erklärt sich, daß die Aenderung des Verschlechterungs-Exponenten im Durchschnitt null ist. Eine zahlenmäßige Berechnung des entscheidenden Koeffizienten in der Ausgleichung dritter Ordnung ist nicht vorgenommen worden, da vielleicht das vorliegende Beobachtungsmaterial zu so genauer Analyse nicht berechtigt, und insbesondere im Hinblick auf die sehr ungünstigen Aussichten, die das Ergebnis eines solchen Rechnungsverfahrens zweifellos eröffnen würde.

3. Die Schwankungen.

Die Trennung der Kursveränderung in Grundbewegung und darüber gelagerte Schwankungen hat nur den Sinn, daß man in der ersteren die Wirkung des dauernden wirtschaftlichen und politischen Zustandes, in dem wir uns befinden, erblickt, während man die Schwankungen vorübergehenden Einflüssen zuschreibt. Diese können entweder wirkliche Störungen des Wirtschaftszustandes sein oder nur vermeintliche, d. h. also auf mehr oder minder unberechtigte Aenderungen in der Beurteilung der Lage zurückzuführen sein; darin kommt auch die Wirkung einer gewissen »Trägheit« zum Ausdruck, die eine einmal eingetretene Bewegung nicht so schnell zum Aufhören bringt, wie ihre Ursachen zu Ende gehen.

Bei der Beurteilung der Schwankungen muß man selbstverständlich die großen und langsamen, sozusagen säkularen Störungen, von den kleinen und schnellen Schwingungen unterscheiden. Unsere Abb. 1 läßt erkennen, daß, wenn nur die großen Abweichungen betrachtet werden, der ganze Beobachtungszeitraum in fünf ungefähr gleich große Abschnitte von etwa je neun Monaten Dauer zerfällt. Im ersten Abschnitt setzt der Dollarpreis mit etwa 7 ℳ weit unter dem Niveau der Ausgleichslinie, das 10 ℳ beträgt, ein und nähert sich ihm in langsamer Steigung bis August 1919. Von hier an fährt die Steigerung erheblich rascher fort, nachdem der Dollarpreis die Ausgleichslinie bei etwa 22 ℳ überschritten hat, erreicht im Februar 1920 einen Höchstwert von 100 ℳ und fällt von hier ziemlich steil zur Ausgleichslinie ab, die bei 40 ℳ am Ende der zweiten Periode im Mai 1920 wieder erreicht wird. Der Abfall von Februar bis Mai 1920 ist die einzige stark ausgeprägte Geldwertverbesserung im ganzen Zeitraum. Wenn später, in der vierten Periode, die Kurslinie wieder unter die Ausgleichsgerade sinkt, so wird das nicht mehr durch eine tatsächliche Verbesserung, sondern durch ein zeitweises Konstantbleiben des Kurses bewirkt. Vorher, in der dritten Periode von Mai 1920 bis Januar 1921, verläuft die Kurslinie dauernd fast in Uebereinstimmung mit der Ausgleichslinie. Es folgt der vierte Zeitraum von Januar bis September 1921, in dem die Kurslinie einen regelmäßigen Bogen unterhalb der Ausgleichslinie vollführt, anfangs fast wagerecht bleibend, dann ansteigend bis zum Schnitt mit der Ausgleichslinie bei etwa 150 ℳ. In dem letzten, seit Herbst 1921 bestehenden Zeitraum verläuft die Linie dauernd oberhalb der Ausgleichsgeraden, wobei sie schon zweimal kleinere Schwingungen vollführt hat und sich jetzt offenbar zum dritten Mal einem temporären, besonders großen Höchstwert nähert. Es ist jedoch zu beachten, daß die Erhebungen über die Ausgleichslinie, selbst für einen Dollarpreis von über 700 ℳ am Ende des Beobachtungszeitraumes noch erheblich geringer sind, als die im Februar 1920, wo einem rechnungsmäßigen Wert von 35 ein tatsächlicher bis etwa 100 gegenüberstand. Erst ein Wochendurchschnitt von etwa 1000 ℳ entspricht dem Schwankungsverhältnis vom Februar 1920; der in der letzten Augustwoche[1]) erreichte von etwa 1500 übersteigt ihn in viel gerin-

[1]) Zusatz bei der Korrektur.

gerem Maße, als es der naiven Auffassung erscheint: Die Fortsetzung der Linie in unserer Abb. 1 erhebt sich bis Ende August um 28,5 mm über die Gerade, während sie im Februar 1920 schon 23 mm Ueberschuß aufwies.

Neben den großen säkularen Schwankungen, die, wie wir sehen, nur etwa fünfmal ihr Vorzeichen wechseln, sind die außerordentlich zahlreichen, bei weitem regelmäßigeren kleinen Schwingungen in unserem Bilde zu erkennen. Ein näheres Eingehen auf diese Schwingungen hätte wenig Bedeutung, da man bedenken muß, daß in ihnen ja nur ein willkürlich herausgegriffener Teil der gesamten Schwankungen zum Ausdruck kommt. Würden wir nämlich statt der Wochendurchschnitte die täglichen Kurse aufgezeichnet haben, so würde jedes in unserer Darstellung noch monotone Linienstück selbst wieder eine Reihe von Schwingungen aufweisen. Ebenso gut könnte man auch, darüber hinausgehend, die wechselnden Kursnotierungen innerhalb eines Tages berücksichtigen und bekäme nochmals überlagerte Schwankungen. So weist in der Tat die Bewegung des Geldwertes einen ähnlichen Charakter auf, wie die dem Physiker geläufige Brownsche Bewegung, bei der man unter steter Verschärfung der Beobachtungsmittel eine stete Vermehrung und Verdichtung der Zickzackwege feststellt.

Wie auf der einen Seite die Grundbewegung allein interessant ist für denjenigen, der den Verlauf der wirtschaftlichen Verhältnisse des Landes kennen lernen will, so interessiert sich auf der andern Seite der Börsen-Praktiker nur für die wechselnden, vor allem für die kleineren Schwankungen. Denn die Kenntnis der Grundbewegung dient jedenfalls nicht dem Valutagewinn, höchstens der Möglichkeit einer Erhaltung des Geldwertes. Aller Gewinn durch Valutaveränderungen beruht auf den Schwankungen, deren vorherige Kenntnis allerdings bedeutende Gewinnmöglichkeiten eröffnen würde. Wenn dies auch nur von sehr »theoretischem« Wert sein mag, so soll hier die Bemerkung nicht unterdrückt werden, in welcher Weise sich der größtmögliche Valutagewinn aus der Kenntnis der logarithmischen Kurslinie berechnen läßt. Nimmt man an, daß jemand in den letzten vier Jahren nur je einmal in der Woche in der Lage war, sein Geld zu wechseln und zwar jeweils zu dem von uns berechneten Durchschnittskurs, so konnte er, bei bester Ausnutzung jeder Schwankung, in Mark soviel gewinnen, als die Summe der einzelnen positiven Anstiege der Kurslinie ausmacht. In Dollar gerechnet, würde der Gewinn gleich sein der Summe der absteigenden Linienteile, und diese Summe ist gleich der früheren, vermindert um die Differenz zwischen Endwert und Anfangswert, wie es ja natürlich sein muß. Der Mathematiker wird hier eine anschauliche Darstellung des Begriffes »totale Variation« einer Kurve finden. Es liegt nur an der logarithmischen Auf-

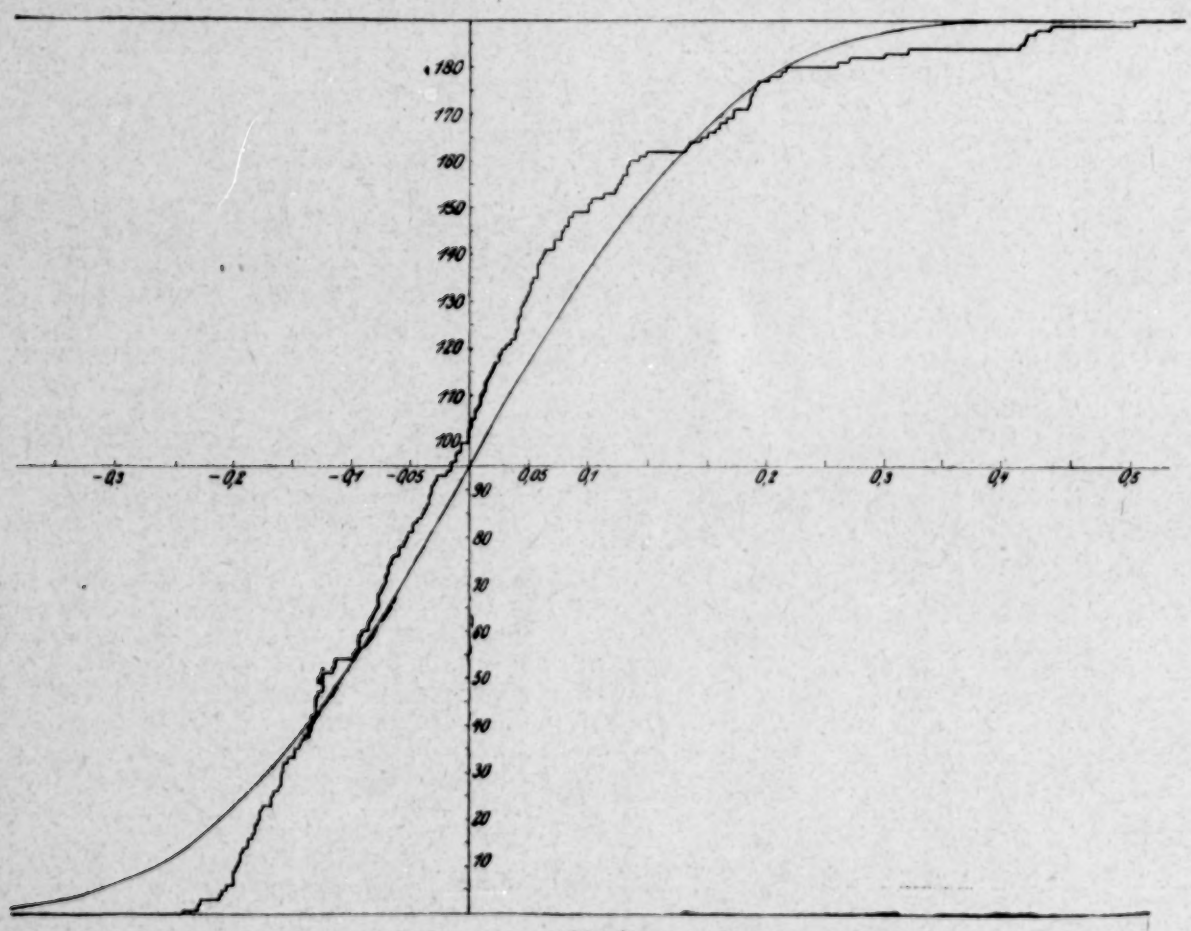


Abb. 2

Häufigkeitskurve der Kursschwankungen.

tragung, daß eine solche Deutung möglich ist.

Die Durchführung der Rechnung mit den früher erklärten Wochenmitteln ergibt als Summe der aufsteigenden Linienstücke die Zahl 3,318, als Summe der absteigenden die Zahl 1,473 entsprechend einer Differenz zwischen Ende und Anfang gleich 1,845. Die Zahlen stellen die Logarithmen der Gewinnfaktoren dar und diese selbst sind 2080 bezw. 29,7, entsprechend einem Quotienten von 70,0, d. h.: Der alleswissende Dämon, der sämtliche Kursschwankungen richtig voraussieht, hätte — bei höchstens einmaligem Umwechseln in der Woche — eine Mark vom November 1918 in 2080 ℳ im Juli 1922 verwandelt, bezw. einen Dollar von 1918 in 29,7 Dollar heute; er hätte dazu 34 mal wechseln müssen. Wie außerordentlich groß die entsprechenden Zahlen würden, wenn man nicht nur die Wochendurchschnittskurse, sondern etwa Tageskurse zugrunde legte, läßt sich in keiner Weise abschätzen.

4. Standpunkt der Fehlertheorie.

Wenn man die Berechtigung der linearen oder parabolischen Ausgleichung vom Standpunkt der mathematischen Statistik oder der Fehlertheorie aus prüfen will, so muß man untersuchen, ob die Abweichungen zwischen den beobachteten und den ausgeglichenen Werten wenigstens annähernd einem Gaußschen Fehlergesetz entsprechen. Dieser Ueberprüfung dient die Abb. 2. Hier findet man zunächst eine Treppenlinie, die in 190 Stufen von der Abszissenachse bis zur Höhe 190 ansteigt. Jeder einzelne Anstieg liegt an einer Stelle, dessen Abszisse gleich ist einem der 190 Differenzwerte zwischen einer Einzelbeobachtung und dem betreffenden ausgeglichenen Wert. Wenn die Differenzen dem Gaußschen Gesetz annähernd genügen, muß die Treppenlinie annähernd die Gestalt der Linie des Gaußschen Integrals aufweisen, wenn dieses in den richtigen Maßstäben aufgezeichnet wird. Der Ordinatenmaßstab ist durch die Höhe 190 gegeben, der Abszissenmaßstab oder die sogenannte Präzision der Beobachtungsreihe rechnet sich in bekannter Weise aus der Quadratsumme der Fehler. Die Durchführung ergibt für unsern Fall ein mittleres Fehlerquadrat von 0,0293 und diesem Werte entsprechend ist die Gaußsche Linie in Abb. 2 eingetragen. Man sieht, daß die Abweichungen zwischen dieser Linie und der Treppenlinie zwar erheblich sind, aber im großen Ganzen eine Uebereinstimmung erkennen lassen.

Vom Standpunkt der Fehlertheorie aus gewinnt man auch eine Beurteilung des Ausmaßes der zu erwartenden größten Schwankungen. Legt man den von v. Bortkiewicz[1]) berechneten Zusammenhang zugrunde, so entspricht einem mittleren Fehler von $\sqrt{0{,}0293} = 0{,}171$ bei 200 Beobachtungen eine erwartungsmäßige Variationsbreite von etwa 0,94, also eine im Mittel zu erwartende Höchstschwankung von $\pm 0{,}47$. Da $0{,}47 \sim \log 3$, stimmt dies auffallend gut mit dem Umstand überein, daß die bisherige Höchstabweichung von der Ausgleichslinie, im Februar 1920, eine dreifache Ueberschreitung war Die Ueberschreitung in der letzten Augustwoche[2]) ist eine 4,3fache, also logarithmisch etwa 30 vH größer als die größte bis dahin beobachtete.

[1]) Sitzungsber. d. Berliner math. Ges. 21, 1922, S. 3 bis 11.

[2]) Zusatz bei der Korrektur.

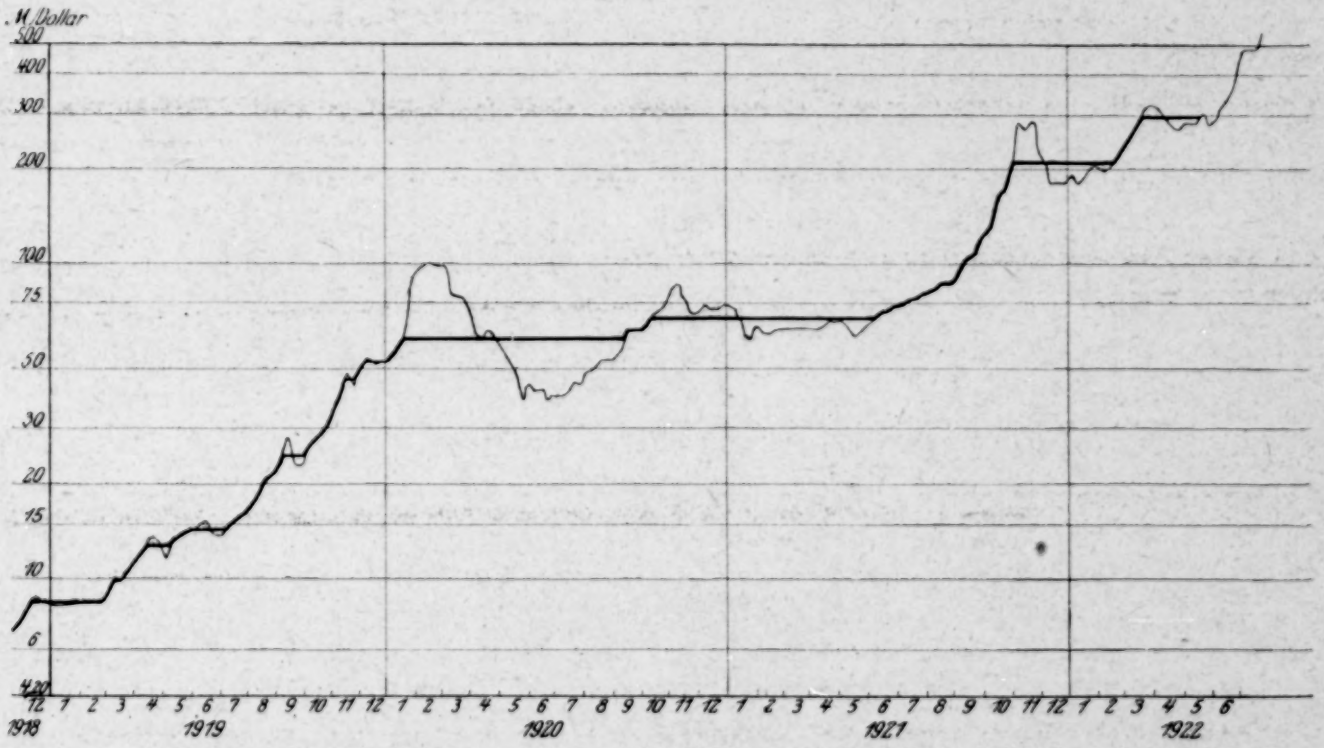


Abb. 3

Wochendurchschnitte und monotone Ausgleichslinie.

5. Beste Ausgleichung durch eine monoton ansteigende Linie.

Die Ausgleichung durch eine Gerade oder eine Parabel wird mancher als etwas Willkürliches empfinden. Mag dies berechtigt sein oder nicht, jedenfalls wird man ein Bedürfnis haben, zu untersuchen, ob sich nicht unabhängig von einer so engen Annahme, über die Trennung von Grundbewegung und Schwankungen etwas sagen läßt. Nun scheint es eine sehr allgemeine Forderung zu sein, diejenige Linie zu suchen, die vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt monoton ansteigt (d. h. so verläuft, daß sie nirgends abnimmt) und dabei unter allen so beschaffenen Linien diejenige ist, die sich der gegebenen am besten anpaßt. Als Maß der Anpassung wird man hier, wie immer, die Quadratsumme oder das Integralquadrat der Abweichungen nehmen. Es zeigt nun eine einfache analytische Ueberlegung, daß die beste monotone Approximation sich zusammensetzt aus Teilen der aufsteigenden Stücke der ursprünglichen Linie und wagerechten Geraden; diese letzteren liegen jeweils so, daß sie gleich große Flächenstücke zwischen sich und der ursprünglichen Linie einschließen. (Man erkennt nämlich sofort, daß dort, wo die monotone Ausgleichslinie von der auszugleichenden verschieden ist, die erstere nur eine wagerechte Tangente haben kann, und daraus folgt sofort das übrige.)

Unsere Abb. 3 zeigt neben der Kurve der logarithmierten Wochendurchschnitte die in dieser Weise bestimmte monotone Ausgleichslinie. Man erkennt, daß dieses Verfahren dazu führt, in anschaulichster Weise zwischen »wesentlichen« und »unwesentlichen« Teilen der gesamten Kursbewegung zu unterscheiden. Ueber viele einzelne Schwankungen schreitet die Ausgleichslinie hinweg, ohne von ihnen überhaupt berührt zu werden. Man kann in groben Zügen sagen, daß von dem jetzt gewonnenen Standpunkt aus betrachtet, die gesamte Kursbewegung in drei Perioden zerfällt, in einen Anstieg des Dollarpreises von 7 ℳ bis 60 ℳ in der Zeit von November 1918 bis Januar 1920, in eine Periode des Konstantbleibens bei ungefähr 65 ℳ von Januar 1920 bis Mai 1921 und drittens ein neuerliches Ansteigen von 65 ℳ aufwärts seit Juni 1921.

6. Schlußfolgerungen.

Wenn wir die wichtigsten Schlüsse, zu denen die mathematische Analyse der Kurslinie Veranlassung gibt, zusammenfassen wollen, so haben wir etwa folgendes zu sagen:

1. Die gesamte Bewegung des Geldwertes läßt sich in eine gleichförmige Grundbewegung und darüber gelagerte Schwankungen zerlegen; in der Grundbewegung kommt der jeweilige wirtschaftliche Zustand zum Ausdruck, in den Schwankungen die wechselnde Beurteilung der Lage und die Wirkung sonstiger vorübergehender Einflüsse.

2. Die Grundbewegung läßt sich mit großer Annäherung in der logarithmischen Darstellung als eine Gerade auffassen, woraus hervorgeht, daß der wirtschaftliche Zustand, d. i. das laufende Defizit unserer Gesamtwirtschaft, im Durchschnitt in den vier Jahren unverändert geblieben ist.

3. Die Neigung der die Grundbewegung darstellenden Geraden weist eine Verschlechterung des Geldwertes auf die Hälfte in je neun Monaten auf. Es mag hier besonders hinzugefügt werden, daß eine dauernd konstante Unterbilanz der nationalen Wirtschaft nicht einen unveränderlich schlechten Valutastand, sondern dauernde Verschlechterung mit unveränderlichem Exponenten bedeutet.

4. Die großen Schwankungen von langer Periode erheben sich, in Uebereinstimmung mit den Berechnungen vom Standpunkt der Fehlertheorie, über die Linie der Grundbewegung stellenweise bis zum dreifachen des Wertes der letzteren. Die Steigerung des Dollarkurses in den letzten Wochen des Beobachtungszeitraumes, die erheblich über dem Ausgleichswert von etwa 300 liegt, erreicht noch nicht den relativen Wert, der den Verhältnissen im Februar 1920 entspricht.

5. Da man annehmen darf, daß die wirtschaftlichen Zustände sich nicht in kurzem Zeitraum ändern können, bezw. daß einmal vorhandene Verhältnisse lange Zeit nachwirken, so kann man mindestens für ein Jahr voraussagen, daß das Maß der Verschlechterung, wie es unter 3. genannt wurde, noch einige Zeit fortbestehen wird; d. h. also, daß für Ende 1923 mit einem mittleren Dollarstand von mindestens 1300 zu rechnen ist, wobei das unter 4. angegebene Maß der Schwankungen mit zu berücksichtigen, mithin ein Höchststand von 4000 ℳ als im Bereich der durchschnittlichen Erwartung liegend anzunehmen ist.

6. Da sich durch die ganze Untersuchung die ausschlaggebende Bedeutung des Logarithmus des Wechselkurses ergeben hat, gelangt man auch zu einer Abschätzung, des Verhältnisses zwischen der Lage der deutschen Mark, der österreichischen Krone und der russischen Rubels; danach hat die deutsche Mark, wenn man nur die Grundbewegung in Betracht zieht, mehr als die Hälfte des Weges der österreichischen Krone und etwa ein Drittel des Weges des russischen Rubels bereits zurückgelegt.

7. Nachträglicher Zusatz. Die bis zur letzten Augustwoche eingetretene äußerlich ganz abnorm scheinende Kursbewegung tritt aus dem Rahmen des Bisherigen nicht sehr stark heraus. Es bleibt abzuwarten, ob die am Schlusse von Pkt. 3 des Textes angedeutete ungünstigere Auffassung der Grundbewegung unvermeidlich sein wird. Die Fortführung der Linien in Abb. 1 bis Ende August würde eine starke Erhebung über die Ausgleichsgerade ergeben, die zwar steiler, aber nicht wesentlich höher verläuft als die im Februar 1920.

2. Zeichnerische Ermittlung von Fourier-Koeffizienten. Das kürzlich wieder veröffentlichte[1]) Hermannsche Verfahren zur angenäherten Berechnung der Koeffizienten einer Fourierschen Entwicklung

$$f(x) = a_0 + \Sigma\,(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\,, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx\,, \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

bringt die Lösung der gesamten Aufgabe in die Form einer so einfachen Rechenvorschrift, daß die Ausführung auch durch mathematisch nicht vorgebildete Kräfte möglich wird. Natürlich kann dies nur auf Kosten der Genauigkeit und vor allem der Zuverlässigkeit geschehen und es lassen sich leicht Fälle angeben, bei denen die starre Anwendung der Vorschrift, die nur ganz bestimmte Funktionswerte berücksichtigt und sonst alles außer Betracht läßt, zu ganz falschen Ergebnissen führt[2]).

Im folgenden soll ein einfaches zeichnerisches Verfahren mitgeteilt werden, das Herr Prof. v. Mises in seinen Vorlesungen zu entwickeln pflegt. Es hat neben der Einfachheit der Ausführung den Vorzug größerer Genauigkeit und Zuverlässigkeit, weil in beliebigem Maße auch der Verlauf der Kurve im Innern der einzelnen Intervalle berücksichtigt werden kann.

Die Konstruktion von a_0 geschieht nach dem bekannten Verfahren der zeichnerischen Quadratur.

Die Formeln für a_n und b_n schreibe ich in folgender Weise

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\int_{x=0}^{2\pi} f(x)\,d\,(\sin nx),$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}\int_{x=0}^{2\pi} f(x)\,d\,(\cos nx).$$

Ich könnte also auch hier das gewöhnliche Verfahren der zeichnerischen Quadratur verwenden, wenn ich für jeden Koeffizienten eine besondere Kurve aufzeichnen wollte, bei der der Funktionswert $f(x)$ in den Punkt mit der Abszisse $\sin nx$ bezw. $\cos nx$ zu liegen kommt. Diese Verschiebungen, die natürlich viel zu umständlich wären, lassen sich aber gänzlich umgehen.

---

[1]) Diese Zeitschr. 2, 1922, S. 153 bis 156.

[2]) Ein solches Beispiel hat Herr Dr. Röver in einer Zuschrift an den Herausgeber mitgeteilt. Wenn man für die Funktion $f(x) = 1 + \cos 10x$ mit den Herrmannschen Schablonen rechnet, erhält man $a_{10} = 2$, während richtig $a_{10} = 1$.

Ich will zunächst allgemein zeigen, wie

$$\int_{x=0}^{2\pi} f(x)\,d\,(\cos nx),$$

also im wesentlichen b_n zu konstruieren ist. Das Intervall $0 \ldots 2\pi$ wird in m gleiche Teile geteilt, und in jedem Intervall ein »mittlerer« Funktionswert $f_1, f_2, \ldots$ bestimmt; eine genauere Vorschrift hierzu wird später gegeben werden. Ein Polstrahlensystem mit der Polhöhe h liefert die Richtungen (Abb. 1)

$$\operatorname{tg}\varphi_\nu = \frac{f_\nu}{h} \qquad (\nu = 1, 2 \ldots . m)\,.$$

Auf der Peripherie eines Kreises vom Radius h markiere ich die Punkte mit den Bögen $nx_1, nx_2, \ldots$ (in Abb. 2 ist $n = 2$, $m = 8$ gewählt) und ziehe durch jeden Punkt die Senkrechte zur Anfangsrichtung. Ferner konstruiere ich im Punkte O anfangend einen Polygonzug, dessen Seiten parallel zu den Polstrahlen sind und dessen Ecken auf den Senkrechten durch $nx_1, nx_2 \ldots$ liegen. Die Stücke, die auf den Vertikalen abgeschnitten werden, sind

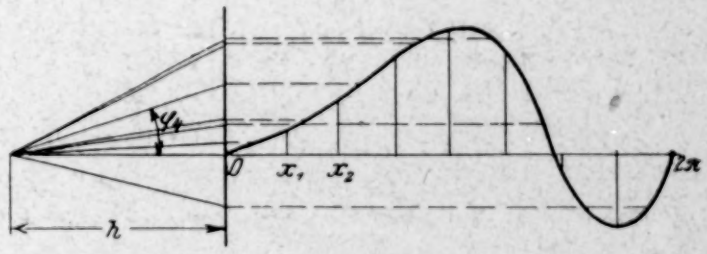


Abb. 1

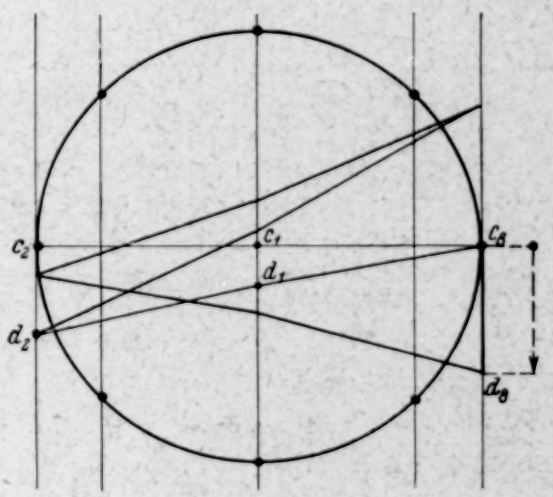


Abb. 2

$$\overline{c_1 d_1} = \operatorname{tg}\varphi_1\, h\,(\cos nx_1 - \cos nx_0)$$
$$= f_1\,(\cos nx_1 - \cos nx_0)$$
$$\overline{c_2 d_2} = \overline{c_1 d_1} + f_2\,(\cos nx_2 - \cos nx_1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\overline{c_m d_m} = \sum_\nu f_\nu\,(\cos nx_\nu - \cos nx_{\nu-1})\,.$$

Wenn die »mittleren« Funktionswerte richtig gewählt worden sind, ist der letztere Ausdruck identisch mit

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, d(\cos nx) = -n\pi b_n .$$

Bleibt nur noch die Bestimmung der »mittleren« Funktionswerte f_ν. Bei genügend engen Intervallen wird man in der Regel einen passend zwischen dem größten und kleinsten Funktionswert gelegen Wert schon nach dem Augenmaß genügend genau abschätzen können. Darüber hinaus dient die folgende Ueberlegung. Für die (nicht wirklich gezeichnete) Kurve der von x nach $\cos nx$ verschobenen Funktionswerte könnte ich das gewöhnliche Verfahren der zeichnerischen Quadratur anwenden. Hier hätte ich also im Sinne der Simpsonschen Regel, wenn — was im allgemeinen genau genug sein wird — der Bogen im Intervall als Parabel 2. oder 3. Grades angesehen werden darf, in der Intervallmitte 2/3 der Höhe zwischen Sehne und Kurve zu nehmen (Abb. 3).

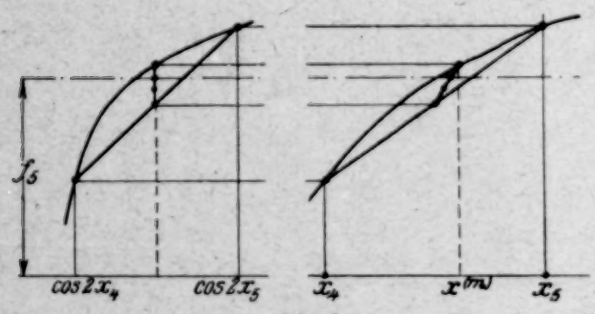


Abb. 3

Wie kann ich aber diese Höhe aus dem unverschobenen Bilde von $f(x)$ erhalten? Dazu habe ich nur in Abb. 2 den Wert $x_\nu^{(m)}$ abzulesen, der der Intervallmitte in dieser Figur $^1/_2(\cos nx_\nu + \cos nx_{\nu-1})$ entspricht, und dann in Abb. 1 den Funktionswert in diesem Punkte aufzusuchen. Dabei genügt es natürlich, das Verhältnis, in dem der Kreisbogen zwischen $nx_{\nu-1}$ und nx_ν geteilt wird, nach Augenmaß in die Abb. 1 (s. auch Abb. 3) zu übertragen. Die Höhe der Sehnenmitte ergibt sich als arithmetisches Mittel der End-Ordinaten auf der Sehne der ursprünglichen Kurve in der Mitte des Intervalls $x_{\nu-1}$, x_ν. Ich brauche also nur in den Intervallen, bei denen die einfache Schätzung nicht auszureichen scheint, den Höhenabstand zwischen der Sehnenmitte und dem aus dem Kreisbild zurückübertragenen mittleren Kurvenpunkt zu dritteln, um eine Lösung mit der Genauigkeit der Simpsonschen Formel zu erhalten.

Die Konstruktion der a_n erfolgt ganz analog, nur daß jetzt ein Polygon aus den Senkrechten zu den Polstrahlen zu zeichnen ist, und zwar zwischen den Horizontalen, die durch die Punkte der Kreisperipherie in Abb. 2 hindurchgehen.

In Abb. 4 ist die vollständige Durchführung der Konstruktion für eine willkürlich angenommene Kurve zu ersehen. Das gesamte Intervall der gegebenen Linie, das in der Originalzeichnung die Länge $l = 24$ cm hat, ist in 24 gleiche Teile geteilt und zu jedem Teilintervall, soweit das Kurvenstück darin nicht als völlig geradlinig gelten kann, der Sehnenmittelpunkt bestimmt. Zunächst werden zur Bestimmung von a_0 die mittleren Höhen der einzelnen Teilintervalle in der gewöhnlichen Weise nach der Simpsonschen Regel bestimmt und durch Wagerechte auf die Ordinatenachse übertragen; links von dieser ist im Abstande $h = 10$ cm ein Pol gewählt, von dem die Polstrahlen nach den angezeichneten Punkten der Ordinatenachse gezogen werden. Durch Parallelziehen zu den Polstrahlen entsteht der in der Abbildung ersichtliche Seilzug über der Strecke l, dessen Endordinate A_0 das h:l-fache des ersten Kaeffizienten a_0 darstellt. In unserem Beispiel ist daher

$$A_0 = 2{,}95\text{ cm} \qquad a_0 = 1{,}23.$$

Zur Konstruktion der weiteren Koeffizienten dient der in der Ecke links unten gezeichnete Kreis vom Halbmesser $r = 5$ cm, dessen Peripherie in 24 gleich Teile geteilt ist. Durch jeden Teilpunkt ist in genügender Länge je eine wagerechte und eine lotrechte Gerade gezogen. Die einzelnen Seilzüge, die zur Berechnung der Koeffizienten $a_1, a_2 \ldots; b_1, b_2 \ldots$ führen, haben ihre Eckpunkte auf diesen Geraden und zwar die Koeffizienten $a_1, a_2 \ldots$ auf den wagerechten, die $b_1, b_2 \ldots$ auf den lotrechten. Bevor man den ersten dieser Seilzüge zeichnet, muß man sich davon überzeugen, ob die bei Bestimmung von a_0 benutzten mittleren Höhen der einzelnen Intervalle bezw. die von ihnen abhängigen Polstrahl-Richtungen noch brauchbar sind, oder eine kleine Korrektur in dem früher erklärten Sinne erhalten müssen. An unserem Beispiel ist zu sehen, in welcher Weise beim ersten Teilintervall durch Halbieren des Abstandes der ersten zwei Lotrechten und Zurückgehen auf den betreffenden Punkt in der ursprünglichen Kurve eine Verbesserung der ersten Polstrahl-Richtung vorgenommen wurde. In der Regel wird eine solche Korrektur höchstens für die Intervalle nötig sein, die in der Nebenfigur ganz rechts oder ganz links bezw. ganz oben oder ganz unten liegen. Jedesmal, wenn man zu einem neuen Koeffizienten übergeht, muß man von Neuem überlegen, ob und für welche Intervalle etwa eine Korrektur erforderlich ist. Diese Arbeit kann niemals eine sehr umständliche werden, da sich die Notwendigkeit der Aenderung nur in Ausnahmefällen ergibt.

Bei der Bestimmung von b_2 benutzt man für die Ecken des Seilzuges die gleichen Lotrechten wie bei b_1, läßt aber jetzt jede zweite aus, ebenso werden bei b_3 je zwei ausgelassen usw. Zu beginnen ist jedesmal bei der ersten Geraden rechts, der letzte Punkt des Seilzuges liegt jedesmal auch auf dieser Geraden, wobei man naturgemäß bei b_1 einmal, bei b_2 zweimal, bei b_3 dreimal usw. über das Intervall $2r$ hin- und zurückgegangen ist. Der letzte Seilzug besteht jedesmal aus lauter Strecken, die über die ganze Intervallbreite $2r$ hinüberzu-

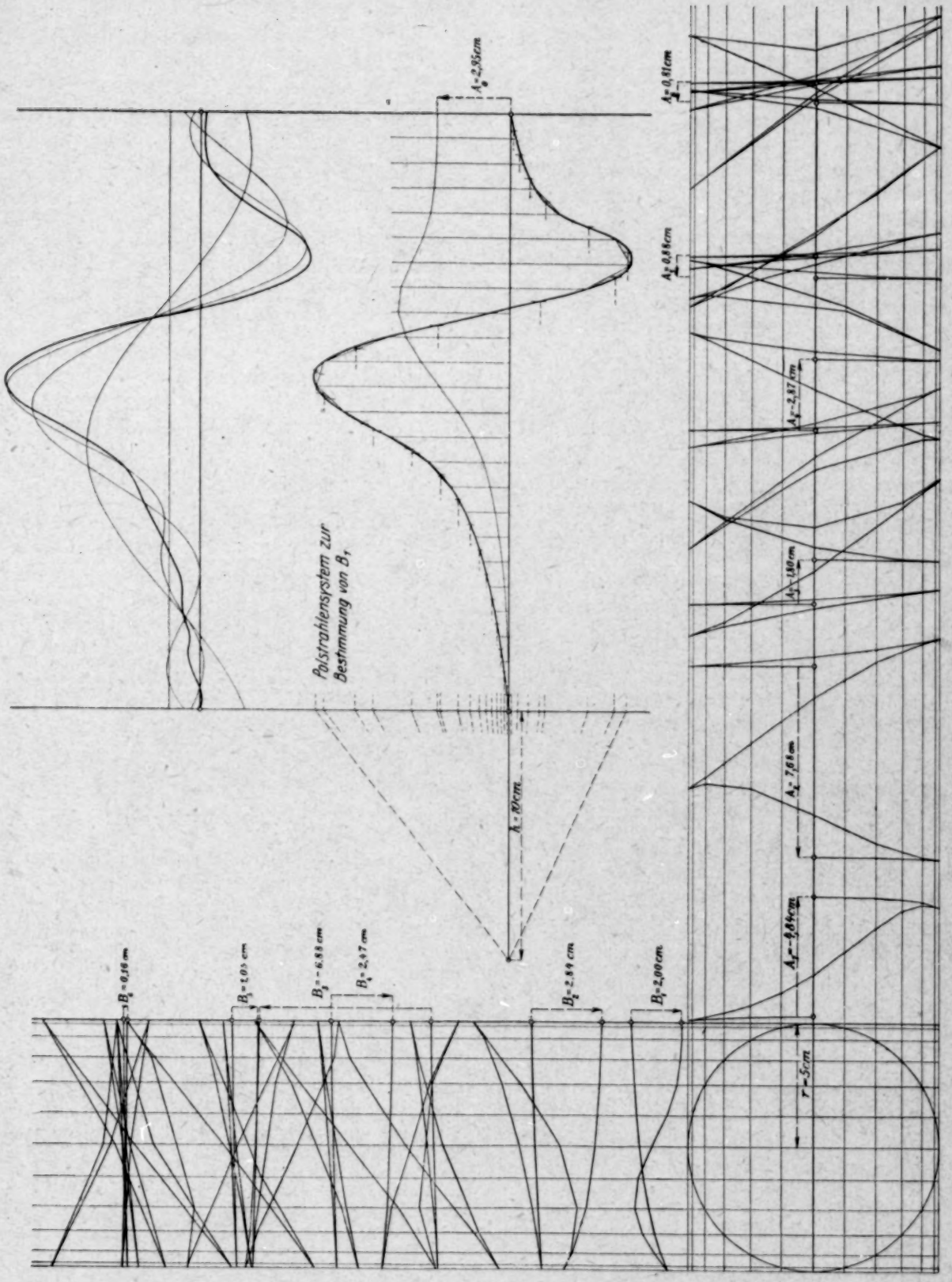


Abb. 4. Zeichnerische Ermittlung der ersten 13 Fourier-Koeffizienten.

ziehen sind. Der Abstand zwischen dem Anfangs- und Endpunkte jedes Seilzuges mit dem Verhältnis $r:h$ multipliziert liefert dann den gesuchten Wert für das $n\pi$ fache des betreffenden Koeffizienten. Dabei ist als Vorzeichenregel zu beachten, daß ein unter dem Anfangspunkt liegender Endpunkt positives b, ein oberhalb des Anfangspunktes liegender Endpunkt negatives b bedeutet. Die Abstände zwischen Anfangs- und Endpunkt werden in cm abgelesen, mit $h:r=2$ multipliziert und durch das betreffende Vielfache von π dividiert, wofern man nicht vorzieht, den Faktor π ein für allemal herauszuheben. Die in der Konstruktion abgelesenen Abstände B und die daraus bestimmten Koeffizienten b sind folgende:

$B_1 =$	2,00 cm	$b_1 =$	1,27
$B_2 =$	2,84 »	$b_2 =$	0,90
$B_3 =$	− 6,88 »	$b_3 =$	− 1,46
$B_4 =$	2,47 »	$b_4 =$	0,39
$B_5 =$	1,05 »	$b_5 =$	0,13
$B_6 =$	0,16 »	$b_6 =$	0,02

Die Konstruktion der Koeffizienten $a_1, a_2 \ldots$ erfolgt mit Hilfe der Seilzüge, die auf dem unteren Teil der Abb. 4 erkennbar sind, jedesmal bei der mittleren Wagerechten beginnen, von da nach oben fortschreiten, sich dann abwärts wenden und schließlich von der untersten Wagerechten wieder nach der Mitte zurückgehen. Die einzelnen Strecken des Seilzuges sind den betreffenden Polstrahlen nicht parallel, sondern zu ihnen senkrecht zu ziehen. Der Abstand zwischen Anfangs- und Endpunkt, die jetzt beide auf der mittleren Wagerechten liegen, liefert wieder mit $h:r$ multipliziert das $n\pi$ fache des betreffenden Koeffizienten. Als Vorzeichenregel gilt, daß ein links vom Anfangspunkt liegender Endpunkt positives a, ein rechts vom Anfangspunkt liegender Endpunkt negatives a bedeutet. Die abgelesenen Strecken A und die darus berechneten Koeffizienten a sind folgende:

$A_1 =$	− 4,84 cm	$a_1 =$	− 3,08
$A_2 =$	7,68 »	$a_2 =$	2,45
$A_3 =$	− 1,80 »	$a_3 =$	− 0,38
$A_4 =$	− 2,87 »	$a_4 =$	− 0,46
$A_5 =$	0,88 »	$a_5 =$	0,11
$A_6 =$	0,81 »	$a_6 =$	0,09.

Die Konstruktion läßt unmittelbar erkennen, wie weit man bei einer gegebenen Teilung des Hauptintervalles mit der Berechnung der Koeffizienten gehen kann. Denn offenbar ist es unzulässig, über die äußeren Begrenzungslinien der Seilzüge mit einem Seilstrahl hinwegzugehen. Daraus folgt, daß man mit 24 Teilen nur bis zu dem 6. Koeffizienten gehen kann, allgemein das Vierfache des höchsten Koeffizienten-Index als Intervallzahl nehmen muß. Man kann aber, und dies ist ein besonderer Vorteil des zeichnerischen Verfahrens, sobald sich am Schlusse der Berechnung die Notwendigkeit herausstellt, noch weitere Koeffizienten zu suchen, dies ohne weiteres tun, indem man jetzt eine Halbierung der Teilentervalle vornimmt und mit deren Hilfe die höheren Koeffizienten in der gleichen Weise konstruiert. In Abb. 4 ist oberhalb des Bildes der gegebenen Kurve die Linie gezeichnet, die sich durch Zusammensetzung der ersten vier berechneten harmonischen Funktionen ergibt. Wie man sieht, reichen hier die ermittelten Koeffizienten bis zum Index 4 schon einigermaßen hin, um den wesentlichen Verlauf der Linie wiederzugeben.

H. Friesecke. 198

3. Das Quadratwurzelziehen auf der Rechenmaschine. Das gewöhnliche Verfahren des Quadratwurzelziehens auf der Rechenmaschine beruht auf der Tatsache, daß die Differenzen aufeinanderfolgender Quadratzahlen die Reihe der ungeraden Zahlen $1, 3, 5, 7 \ldots$ bilden. Bei großen Zahlen, bezw. wenn eine größere Stellenzahl im Resultat erforderlich ist, wird die Durchführung der Rechnung sehr langwierig. Vor allem wird die etwaige Kenntnis eines ersten Näherungswertes, die man wohl in der Regel voraussetzen darf, nicht genügend ausgenutzt. Ein Verfahren, das zum Quadratwurzelziehen auf der Rechenmaschine geeignet ist und ganz besonders dann vorteilhaft erscheint, wenn man einen guten Näherungswert kennt, ist folgendes.

Bekanntlich gilt die Beziehung

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ldots .}} \qquad \ldots (1).$$

Ist $2a$ nur einigermaßen größer als b, so konvergiert dieser Kettenbruch ziemlich rasch. Die Näherungsbrüche des Kettenbruches (1) kann man leicht auf der Rechenmaschine auswerten. Bezeichnen wir mit z_ν den Zähler, mit n_ν den Nenner des νten Näherungsbruches von (1), so sind die zwei ersten Näherungsbrüche

$$\frac{z_1}{n_1} = \frac{a}{1} \qquad \frac{z_2}{n_2} = \frac{2a^2+b}{2a};$$

die folgenden kann man nach der Rekursionsformel

$$\frac{z_\nu}{n_\nu} = \frac{2a\, z_{\nu-1} + b\, z_{\nu-2}}{2a\, n_{\nu-1} + b\, n_{\nu-2}} \qquad \ldots\ldots (2).$$

berechnen.

Die Aufgabe zerfällt also in zwei Teile: die Aufsuchung eines passenden a als ersten Näherungswertes und darauffolgende rekurrierende Berechnung der Brüche nach (2).

Wir bezeichnen mit $(AB, CD \ldots)$ die Zahl, deren einzelne, aufeinanderfolgende Ziffern (0 bis 9) $A, B, C, D \ldots$ sind und die den Dezimalpunkt zwischen B und C hat. Um die Quadratwurzel der ganzen Zahl $c = (ABCD \ldots)$ zu finden, verfährt man folgendermaßen: Es sei die Anzahl der Ziffern von c eine gerade Zahl (was stets zu erreichen ist, indem man ev. $A = 0$ setzt); nun teilt man in der üblichen Weise von links nach rechts zu je 2 Ziffern ab. Hierauf sucht man das zu (AB) oder $(ABCD)$ nächstliegende (kleinere) Quadrat d^2, so daß im zweiten Falle

$$(ABCD, EF \ldots .) = d^2 + r \qquad \ldots (3).$$

wo r den Unterschied $(ABCD, EF \ldots)$ minus d^2 bedeutet. Es genügt natürlich, statt aus $c = (ABCDEF \ldots)$ die Quadratwurzel aus $(ABCD, EF \ldots)$ zu ziehen, da wir dann nur das Resultat mit einer entsprechenden Potenz von 10 multiplizieren müssen. Die vierstelligen Quadratzahlen wird man meist im Kopf haben oder leicht herstellen können. Sind Tafeln zur Verfügung, so kürzt man das Verfahren um so mehr ab, je mehr Stellen schon bei der Wahl von d berücksichtigt werden. Jedenfalls nehmen wir das in der angegebenen Weise bestimmte d als a in (1) an, r als b, stellen den früher angegebenen Kettenbruch auf und bilden in der angegebenen Weise die Näherungsbrüche.

Beispiele.

a) ohne Benutzung von Tafeln.

$$\sqrt{17\,18\,34} = 10\sqrt{17\,18,34}.$$

Die nächstkleinere Quadratzahl zu 1718 ist $1681 = 41^2$, also haben wir $a = 41$, $r = 37{,}34$,

$$\sqrt{17\,18,34} = \sqrt{41^2 + 37,34} = 41 + \cfrac{37,34}{82 + \cfrac{37,34}{82 + \ldots}}$$

Die Näherungsbrüche lauten:

$$41; \qquad 41\,\frac{3734}{8200} = 41,455;$$

$$41\,\frac{306\,188}{676\,134} = 41,45285;$$

$$41\,\frac{25\,246\,843}{55\,745\,442} = 41,45289 \quad \text{usw.}$$

Es ist demnach bestimmt

$$\sqrt{17\,18\,34} = 414,529\ldots.$$

b) mit Verwendung einer dreistelligen Quadrattafel.

$$\sqrt{10\,00\,00}.$$

Die nächstniedere Quadratzahl zu 100000 ist

$99\,856 = 316^2 = a^2$ Rest $b = 144$

$$\sqrt{10\,00\,00} = \sqrt{316^2 + 144} = 316 + \cfrac{144}{632 + \cfrac{144}{632 + \ldots}}$$

Die Näherungsbrüche lauten:

$$316; \qquad 316\,\frac{144}{632} = 316,2278$$

$$316\,\frac{144}{632,22\,784} = 316,22\,776 \quad \text{usw.}$$

Es ist demnach bestimmt

$$\sqrt{10\,00\,00} = 316,2278\ldots.$$

St Bergmann. 169

BUCHBESPRECHUNGEN

EICHELBERG, Die thermischen Eigenschaften des Wasserdampfes im technisch wichtigen Gebiet. Heft 220 der Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Herausgegeben vom Verein deutscher Ingenieure. 31 S. 9. Abb.

Unsere heutige Kenntnis von dem thermischen Verhalten des überhitzten Wasserdampfes verdanken wir hauptsächlich den Arbeiten des Münchner Laboratoriums für technische Physik. Dort wurde von Knoblauch, Linde und Klebe[1]) die Beziehung zwischen Druck, Temperatur und Volumen (p, T, v), d. h. die Zustandsgleichung, experimentell bestimmt und später in mehreren aufeinander folgenden Arbeiten durch Knoblauch, Jakob, H. Mollier und Winkhaus[2]) die Abhängigkeit der spezifischen Wärme für konstanten Druck (c_p) vom Druck und von der Temperatur untersucht.

Zwischen beiden Größengruppen besteht die theoretische Beziehung:

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = -AT\left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_p.$$

Die Form dieser Beziehung macht es erklärlich, daß die verschiedenen empirischen Zustandsgleichungen, die in ausgezeichneter Uebereinstimmung mit den $p\,v\,T$-Versuchen aufgestellt wurden, nach obiger Gleichung c_p-Werte ergaben, die weit von den Versuchswerten abwichen. Wir verdanken M. Jakob[3]), der durch graphische Integration aus den Versuchswerten von c_p eine völlig befriedigende Zustandsgleichung erhielt, den Nachweis, daß die beiden Versuchsarbeiten in völliger Uebereinstimmung stehen. Nun war noch eine rechnerische Lösung der Aufgabe erforderlich, die nach weniger befriedigenden Versuchen Anderer, in der vorliegenden Arbeit in erschöpfender Weise gefunden ist.

Der Verfasser geht bei der Darstellung der Versuchswerte von c_p von einer Gleichungsform aus, die eine sehr hübsche graphische Ermittlung der Koeffizienten ermöglicht. Die Gleichung lautet allgemein:

$$c_p - c_p{}^0 = \frac{f_1(p)}{T^\alpha} + \frac{f_2(p)}{T^\beta} + \frac{f_3(p)}{T^\gamma}.$$

Die nähere Untersuchung, die zeigt, daß schon zwei Glieder für den vorliegenden Zweck genügen, führt den Verfasser zu folgendem Ausdruck für c_p:

$$c_p = c_p{}^0 + \frac{C_1 p}{T^4} + \frac{C_2\,(p + 2\cdot 10^4)^{3,2} - C_3}{T^{15}}$$

Den Grenzwert der spezifischen Wärme im idealen Gaszustand $c_p{}^0$ setzt der Verf.:

$$c_p{}^0 = 0{,}345 + 0{,}0_3\,197\,T + \frac{5500}{T^2};$$

$$C_1 = 3{,}2\cdot 10^4 \quad C_2 = 2{,}83\cdot 10^{22} \quad C_3 = 1{,}64\cdot 10^{36}.$$

Neben dieser Gleichung, der der Verfasser vorläufig den Vorzug gibt, ermittelt er noch eine zweite mit etwas anderen Koeffizienten, die die Versuchsergebnisse ebenso genau wiedergibt, sie lautet:

$$c_p = c_p{}^0 + \frac{3{,}2\left(\frac{p}{10^4}\right)}{\left(\frac{T}{100}\right)^4} + \frac{1{,}41\cdot 10^5\left[\left(\frac{p}{10^4}+1\right)^{2,8} - 1\right]}{\left(\frac{T}{100}\right)^{14}}.$$

[1]) Forschungsarbeiten, herausgegeben vom Verein deutscher Ingenieure, Heft 21.

[2]) Letzter zusammenfassender Bericht von Knoblauch und Winkhaus, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing., 1915, S. 376.

[3]) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing., 1912, S. 1980.

Beide Gleichungen weichen von den Versuchskurven um weniger als 1 vH ab.

Aus diesen Gleichungen folgt sofort die Zustandsgleichung. Die bei der Integration auftretende $f(p)$, die im allgemeinen nicht $=0$ ist, kann im Geltungsbereich der Gleichung vom Verfasser vernachlässigt werden.

Der ersten c_p-Gleichung entspricht dann folgende Zustandsgleichung:

$$v = \frac{RT}{p} - \frac{1{,}189}{\left(\frac{T}{100}\right)^3} - \frac{11615\left(\frac{p}{10^4}+2\right)^{2{,}2}}{\left(\frac{T}{100}\right)^{14}}$$

$R = 47{,}06$ v in cbm/kg p in kg/qm.

Die Gleichung zeigt keine größeren Abweichungen von den Versuchen als 3 vT.

Es bietet nun keine weiteren Schwierigkeiten, Ausdrücke für andere wichtige thermimische Größen, wie den Wärmeinhalt, die Entropie usw. zu entwickeln. Aus dem Wärmeinhalt im Sättigungszustand berechnet der Verfasser die Verdampfungswärme und findet sie in ausgezeichneter Uebereinstimmung mit den Versuchen von Henning[1]).

Interessant ist auch die vom Verfasser gegebene Berechnung und zeichnerische Darstellung der spezifischen Wärme für constantes Volumen c_v und des Unterschiedes $c_p - c_v$. Ferner zeigt der Verfasser, daß der Exponent der Adiabate $-\frac{v}{p}\frac{dp}{dv}$ vom Druck praktisch unabhängig ist, und auch von der Temperatur in so geringem Maße beinflußt wird, daß der übliche konstante Wert 1,3 für praktische Rechnungen auch fernerhin beibehalten werden darf.

Der Verfasser berechnet ferner den aus seiner Gleichung folgenden Ausdruck für das Potential: $\varphi = s - \frac{i}{T}$ und zeigt, daß seine Gleichung auch mit der Spannungskurve des Wasserdampfes in sehr guter Uebereinstimmung steht.

Zum Schluß fügt der Verfasser einige Betrachtungen über die Brauchbarkeit seiner Gleichung zur Extrapolation über das Versuchsgebiet hinaus an.

Dem Aufsatz ist ein Entropie-Temperatur-Diagramm nebst Hilfsdiagrammen beigegeben.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Zustandsgleichung des Verfassers das gesamte Versuchsmaterial über Wasserdampf mit kaum zu übertreffender Genauigkeit wiedergibt und daher für alle praktischen Rechnungen volle Sicherheit gewährt. Darüber hinaus kann sie die Grundlage für interessante theoretische Untersuchungen bieten. Besonders wichtig wäre vor allem ein Vergleich des thermischen Verhaltens des anormalen (assoziierenden) Wasserdampfes mit normalen Stoffen.

Zum Schluß noch eine Bemerkung: die Form der Gleichung für c_p und damit die der Zustandsgleichung ist vom Verfasser im Hinblick auf die erwähnte graphische Methode der Koeffizientenbestimmung gewählt worden. Sieht man davon ab, so wäre es näher liegend, für c_p einen nach Potenzen von p entwickelten Ausdruck zu wählen, also:

$$c_p = c_p^0 + f_1(T)\cdot p + f_2(T)\,p^2 + f_3(T)\,p^3 + \ldots$$

die Zustandsgleichung erscheint dann in der Form:

$$v = \frac{RT}{p} + F_1(T) + F_2(T)\,p + F_3(T)\,p^2 + \ldots$$

Beachtet man, daß in den beiden vom Verfasser als gleichwertig bezeichneten Ausdrükken für c_p, die Druckfunktion im letzten Glied die Exponenten 3,2 bezw. 2,8 aufweist, so ist es klar, daß auch der Exponent 3 ebensogut zum Ziele führen muß und damit würde die Gleichung des Verfassers in die eben gegebene Form übergehen. Mollier. 147

P. **METH,** Theorie der Planetenbewegung. 2. Aufl., II + 54 S., 14 Fig. i. Text. Leipzig u. Berlin 1921, Teubner. kl. 8°. Math.-phys. Bibl., Bd. 8.

Gegenüber der ersten Auflage, die Referent in der Ztschr. f. Math. u. Phys. Bd. 62, S. 439 besprochen hatte, ist manches geändert worden. Das dort eingeschaltete Kapitel über Zeitrechnung fiel mit gutem Grund fort, wohl nicht nur, weil inzwischen »in dieser Sammlung ein Bändchen über Zeitrechnung erschienen ist«. In die einleitenden Sätze aus der Mechanik wurde eine knappe Darlegung des Hamiltonschen Hodographen aufgenommen, den der Verfasser jetzt statt der Differentiation der Bewegungsgleichungen zur Ableitung des Newtonschen Gesetzes benutzt; gewiß eine Bereicherung der leicht zugänglichen wohlfeilen Literatur zur elementaren Mechanik. Nicht wenige Formeln und Figuren bekamen ein anderes Gesicht. Im ganzen ist der enge Rahmen wieder gut ausgenutzt zur Einführung in die die Keplersche Ellipse bedingenden Kräfte. Neben dieser neuen Ausgabe behält die erste ihre eigene Note, die von manchem Leser vorgezogen werden mag.

H. E. **TIMERDING,** Die Fallgesetze, ihre Geschichte und ihre Bedeutung. 2. Aufl., IV + 51 S., 25 Fig. i. Text, 1 Porträt. Leipzig u. Berlin 1921, Teubner. kl. 8°. Math.-phys. Bibl., Bd. 5.

Der Titel der Schrift deckt genau den Inhalt, der die Geburtsstunde der exakten Mechanik behandelt. Galileis Ueberlegungen und Forschungsmethoden machen den Hauptgegenstand aus, allgemeine Gesichtspunkte sind in den Vordergrund gerückt und die Kenntnis unserer Tage ist nicht außer acht gelassen. Das Büchlein bildet eine erste Einführung in die Bewegungslehre auf geschichtlicher Grundlage, und als besonderes Verdienst darf es für sich in Anspruch nehmen, manchen Leser veranlaßt zu haben und noch zu veranlassen, daß er zu dem anregenden Buche Ernst Machs »Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt« greift.

Kiel. Wirtz. 138

[1]) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing., 1909, S. 1768.

P. **RIEBESELL,** Dr. a. o. Prof. der Versicherungsmathematik und Statistik an der Universität Hamburg. Steuer-Mathematik. Die Fehler in den Reichssteuertarifen. Mit 16 Abbildungen im Text. Henri Grand, Hamburg 1922. 32 S.

In diesem kleinen Büchlein stellt der Verfasser in übersichtlicher Weise die rationellen Berechnungsgrundlagen verschiedener Arten von Steuertarifen dar. Die Ausführungen sind leicht faßlich und setzen beim Leser nur die Kenntnisse voraus, die nach den gegenwärtigen Lehrplänen in den Oberklassen der höheren Schulen erworben werden können. Auch eine Reihe von Abbildungen ergänzt in zweckmäßiger Weise die Darstellung, die geeignet ist und hoffentlich auch dazu führen wird, den mit der Bearbeitung neuer Tarife Beschäftigten ihre Verantwortlichkeit in sachlicher Hinsicht zum Bewußtsein zu bringen. Mises.

WALTHER **ZIMM,** Dr.-Ing. Ueber die Strömungsvorgänge im freien Luftstrahl. Heft 234 der Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Verlag des Vereines deutscher Ingenieure, Berlin 1921. 36 S.

Der Verfasser berichtet nach einer kurzen theoretischen Einleitung über Versuche, die er im physikalischen Institut der Universität Kiel unter Leitung von Prof. Dr. L. Weber-Kiel ausgeführt hat. Dabei wurde mit Absicht die Geschwindigkeit der Luftströmung so gering gewählt, daß die Elastizität der Luft außer acht bleiben durfte. Das Hauptziel der Untersuchung war, den Einfluß eines aus einer Düse austretenden freien Luftstromes auf die umgebende Luft festzustellen. Zur Geschwindigkeitsmessung wurde ein sehr empfindliches Verfahren elektrischer Heizdrahtmessung angewandt. Die Versuchsergebnisse bestätigten die theoretische Annahme des Vorhandenseins einer sekundären Luftbewegung, die die kinetische Energie des eigentlichen Strahles aufnimmt und allmählich aufbraucht. Mann kann die sorgfältig durchgeführte Arbeit als ersten erfolgreichen Versuch einer genaueren Erforschung der freien Luftstrahlen begrüßen.
Mises.

C. V. L. **CHARLIER,** Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik. Verlag Scientia Lund, Hamburg 1920. 125 S.

Der bekannte schwedische Astronom C. V. L. Charlier, der sich seit vielen Jahren mit großem Erfolge auf dem Gebiete der mathematischen Statistik betätigt, legt jetzt in deutscher Sprache eine kurze Zusammenfassung von Vorlesungen über die Grundzüge dieses Wissensgebiets vor. Er bekennt sich im Vorwort als ein entschiedener Anhänger von Pearson und will vor allem die praktischen Methoden zur Bearbeitung statistischen Materials darstellen und lehren. Das wesentlichste Kennzeichen des Buches ist, daß in einer großen Zahl von Beispielen bestimmte Einzelfälle statistischer Aufnahmen vollständig durchgerechnet werden, während die mathematische Ableitung der benutzten Begriffe, Formeln und Lehrsätze fast vollständig unterdrückt wird. Wer sich über diese Lücke hinwegsetzt, sei es, daß ihn die Ableitungen nicht interessieren, oder daß er imstande ist, sie selbst zu ergänzen, wird aus dem Buch in ausgezeichneter Weise das praktische Handwerkszeug des Statistikers kennen lernen.

Das Buch zerfällt inhaltlich in zwei Hauptabschnitte, von denen der erste die »Homograde oder alternative Statistik« der zweite die »Heterograde oder qualitative Statistik« behandelt. Gemeint sind unter dem ersten Schlagwort alle jene Fälle, bei denen die einzelnen Beobachtungszahlen, die als Elemente der statistischen Reihe auftreten, aus der Abzählung vieler einzelner Alternativen hervorgegangen sind, also z. B. die Reihe der Sterblichkeitszahlen eines Landes in aufeinanderfolgenden Jahren, die Reihe der Knabenquoten der Geburten in verschiedenen räumlichen oder zeitlichen Abschnitten und dergl. Dagegen beschäftigt sich die heterograde Statistik mit Beobachtungsreihen, bei denen eine solche Zurückführung jeder einzelnen Beobachtungsgröße auf eine bestimmte Anzahl von Alternativen nicht möglich ist, also z. B. mit der Reihe der Körperlängen von Rekruten oder mit der Reihe der Regenmengen an einem bestimmten Ort in aufeinanderfolgenden Jahren oder dergl. Bei der ersten Gruppe von Problemen liefert die Wahrscheinlichkeitstheorie in ihren Lehrsätzen über Summenbildung aus Verteilungen (oder über die Ergebnisse wiederholter Versuche) eine brauchbare Grundlage für die Untersuchungen, wie sie erstmals erfolgreich von Lexis angestellt worden sind. Im zweiten Problemkreis hat man es hauptsächlich mit den Hilfsmitteln der Kollektivmaßlehre zu tun, die von Charlier selbst durch Einführung der »zweiten Gattung« von Verteilungskurven in nützlicher Weise bereichert worden sind. Auch die Korrelationsmethode findet eine verständliche Darstellung im Rahmen der oben angegebenen Grenzen, die der Verfasser sich für das ganze Buch gestellt hat.

Im Einzelnen wäre viel zu sagen über merkwürdige Auffassungen oder Ausdrucksweisen, die einer logischen Kritik nicht standhalten können. Beispielsweise spricht das 6. Kapitel von »Poissons und Lexis' Theoremen«. Worin bestehen diese Theoreme? Der Leser muß aus dem Buch entnehmen, das Poissonsche Theorem sei im wesentlichen die Aussage, daß die Streuung einer Beobachtungsreihe, die auf veränderlichen Grundwahrscheinlichkeiten innerhalb der Einzelserien beruht, kleiner ist als die Streuung einer Reihe mit konstanter Grundwahrscheinlichkeit. Es ist eine große Willkür, aus den Poissonschen Untersuchungen über wiederholte Versuche mit veränderlichen Wahrscheinlichkeiten gerade diesen einen Satz, der weder bei Poisson noch im Rahmen der mathematischen Statistik eine besonders große Rolle

spielt, als das Poissonsche Theorem herauszugreifen. Ganz unzulässig aber erscheint es, einen analog gebildeten Satz als »Lexissches Theorem« hinzustellen, den Satz nämlich, daß die Streuung einer Beobachtungsreihe, bei der die Grundwahrscheinlichkeiten innerhalb einer Serie zwar konstant sind, von Serie zu Serie aber schwanken, immer größer ist, als die Streuung der konstanten Reihe. Das was man Lexis verdankt, ist die Methode der Prüfung einer Beobachtungreihe durch den Vergleich ihrer Streuung mit der einer theoretischen Verteilung, aber nicht eine bestimmte Aussage über den Ausfall dieses Vergleichs. Der Verfasser stellt übrigens dem Lexisschen Verfahren durch Einführung seines »Störungskoeffizienten« ein anderes gegenüber, über dessen Berechtigung man angesichts des Mangels jeder mathematischen Begründung kein Urteil fällen kann. Die Ueberlegungen des zweiten Abschnitts stützt der Verfasser wie allgemein üblich auf die Annahme, daß die Schwankungen einer heterograden Beobachtungsreihe durch Zusammenwirken sehr vieler Einzelursachen (Elementarfehler) zustandekommen. Diese Annahme, die bekanntlich zu der sogenannten »Gaußschen Verteilungskurve« führt, ist ja auch die tiefere Grundlage der Gaußschen Fehlertheorie. Es ist merkwürdig, daß der Verfasser, trotzdem er den gekennzeichneten Standpunkt einnimmt, sich in der abfälligsten Weise über die Bedeutung der Gaußschen Fehlertheorie äußert. Gauß hat keineswegs behauptet, das jede statistische Reihe, wie etwa die Reihe der Sterblichkeitszahlen, dem Exponentialgesetz genügen müsse. Dagegen haben alle neueren mathematischen Untersuchungen tatsächlich gezeigt, daß eine Verteilung, die auf Summenbildung aus sehr vielen Elementarverteilungen zurückgeht, unter ganz allgemeinen Voraussetzungen zu dem Gaußschen Gesetz führt. Es ist nicht gerechtfertigt, sich auf den Standpunkt zu stellen, als würde die Kollektivmaßlehre, die beliebig gegebene Beobachtungsreihen analytisch zu erfassen sucht, einen Widerspruch gegen die Gaußsche Thorie darstellen.

Schließlich noch eine kurze Bemerkung über die vom Verfasser gewählten Ausdrücke und Bezeichnungen. Wenn er gelegentlich andeutet, daß er dem im Deutschen üblichen Wort »Streuung« das Wort »Dispersion« vorziehe, weil es international verständlicher sei, so kann man dem noch einigermaßen zustimmen, wenn man auch in einem deutschen Buch deutsche Ausdrücke lieber sehen würde. Aber schärfste Verwahrung muß man z. B. dagegen einlegen, daß die übliche Bezeichnung »Reihe« als gemeinsames Wort für »Zeile« oder »Spalte« ersetzt wird durch das englische »Array«; auch sonst wäre es wohl angemessen statt »Kolumne« »Spalte«, statt »Frequenz« »Häufigkeit«, statt »Medium« »Mittel« zu sagen und wenig verständliche Neubildungen wie »heterograd« und dergl. zu vermeiden.

Mises.

NACHRICHTEN

Ferdinand Wittenbauer †. In der Geschichte der Wissenschaften und der Gelehrten sind jene Persönlichkeiten besonders auffallend, die außer ihrem Spezialfach noch auf einem zweiten, von jenem oft weit abseits liegenden Gebiet Leistungen vollbringen, die zur allgemeinen Anerkennung gelangen; solche Persönlichkeiten besitzen dann meist für das kulturelle Leben ihrer Wirkungsstätte besondere Bedeutung . Die Rätsel, die mit dem Wesen schöpferischer Arbeit verknüpft sind, werden bei derartiger Zwei- oder Mehrteilung noch wunderbarer und ihre Bedingungen noch schwieriger zu durchschauen.

Bei dem Forscher, dessen Gedächtnis diese Zeilen gewidmet sind, dem Ingenieur und Mathematiker Ferdinand Wittenbauer, war es die Dichtkunst, die seines Wesens zweite Seite ausmachte. Seinem Berufe nach akademischer Lehrer, Professor der Mechanik an der deutschen Technischen Hochschule in Graz — daneben ein Dichter, Nachfahre der Romantiker, in seiner Lyrik voll zarter, traumhafter Stimmungen, manchmal auch von übermütigem Humor erfüllt, in den späteren dramatischen Versuchen sich Problemen des akademischen Lebens und des Ingenieurberufes zuwendend, dem er mit allen Fasern zugetan, und dessen Ansehen er immerdar zu festigen und zu heben bestrebt war. Sein Dichterberuf äußerte sich — über seine poetischen Werke hinaus — in der vorbildlichen Art, mit der er sich der Sprache in Wort und Schrift bediente und keiner seiner zahlreichen Zuhörer, die sich in seiner mehr als vier Jahrzehnte umspannenden Lehrtätigkeit um ihn geschart, wird seine formvollendeten Vorträge vergessen.

Ferdinand Wittenbauer wurde am 18. Februar 1857 in der deutschen, heute zu Südslawien gehörigen Stadt Marburg a. d. Drau geboren, studierte an den Technischen Hochschulen in Graz und Wien, später an der Universität Berlin, wo er Schüler von Kirchhoff und Weierstraß wurde, dann in Freiburg i. Br. Nach Rückkehr in die Heimat habilitierte er sich 1880 als Privatdozent an der Technischen Hochschule in Graz, der er, trotz mehrfacher Berufungen an andere Hochschulen, Zeit seines Lebens treu blieb. 1887 wurde er zum außerordentlichen, 1891 zum ordentlichen Professor der allgemeinen und technischen Mechanik daselbst ernannt. Im Jahre der 100jährigen Gründungsfeier dieser Hochschule, 1911, bekleidete er das Amt des Rektors und dabei trat seine eigenartige Persönlichkeit als gefeierter akademischer Lehrer und Forscher wie auch als Dichter in seinen

sprachlich vollendeten und mit dichterischen Eingebungen reich geschmückten Reden wie vielleicht nie vorher oder nachher ans Licht des Tages. Im Jahre 1917 verlieh ihm die deutsche Technische Hochschule in Prag auf Grund seiner Verdienste um die Wissenschaft und den Unterricht in der Mechanik die Würde eines Ehrendoktors der technischen Wissenschaften.

Seine wissenschaftlichen Arbeiten liegen fast ausschließlich auf dem Gebiete der Kinematik und Dynamik starrer Körper. Ihre stattliche Reihe beginnt mit der Anwendung des damals in der Geometrie zur Geltung gelangenden Gesichtspunktes, statt des Punktes andere »Raumelemente« der Betrachtung zugrunde zu legen, auf die Kinematik. Nach den Erfolgen der damaligen Zeit auf dem Gebiete der Geometrie war es naturgemäß, den Strahl und die Ebene als solche Raumelemente anzunehmen, und die von ihnen unter Annahme gewisser Gesetze erzeugten Gebilde zu studieren. Schon frühzeitig wandte sich W. den Untersuchungen über den Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand von kinematischen Ketten und Getrieben zu, die ihn Zeit seines Lebens beschäftigten und die er im Laufe der Jahre zu einer »dynamischen Theorie der Getriebe« ausbaute. Eine Reihe von Arbeiten betrifft die Verwertung der charakteristischen »Pole« (Geschwindigkeits-, Beschleunigungs-, Wende- und Tangentialpol) für die relative Bewegung mehrerer verbundener Systeme gegeneinander, auf die es in der Getriebelehre ankommt. Als Hilfsmittel der Rechnung wird dabei der seither sonst nahezu vergessene und für die in Rede stehenden Probleme sehr geeignete »Barycentrische Kalkül« von A. F. Möbius verwendet. Bei der Weiterführung dieser Arbeiten hat sich freilich diese ursprüngliche Betrachtungsweise als zu umständlich erwiesen und wurde von W. selbst durch Ausgestaltung der ursprünglich wohl von O. Mohr benutzten Geschwindigkeits- und Beschleunigungspläne ersetzt, die eine weit einfachere und übersichtlichere Darstellung des Bewegungszustandes gestatten. Diese Methode hatte auch den Vorteil, die daran anschließende Bestimmung der Gelenkdrucke und Spannungen in den einzelnen Getriebeteilen zu ermöglichen, und führte W. zu den »dynamischen Kraftplänen« als Gegenstück zu den in der Statik verwendeten. Außer diesen Arbeiten, die sich auf den augenblicklichen Zustand beziehen, beschäftigte sich W. auch mit der endlichen stationären (oder besser: quasistationären) Bewegung des Getriebes und die daraus hervorgewachsene »graphische Dynamik der Getriebe« ist als seine bedeutungsvollste Leistung anzusehen. Sie beruht auf dem Gedanken, daß die Bewegung von Systemen mit einem Freiheitsgrad, zu denen die zwangläufig bewegten Getriebe gehören, durch die Bewegung eines Punktes mit »veränderlicher Masse« dargestellt werden kann, die alle Massen des Getriebes in sich vereinigt und an der alle Kräfte auf Grund der Forderung der Arbeitsgleichheit reduziert werden. Wichtig ist dabei, daß für die Bewegung eines solchen Punktes das Prinzip der lebendigen Kraft bestehen bleibt, welches zeichnerisch verwertet werden kann und W. zur ersten dynamischen Behandlung und Lösung des »Schwungradproblems« geführt hat. Diese Methode, die später von v. Mises u. a. noch ergänzt wurde, geht wesentlich über die vor W. benutzten Verfahren hinaus, die vor allem an den Namen Radinger anknüpfen. In mehreren Aufsätzen in verschiedenen Zeitschriften bis in die jüngste Zeit hat W. die Bedeutung seiner Methoden für mannigfache praktisch wichtige Fälle auseinandergesetzt und die Vorteile der graphischen Methoden in der Kinematik und Dynamik ans Licht zu rücken gesucht. Seit vielen Jahren war er damit beschäftigt, seine Methoden und Ergebnisse in einem großen »Lehrbuch der graphischen Dynamik« zusammenfassend darzustellen, dessen Druck er anfänglich noch überwachen konnte, dessen Erscheinen aber sein rastlos tätiger Schöpfer nicht mehr erleben sollte; die Fertigstellung des Druckes wird von dem Unterzeichneten besorgt und dürfte in wenigen Wochen beendet sein (Verlag J. Springer in Berlin).

Neben diesen umfangreichen Arbeiten kommen einigen kleineren Noten über einzelne Fragen der Elastizitäts- und Festigkeitslehre und der Hydrodynamik eine vergleichsweise geringere Bedeutung zu.

Wenn in den vorstehenden Zeilen versucht wurde, den Inhalt der Originalarbeiten W.s kurz zu kennzeichnen, so muß nunmehr noch auf eine andere Schöpfung auf seinem Fachgebiete hingewiesen werden die für den Mechanik-Unterricht an den deutschen Technischen Hochschulen anerkannte Bedeutung besitzt: seine Aufgaben aus der technischen Mechanik, die aus kleinen, für seine unmittelbaren Zuhörer bestimmten Autographien hervorgingen und allmählich zu dem heute bereits in mehreren Auflagen vorliegenden dreibändigen Werke anwuchsen. Alle, die Mechanik lehren und lernen, wissen, daß es mit der Wiedergabe allgemeiner Sätze und Regeln nicht getan ist, und daß es vielfacher Uebung bedarf, um diese Sätze auf neue Fälle anzuwenden, die uns die Natur und Technik in unendlicher Fülle darbieten. Insbesondere in den englischen Colleges wurde diese Unterrichtsmethode angewendet, und man kann fast sagen, bis zum Drill getrieben, das Verständnis der allgemeinen Sätze durch Beispiele aller Art zu fördern und zu vertiefen. Doch fehlte es in der Literatur an einem Werk, das diesen Gesichtspunkt für die Probleme der technischen Mechanik zur Ausführung gebracht hätte und diese Lücke füllte das Wittenbauersche Werk in weitem Umfange aus. Es bringt eine Fülle von Beispielen in mannigfachen Formen, an denen man so recht das alte Leibnizsche Wort bewahrheitet findet, daß die Natur zwar einfach in ihren Prinzipien, aber unermeßlich reich in ihren Anwendungen ist. Heute dürfen wir uns freilich nicht verhehlen, daß

diese Aufgabensammlung teilweise schon wieder als veraltet bezeichnet werden muß, und daß sie einer gründlichen Neubearbeitung bedarf, um sie in technischer Beziehung den Anforderungen der Gegenwart anzupassen.

Wenn wir zum Schlusse noch ein Wort über die Persönlichkeit Wittenbauers anfügen dürfen, so müssen wir seine Charaktereigenschaften hervorheben, die ihn als Deutschen unserm Volke besonders wert machen müssen: sein mannhaftes, unbeugsames Eintreten für seine nationale Ueberzeugung und sein bis in die letzte Lebenszeit bekundetes und auch durch die schwersten Schläge nicht erschüttertes Vertrauen in die sittliche Kraft unseres Volkes.

Prag, im August 1922.

Th. Pöschl. 202

Tagung in Leipzig September 1922. Auf der diesjährigen Naturforscher-Versammlung in Leipzig werden den Beschlüssen des Vorjahres entsprechend Vorträge aus dem Gebiete der angewandten Mathematik und Mechanik in zwei Gruppen abgehalten. Die einen, mehr physikalischer Richtung, finden in der Abteilung 3 (Technische Physik) am Dienstag, den 19. September 3 Uhr nachmittags statt. Die zweite Gruppe von Vorträgen, mehr mathematischer Richtung, wird in zwei Sitzungen der Abteilung 1 (Mathematik) Donnerstag, den 21. September vormittags 9 Uhr und nachmittags 3 Uhr abgehalten werden. Das genaue Verzeichnis der bisher angemeldeten Vorträge, sowie das allgemeine Programm der Naturforscher-Versammlung, das gewiß auch Interesse erwecken wird, ist an anderer Stelle dieses Heftes veröffentlicht.

Am Donnerstag, den 21. September 5 Uhr nachmittags findet eine Besprechung der Vertreter der angewandten Mathematik und Mechanik statt, die der Beschlußfassung über die Schaffung eines dauernden Zusammenschlusses dienen soll. Recht zahlreiche Teilnahme von Seiten der Fachkollegen wäre sehr erwünscht.

Hydro-aerodynamische Konferenz Innsbruck 1922. In der Zeit vom 10. bis 13. September ds. Js. findet in Innsbruck eine von v. Kármán-Aachen, Levi-Civita-Rom, Oseen-Upsala, Prandtl-Göttingen einberufene Zusammenkunft von Vertretern der Hydromechanik und Aerodynamik statt, zu der Einladungen an die Fachleute verschiedener Länder ergangen sind. Bisher sind folgende Vorträge angemeldet:

A. G. v. Baumhauer-Amsterdam: Beitrag zur Frage des Schraubenfliegers.

U. U. Cisotti-Mailand: Ueber die italienischen Arbeiten zur klassischen Hydromechanik in den letzten fünfzehn Jahren.

G. A. Crocco-Rom: Gegenstand wird später bekannt gegeben.

V. W. Ekmann-Lund: Ueber Meeresströmungen.

L. Hopf-Aachen: Neuere Untersuchungen zur Dynamik der Bewegung von Flugzeugen.

Th. v. Kármán-Aachen: Ueber die sog. Oberflächenreibung bewegter Flüssigkeiten.

T. Levi-Civita-Rom: Ueber die Transportgeschwindigkeit der stationären Wellenbewegung.

C. W. Oseen-Upsala: Die analytische Theorie der Bewegungsgleichungen in einer zähen inkompressiblen Flüssigkeit.

M. Panetti-Turin: Neue Untersuchungen aus dem aeronautischen Laboratorium der Königlichen Technischen Hochschule in Turin.

L. Prandtl-Göttingen: Die Entstehung von Wirbeln in einer idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflügeltheorie.

D. Thoma-München: Neuere Beiträge zur Theorie der Turbinen.

E. Trefftz-Dresden: Ueber Tragflügeltheorie.

C. Wieselsberger-Göttingen: Experimentelle Bestätigungen der Tragflügeltheorie.

Nähere Auskünfte erteilt Prof. v. Kármán-Aachen, Aerodynamisches Institut der Technischen Hochschule. 210

Neue Erfolge im Segelflug. Im Anschluß an den Bericht von Dr. Hoff im letzten Heft[1]) wird die Mitteilung von Interesse sein, daß bei dem soeben abgehaltenen dritten Segelflug-Wettbewerb in der Rhön neue Erfolge erzielt worden sind, die alles von den Fachleuten Erwartete übertroffen haben. Es gelang Herrn Hentzen-Hannover ein Segelflug von 3 Stunden 10 Minuten Dauer auf einem Flugzeug der Akademischen Gruppe Hannover. Im Fernflug wurde eine Entfernung von 10 km überschritten. Schließlich hat der bekannte Flieger und Flugzeugkonstrukteur, Herr Fokker, Segelflüge mit Begleiter ausgeführt. Es besteht kein Zweifel darüber, daß diese Fortschritte nutzbringende Verwertung für den Bau und für die Lenkung von Motor-Flugzeugen in großem Umfange gestatten werden, ganz abgesehen von dem hohen theoretischen Interesse, das sie erwecken müssen. 210

Arbeitsausschuß für graphische Rechenmethoden. Innerhalb des Ausschusses für wirtschaftliche Fertigung (AWF) beim Reichskuratorium für Wirtschaftlichkeit in Industrie und Handwerk (RKW) ist in der Sitzung vom 13. Juni ds. Js. ein ständiger Arbeitsausschuß für graphisches Rechnen geschaffen worden. Dieser Ausschuß hat den Zweck, alle Bestrebungen, welche auf Herstellung graphischer Rechentafeln und ähnlicher Hilfsmittel für den praktischen Rechner gerichtet sind, zusammenzufassen. Den Vorsitz führt Herr Oberingenieur Schäfer. Die Zeitschrift, die der Weiterbildung der zeichnerischen Rechenverfahren große Aufmerksamkeit widmet, wird über die sachliche Tätigkeit des Ausschusses fortlaufend berichten. 210

---

[1]) Diese Zeitschr. 2, 1922, S. 207 bis 218.

ZUSCHRIFT AN DEN HERAUSGEBER

Vektorbezeichnung. Zum Entwurf des AEF über Vektorbezeichnungen[1]) möchte ich folgendes bemerken:

Die Bezeichnungen der Vektorrechnung müssen so gewählt werden, daß sie nach Möglichkeit bestehen bleiben auch bei Rechnung mit Dyadensummen, Triadensummen usw. Die jetzt in der Relativitätstheorie benutzte Bezeichnung der geometrischen Größen durch Bestimmungszahlen mit verschiedenen Indizes ermöglicht eine einheitliche Schreibweise auch für Tensoren höherer Stufe in einem n-dimensionalen nichteuklidischen Raum. Diese allgemeine „Tensorrechnung" ist eine Rechnung mit Bestimmungszahlen und deren Invarianten, aber nicht mit den geometrischen Größen selbst. Sie ist geeignet für die Darstellung allgemeiner Formeln und deren Umformungen, nicht aber für direkte Ausrechnung gegebener Probleme. Eine direkte Rechnung mit Polyadensummen in einem n-dimensionalen nichteuklidischen Raum hat Schouten entwickelt[2]). Man wird aber, in der für praktische Zwecke gebrauchten Vektorrechnung, auf die Allgemeinheit verzichten müssen und für die dreidimensionale Vektorrechnung einen besonderen Algorithmus benutzen, für die vierdimensionale Vektorrechnung einen anderen usw.

Immerhin ist es sehr wichtig, für die Vektorrechnung solche Bezeichnungen zu benutzen, daß sie zugleich auch für die Affinorrechnung passen.

Mir scheint es entschieden besser zu sein, nach dem Vorschlag des AEF für das skalare Produkt zweier Vektoren kein Multiplikationszeichen zu benutzen und die dyadische Multiplikation durch einen Punkt anzudeuten. Die skalare Multiplikation ist eine viel engere Verknüpfung als die dyadische; es ist ratsam, dieses auch in den Bezeichnungen auszudrücken. In den Ausdrücken $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{v}$ oder $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{v}$ erscheint der gerichtete Teil des Produktes, der Vektor $\mathfrak{v}$, von dem skalaren Teil abgesondert. Triaden werden dann durch kompliziertere Ausdrücke dargestellt, z. B. $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}$, das hängt aber damit zusammen, daß eine Triade tatsächlich eine kompliziertere Größe ist, als eine Zahl $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$.

Man wendet dagegen ein, daß dann auch ein gewöhnlicher Skalar von einem Vektor durch einen Punkt getrennt werden sollte. Man müßte also stets $\varphi\cdot\mathfrak{v}$ statt $\varphi\,\mathfrak{v}$ schreiben. Nun ist aber jeder Skalar auch als isotroper Tensor (mit gleichen Achsen) aufzufassen. Bezeichnet man den Einheitstensor (Grundtensor) mit $I=\mathfrak{i}_1\cdot\mathfrak{i}_1+\mathfrak{i}_2\cdot\mathfrak{i}_2+\mathfrak{i}_3\cdot\mathfrak{i}_3$, so kann man den Skalar φ durch den isotropen Tensor φI ersetzen und, folglich, auch schreiben $\varphi I\,\mathfrak{v}$ statt $\varphi\,\mathfrak{v}$ oder $\varphi\cdot\mathfrak{v}$. So kann man schreiben

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,I\equiv\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}\,\underline{\mathfrak{C}}+\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}\,\underline{\mathfrak{A}}+\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{A}\,\underline{\mathfrak{B}}$$

und folglich

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,I\,\mathfrak{v}=\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{v}+\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{v}+\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{v}.$$

Selbstverständlich wird der Einheitstensor nicht geschrieben, wenn keine Verwechslung zu befürchten ist. Es ist also folgerichtig, daß die Ableitungen $\nabla\varphi$, $\nabla\Phi$ Vektoren sind und die Ableitung $\nabla\mathfrak{v}$ ein Skalar ist: in allen drei Fällen ist die Stufe der geometrischen Größe um eine Einheit erniedrigt worden; aus dem isotropen Tensor oder aus einem allgemeinen Affinor erhält man einen Vektor, aus dem Vektor erhält man einen Skalar. Die dyadischen Ableitungen, dagen, erhöhen die Stufe der differentierten Größe: Aus $\varphi=\varphi I$ und Φ erhält man Triadensummen $\nabla\cdot\varphi I=\nabla\varphi\cdot I$ und $\nabla\cdot\Phi$, aus dem Vektor $\mathfrak{v}$ erhält man den Nablaaffinor $\nabla\cdot\mathfrak{v}$.

Ein anderer Einwand gegen die Benutzung des Punktes als Zeichen der dyadischen Multiplikation wird so begründet: Es seien zwei Dyaden $\Phi=\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ und $\Psi=\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{D}$. Das skalare Produkt dieser Dyaden (erste Ueberschiebung nach Schouten) ist

$$\Phi\,\Psi=\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{D}$$

der erste Skalar dieser Produktdyade, d. h. die „zweite Ueberschiebung" der Dyaden $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{D}$ ist durch einen ziemlich komplizierten Ausdruck gegeben,

$$S_1(\Phi\,\Psi)=\mathfrak{A}\,\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}.$$

Nun könnte man z. B. diese zweite Ueberschiebung so andeuten, daß man schriebe

$$S_1(\Phi\,\Psi)=\Phi\,\|\,\Psi$$

oder, nach dem Vorschlag von Schouten,

$$S_1(\Phi\,\Psi)\equiv\Phi^2\cdot\Psi,$$

wobei man ruhig die erste Ueberschiebung durch $\Phi\,\Psi$ bezeichnen kann. Diese Festsetzung liegt aber vollständig im Gebiet der Affinorrechnung und braucht nicht in einem Entwurf für Vektorbezeichnungen näher berücksichtigt zu werden.

Die vom AEF vorgeschlagene Bezeichnung erlaubt auch ohne weiteres, Potenzen von

---

[1]) Diese Zeitschr. 1, 1921, S. 421—422; vergl. auch die Zuschriften 2, 1922, S. 161—164 und 227—231.

[2]) Diese Rechnung ist z. B. angewendet in dem Buch von Struik, Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie, das demnächst bei J. Springer in Berlin erscheint.

Affinoren hinzuschreiben, z. B. $\Phi\,\Phi = \Phi^2$, $\Phi\,\Phi\,\Phi = \Phi^3$ usw. Die durch dyadische Multiplikation von Affinoren entstehenden Tetraden $\Phi \cdot \Phi$ oder Hexaden $\Phi \cdot \Phi \cdot \Phi$ kommen sehr selten vor; sie können daher auch etwas komplizierter aussehen. Potenzensummen von Affinoren werden dagegen oft gebraucht. Setzt man z. B. $\Lambda' = \mathfrak{t} \cdot \mathfrak{s} - \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{t}$, so bedeutet die Summe $e^{\Lambda'\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda'^n \varphi^n}{n!}$ einen Versor, d.h. einen Affinor, der eine Drehung in der $\mathfrak{t}, \mathfrak{s}$-Ebene für jeden mit ihm multiplizierten Vektor bewirkt. Setzt man $\Lambda = \mathfrak{t} \cdot \mathfrak{s} + \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{t}$, so bedeutet die Summe $e^{\Lambda\psi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda^n \psi^n}{n!}$ einen hyperbolischen Versor, d.h. einen Affinor, der die Lorentztransformation bewirkt[1]). Bei Benutzung des Punktes, als Zeichen der skalaren Multiplikation, wären diese Ausdrücke bedeutend komplizierter. Der Vorschlag des AEF, für die Darstellung des skalaren Produktes kein besonderes Multiplikationszeichen zu benutzen, scheint mir am vorteilhaftesten zu sein.

Die Benutzung eines Multiplikationszeichens für die vektorielle Multiplikation scheint mir am wenigsten vorteilhaft zu sein. Viel übersichtlicher ist die Darstellung der Vektorprodukte durch Zellenausdrücke mit Hilfe eckiger Klammern. Aber auch diese, vom AEF vorgeschlagene und in Deutschland wohl am meisten gebrauchte Schreibweise, scheint mir nicht die beste zu sein. Jedes Vektorprodukt aus den Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ kann auch dargestellt werden als skalares Produkt eines der Vektoren mit der „Ergänzung“ des anderen. Budde hat für solche Ergänzungen („antimetrische Tensoren“) die Bezeichnung [$\mathfrak{B}$ oder $\underline{\mathfrak{B}}$] eingeführt[2]). Ich habe[3]) für einen solchen Affinor den Namen Axiator und die Bezeichnung $\underline{\mathfrak{B}}$ vorgeschlagen. Schouten bezeichnet die „Ergänzung“ mit ${}_2\mathfrak{B}$. Die Vorteile dieser Bezeichnung treten am deutlichsten hervor, wenn man die Darstellung komplizierter Produkte mit verschiedenen Bezeichnungen vergleicht. Es sei z. B. das skalare Produkt aus dem Doppelvektorprodukt $\mathfrak{A}\,\underline{\mathfrak{B}}\,\underline{\mathfrak{C}}$ und dem Vektor $\underline{\mathfrak{m}}\,\mathfrak{n}$ zu bilden. Dann erhält man, unter Berücksichtigung der möglichen Assoziationsänderungen, folgende Tabelle:

Mit Unterklammerung	Mit dem $\times$-Zeichen	Mit eckigen Klammern
1. $\mathfrak{A}\,\underline{\mathfrak{B}}\,\underline{\mathfrak{C}}\,\underline{\mathfrak{m}}\,\mathfrak{n}$	$\{(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \times \mathfrak{C}\}\ (\mathfrak{m} \times \mathfrak{n})$	$[[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]\,\mathfrak{C}]\,[\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}]$
2. „	$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})\,\{\mathfrak{C} \times (\mathfrak{m} \times \mathfrak{n})\}$	$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]\,[\mathfrak{C}\,[\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}]]$
3. „	$\mathfrak{A}\,\{\mathfrak{B} \times (\mathfrak{C} \times (\mathfrak{m} \times \mathfrak{n}))\}$	$\mathfrak{A}\,[\mathfrak{B}\,[\mathfrak{C}\,[\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}]]]$
4. $\underline{\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}}\,\underline{\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}}$	$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \times (\mathfrak{C} \times \mathfrak{D})$	$[[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}]]$

Die Ausdrücke 1., 2., 3. stellen dieselbe Zahl dar. Bei Benutzung der Axiatoren ist die zulässige Assoziationsänderung der Faktoren durch die Schreibweise von selbst angedeutet, dagegen ist es mit der Schreibweise der zweiten und der dritten Kolonne zunächst gar nicht einleuchtend, daß die Ausdrücke 1., 2., 3. identisch sind. Die Benutzung des Axiators für die Darstellung der Vektorprodukte ist für den Ausdruck 4. etwas umständlich, weil hier zwei Klammern untereinander stehen müssen. Vielleicht kann man den Axiator auf eine andere, bequemere Art bezeichnen; jedenfalls ist es außerordentlich wichtig, daß man auf diese Weise die Produkte ganz ohne Klammern darstellen kann.

Besonders groß sind die Vorteile dieser Darstellung für die Rechnung mit dem Nablaoperator ∇. Es ist eine natürliche Forderung, daß der symbolische Vektor ∇ nicht über Klammern hinweg wirken soll, daß vielmehr sein Wirkungsbereich durch Klammern abgegrenzt werden kann. So erhält man z. B. die Formeln

$$\begin{aligned}\nabla\,\underline{\mathfrak{u}}\,\underline{\nabla}\,\mathfrak{v} &= (\nabla\,\underline{\mathfrak{u}})\,\underline{\nabla}\,\mathfrak{v} - \mathfrak{u}\,\underline{\nabla}\,\underline{\nabla}\,\mathfrak{v} \\ &= \operatorname{rot}\mathfrak{u}\,\operatorname{rot}\mathfrak{v} - \mathfrak{u}\,\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{v},\\ \nabla \cdot \mathfrak{A}\,\mathfrak{B} &= (\nabla \cdot \mathfrak{A})\,\mathfrak{B} + (\nabla \cdot \mathfrak{B})\,\mathfrak{A} \\ &= \mathfrak{A}\nabla \cdot \mathfrak{B} + \mathfrak{B}\nabla \cdot \mathfrak{A} + \underline{\mathfrak{A}}\,\underline{\nabla}\,\mathfrak{B} + \underline{\mathfrak{B}}\,\underline{\nabla}\,\mathfrak{A},\end{aligned}$$

usw.

Zusammenfassend, schlage ich zum Entwurf des AEF folgende Zusätze vor:

Zu Punkt 6. Das Vektorprodukt zweier Vektoren kann auch dadurch bezeichnet werden, daß man einen der beiden nebeneinander geschriebenen Faktoren unterklammert $\mathfrak{A}\,\underline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}\,\underline{\mathfrak{B}}$, oder durch eine andere Bezeichnung als Axiator kenntlich macht. Der unterklammerte Vektor kann von beiden Seiten skalar mit anderen Vektoren multipliziert werden, $\mathfrak{A}\,\underline{\mathfrak{B}}\,\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\,\underline{\mathfrak{B}}\,\mathfrak{C}$.

Zu Punkt 8. Bei Benutzung des unterklammerten Vektors müssen die Differentialausdrücke so aufgefaßt werden, daß der symbolische Vektor ∇ nicht über Klammern hinweg wirkt.

Lichterfelde, den 15. Juli 1922.

Jean Spielrein. 199

[1]) Vergl. Spielrein »Zur vektoriellen Darstellung der Lorentztransformation«, Arch. f. El. 1922.

[2]) Budde, Tensoren und Dyaden, Braunschweig 1914.

[3]) Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung, Stuttgart 1916.

(Redaktionsschluß 31. August 1922.)

Verantwortlich für die Schriftleitung Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43.
Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

Bd. 2 **Ende Oktober 1922** **Heft 5**

325

Inhalt:

	Seite
Hauptaufsätze. C. Wieselsberger: Zur Theorie des Tragflügels bei gekrümmter Flugbahn	325
E. Schwerin: Ueber die Spannungen in freitragenden gefüllten Rohren	340
G. Pick: Ueber die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen von Schwingungsproblemen	353
L. v. Bortkiewicz: Das Helmertsche Verteilungsgesetz für die Quadratsumme zufälliger Beobachtungsfehler	358
O. Lacmann: Die Dreieckrechentafeln und die hydraulische Energieumwandlungskurve	375
Zusammenfassende Berichte. A. Nádai: Theorie der Plattenbiegung und ihre experimentelle Bestätigung	381
Kurze Auszüge. Baumechanik	399
Kleine Mitteilungen. Basch: Ein rechnerisch zeichnerisches Verfahren für parabolische Ausgleichung	401
Buchbesprechungen. Czuber: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung	403
Nachrichten	404
Zuschriften an den Herausgeber	408

HAUPTAUFSÄTZE

Zur Theorie des Tragflügels bei gekrümmter Flugbahn.

Von **C. WIESELSBERGER** in Göttingen.

Die vorliegende Arbeit untersucht auf den Grundlagen der von L. Prandtl begründeten Tragflügeltheorie[1]) das Problem des Fluges in einer Kreisbahn.

1. Einleitung und Zusammenfassung der Ergebnisse. Ein horizontal liegender Flügel bewege sich so, daß der Flügelmittelpunkt einen Kreis beschreibt, dessen Ebene ebenfalls horizontal liegt; die Querachse des Flügels sei stets radial gerichtet. Infolge der Kreisbewegung ist die Luftgeschwindigkeit relativ zum Flügel auf der äußeren Flügelhälfte größer, auf der inneren kleiner als in der Mitte. Die äußeren Flügelelemente erfahren dadurch einen größeren Auftrieb als die entsprechenden inneren. Die Verteilung des Auftriebes über die Spannweite des Flügels wird dadurch unsymmetrisch in bezug auf die Flügelmitte. Nehmen wir an, daß bei gerader Flugbahn der Auftrieb und damit auch die Zirkulation elliptisch über die Spannweite verteilt ist, so ließe sich bei gekrümmter Flugbahn die Zirkulation eines jeden Flügelelementes in der Weise ermitteln, daß die symmetrische Verteilung der Zirkulation, die dem geraden Fluge entspricht, durch eine andere ersetzt wird, wobei für jedes Flügelelement eine Geschwindigkeit eingesetzt wird, die es gemäß seiner Entfernung vom Mittelpunkt der gekrümmten Flugbahn hat. Die Zirkulation, die die Dimension Geschwindigkeit $\times$ Länge hat, ändert sich dabei proportional der Geschwindigkeit.

Diese Betrachtungsweise berücksichtigt nicht den Umstand, daß das gemäß der Tragflügeltheorie von der Hinterkante des Flügels ausgehende Wirbelband, dessen Gestalt in unserem Fall ringförmig ist, eine Rückwirkung auf den Flügel derart ausüben kann, daß die Verteilung der Zirkulation geändert wird. Untersucht man diese Rückwirkung näher, indem man die von dem Wirbelbande herrührenden Störungsgeschwindigkeiten am Orte des Flügels berechnet, so zeigt sich, daß die wirkliche Verteilung der Zirkulation von der symmetrischen Form weniger abweicht, als nach der elementaren Auffassung

[1]) L. Prandtl, Tragflügeltheorie, 1. u. 2 Mitteilg., Nachrichten d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen Math.-Phys. Klasse 1918/19.

zu erwarten wäre. Das Wirbelband wirkt im Sinne einer Abschwächung, deren Größe durch eine dimensionslose Zahl β, die stets kleiner als 1 ist, zum Ausdruck gebracht wird und die in unserem Falle nur von dem Achsenverhältnis des den Betrachtungen zugrunde gelegten elliptisch umrissenen Flügels abhängt. Nach Bestimmung des Wertes von β werden zunächst Auftrieb und Widerstand des Flügels bei der kreisförmigen Bewegung ermittelt und deren Aenderung gegenüber der geradlinigen Bewegung festgestellt. Hierauf wird das Moment um die Längsachse (Quermoment) sowie das Moment um die vertikale Achse (Seitenmoment) berechnet.

Die analytische Behandlung eines Flügels mit durchgehender linearer Verwindung (ohne Unstetigkeitsstelle in der Mitte) ist dem vorstehenden Problem verwandt und wird im Anschluß an dieses hier durchgeführt werden.

Schließlich werden die für den Flug auf der Kreisbahn berechneten Werte von β durch Messung des Quermomentes an einem Rundlauf geprüft. Aus der Größe des Quermomentes läßt sich β in einfacher Weise ableiten. Der gemessene Wert von $\beta + 1$ ist um rd. 5,5 vH kleiner als der theoretische. Die mutmaßlichen Ursachen für diesen Unterschied werden angegeben.

2. Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes in der Umgebung eines kreisförmigen Wirbels. Für die folgende Untersuchung nehmen wir an, daß die Bewegung des Tragflügels auf einer kreisförmigen Bahn erfolge. Die Achse eines jeden von der Flügelhinterkante ausgehenden Wirbelfadens wird dann, wenn wir, wie in der Tragflügeltheorie, seine Eigenbewegung vernachlässigen, ebenfalls kreisförmig gekrümmt sein. Die Gesamtheit aller freien Wirbelfäden bildet daher, falls die »tragende Linie« (d. i. eine Linie, längs welcher man sich den Auftrieb konzentriert denkt) in der Ebene der Flugbahn liegt, ein ebenes kreisförmiges Wirbelband. Wir nehmen weiterhin an, daß noch kein voller Kreis durchflogen ist. Würde mehr als ein Vollkreis durchflogen, so würde das in nächster Nähe befindliche Wirbelband des vorigen Umlaufes eine starke Störung geben; deshalb wird dieser Fall ausgeschlossen. Es wird sich zeigen, daß die entfernteren Teile von geringer Wirkung sind, so daß der durchflogene Winkel nur geringen Einfluß hat. Der Berechnung wurde ein Wirbelband zugrunde gelegt, das sich in einer Länge vom halben Umfange der Kreisbahn unmittelbar an den Flügel anschließt.

Die erste Aufgabe besteht nun darin, das von einem Wirbelfaden von halbkreisförmiger Gestalt erzeugte Geschwindigkeitsfeld zu ermitteln. Nehmen wir an, daß die Ebene des Flügels mit der Ebene des Wirbelsystems zusammenfällt, d. h. daß der Flügel die Kreisbahn ohne Schräglage durchfliegt, so genügt es, wenn die Störungsgeschwindigkeiten in der durch den Halbkreis bestimmten Ebene bekannt sind, da die tragende Linie auch in dieser Ebene liegt. Die Richtung der Störungsgeschwindigkeiten ist überall senkrecht zu der genannten Ebene. Wir betrachten einen halbkreisförmigen Wirbelfaden vom Radius R, um welchen überall die Zirkulation Γ herrscht (Abb. 1). Ein beliebiger Punkt P in der Ebene des Halbkreises, für welchen die Störungsgeschwindigkeit bestimmt werden soll, sei hier durch die Größen r und α gekennzeichnet. Der im Punkte P von einem Wirbelelement von der Länge ds erzeugte Betrag dw der Störungsgeschwindigkeit ist nach dem Biot-Savartschen Gesetz:

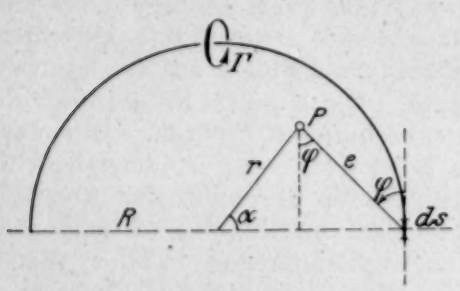


Abb. 1

$$dw = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin\varphi \, ds}{e^2},$$

wenn e die Entfernung des Punktes P von dem Wirbelelement ds und φ den Winkel dieser Richtung mit der Richtung von ds bedeutet. Durch die bekannten Größen R, r und α ausgedrückt ist

$$e^2 = r^2 \sin^2\alpha + (R - r\cos\alpha)^2, \qquad \sin\varphi = \frac{R - r\cos\alpha}{e}, \qquad ds = R\,d\alpha,$$

so daß man für dw erhält:

$$dw = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{(R - r\cos\alpha)\,R\,d\alpha}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha)^{3/2}}.$$

Die resultierende Geschwindigkeit w im Punkte P wird daher durch das über den Halbkreis erstreckte Integral zum Ausdruck gebracht:

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R(R - r\cos\alpha)\,d\alpha}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha)^{3/2}}.$$

Setzen wir zur Abkürzung $R^2 + r^2 = p^2$ und $2Rr = q^2$, so ist

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi}\left(R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{p^2 - q^2\cos\alpha^3}} - Rr\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{p^2 - q^2\cos\alpha^3}}\right).$$

Diese Integrale sind vom elliptischen Typus. Bezeichnet man mit K' und E' die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, so ist

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi}\left[\frac{2R^2}{\sqrt{p^2 + q^2}}\frac{1}{p^2 - q^2}\,\mathsf{E}'\left(\frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{p^2 + q^2}}\right) - Rr\left(\frac{2p^2}{q^2\sqrt{p^2 + q^2}\,(p^2 - q^2)}\right)\mathsf{E}'\left(\frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{p^2 + q^2}}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{2}{q^2\sqrt{p^2 + q^2}}\,\mathsf{K}'\left(\frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{p^2 + q^2}}\right)\right].$$

Hieraus läßt sich die Störungsgeschwindigkeit in einem beliebigen Punkte der Halbkreisebene angeben, da die Werte von K' und E' für verschiedene Werte des Moduls $k = \frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{p^2 + q^2}}$ aus den vorhandenen Zahlentafeln für elliptische Integrale entnommen werden können. Für unsere Zwecke ist jedoch diese Form des Resultates ungeeignet, denn für die weitere Behandlung des Problems ist es erforderlich, daß der Ausdruck für w in einer geschlossenen Form sich darstellt, damit wir später eine noch nötige Integration ausführen können. Dies wird erreicht, wenn wir K' und E' in Reihen entwickeln. Für die Konvergenz dieser Reihen ist es vorteilhaft, wenn wir K' und E' durch die komplementären elliptischen Integrale K und E ausdrücken, indem wir den Modul k durch den komplementären Modul $k' = \sqrt{1 - k^2}$ ersetzen. Es ist dann

$$\mathsf{K}'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \mathsf{K}\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = \mathsf{K}\left(\sqrt{1 - k^2}, \frac{\pi}{2}\right), \qquad \mathsf{E}'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \mathsf{E}\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = \mathsf{E}\left(\sqrt{1 - k^2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Die vollständigen elliptischen Integrale K und E lassen sich nach Legendre[1]) durch folgende Reihen darstellen:

$$\mathsf{K}\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = \ln\frac{4}{k'} + \frac{1^2}{2^2}k'^2\left(\ln\frac{4}{k'} - 1\right) + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}k'^4\left(\ln\frac{4}{k'} - 1 - \frac{2}{3\cdot 4}\right) + \ldots.$$

$$\mathsf{E}\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = 1 + {}^1/_2\,k'^2\left(\ln\frac{4}{k'} - \frac{1}{1\cdot 2}\right) + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3}{4}k'^4\left(\ln\frac{4}{k'} - 1 - \frac{1}{3\cdot 4}\right) + \ldots.$$

Gemäß Obigem ist $k' = \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{\frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}}$ oder wenn wir für p und q die Werte einsetzen:

$$k' = \frac{R - r}{R + r}.$$

Für den Fall, daß wir die Störungsgeschwindigkeit nur in solchen Punkten ins Auge fassen, deren Entfernung vom Wirbelfaden sehr klein ist gegenüber dem Radius der Flugbahn, d. h. wenn r und R nur wenig voneinander verschieden sind, wird der Wert von $\frac{4Rr}{(R + r)^2}$ nahe bei 1 liegen. k' wird dann eine kleine Zahl werden, deren Quadrate wir vernachlässigen können, so daß wir von den beiden Reihen für K und E nur das erste Glied zu berücksichtigen haben, da im zweiten Gliede k' bereits in quadratischer Form auftritt. Es ergibt sich somit:

$$\mathsf{K}\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = \ln\frac{4}{k'}, \qquad \mathsf{E}\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

---

[1]) Siehe Legendre, Traité des fonct. ellipt., Paris 1825.

Mit Benutzung dieser Werte lautet nun der Ausdruck für die Störungsgeschwindigkeit:

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi}\left(\frac{2R^2}{p^2 - q^2\sqrt{p^2+q^2}} - \frac{2p^2Rr}{q^2\sqrt{p^2+q^2}\,p^2 - q^2} + \frac{2Rr}{q^2\sqrt{p^2+q^2}} \ln\frac{4}{\sqrt{1-k'}}\right).$$

Führt man für p und q ihre Werte ein, so vereinfacht sich der Ausdruck auf:

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi}\left(\frac{1}{R-r} + \frac{1}{R+r}\ln\frac{4(R+r)}{R-r}\right).$$

Wir führen ferner an Stelle der Variablen r die Variable x ein, welche die Entfernung des Aufpunktes vom Wirbelfaden darstellt, indem man $R-r=x$ setzt. Dann ergibt sich:

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2R-x}\ln\frac{4(2R-x)}{x}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Der zweite Summand dieses Ausdruckes läßt sich noch weiter reduzieren; da R gegen die übrigen Längen groß ist, so halten wir es für zulässig, daß Glieder mit dem Faktor $\frac{1}{R^2}$ vernachlässigt werden. Den ersten Faktor des zweiten Summanden können wir wie folgt schreiben:

$$\frac{1}{2R-x} = \frac{1}{2R}\left(1 - \frac{x}{2R}\right)^{-1}.$$

Entwickelt man den Klammerdruck binomisch, so ergibt sich

$$\frac{1}{2R-x} = \frac{1}{2R}\left(1 + \frac{x}{2R} + \ldots\right), \qquad = \frac{1}{2R} + \frac{x}{4R^2} + \ldots.$$

oder mit der oben für zulässig erklärten Vernachlässigung der Glieder mit dem Faktor $\frac{1}{R^2}$:

$$\frac{1}{2R-x} \sim \frac{1}{2R}.$$

Den auf diese Weise erhaltenen zweiten Summanden formen wir in folgender Weise um:

$$\frac{1}{2R}\ln\frac{4(2R-x)}{x} = \frac{1}{2R}\left(\ln 4 + \ln\frac{2R}{x}\left(1 - \frac{x}{2R}\right)\right) = \frac{1}{2R}\left(\left(\ln 4 + \ln\frac{2R}{x}\right) + \ln\left(1 - \frac{x}{2R}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2R}\left(\left(\ln 4 + \ln\frac{2R}{x}\right) - \left(\frac{x}{2R} + \frac{x^2}{8R^2} + \ldots\right)\right).$$

Mit Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung $\frac{1}{R^2}$ gibt dies:

$$\sim \frac{1}{2R}\left(\ln\frac{R}{x} + \ln 8\right).$$

Für die Störungsgeschwindigkeit w erhalten wir nun endgültig den Näherungswert:

$$w = \frac{\Gamma}{4R}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2R}\left(\ln\frac{R}{x} + \ln 8\right)\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Es ist von Interesse, die Uebereinstimmung dieses Wertes der Störungsgeschwindigkeit mit der exakten Lösung kennen zu lernen, die sich durch strenge Berechnung der elliptischen Integrale ergibt. Diese lautet, wenn p und q durch R und x ausgedrückt werden:

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi}\left(\frac{1}{x}\,\mathsf{E}'\left(\frac{2\sqrt{R(R-x)}}{2R-x}\right) + \frac{1}{2R-x}\,\mathsf{K}'\left(\frac{2\sqrt{R(R-x)}}{2R-x}\right)\right).$$

Nach dieser Gleichung wurde für einen angenommenen Fall der exakte Wert von w für verschiedene Werte von x mit Hilfe der Legendreschen Zahlentafeln der elliptischen Integrale berechnet. Dabei ist für $R=1$ und $\frac{\Gamma}{4\pi}=1$ gesetzt worden. Die so gewonnene strenge Verteilung der Störungsgeschwindigkeit über den Radius ist in Abb. 2 durch die ausgezogene Kurve dargestellt, während die Anwendung der Näherungsformel die gestrichelte Kurve ergibt. Man sieht daraus, daß für Werte von x, die klein sind im Vergleich zum Radius R der Flugbahn, die Störungsgeschwindigkeit durch die Näherungsformel mit für unsere Zwecke hinreichender Genauigkeit wiedergegeben wird.

3. Berechnung der Zirkulationsverteilung. Nachdem wir nun in den Stand gesetzt, die von einem kreisförmigen Wirbel bei gegebener Zirkulation erzeugte Störungsgeschwindigkeit in der Ebene desselben anzugeben, gehen wir dazu über, die Rück-

wirkung des vom Flügel ausgehenden halbkreisförmigen Wirbelsystems auf den Flügel selbst zu ermitteln. Diese Rückwirkung besteht, wie bereits im ersten Abschnitt angedeutet, darin, daß durch das System der abgehenden Wirbel am Orte des Flügels eine lotrecht nach abwärts gerichtete Geschwindigkeit erzeugt wird, welche eine Veränderung des ursprünglichen Anstellwinkels längs der Spannweite und damit auch eine Veränderung der Auftriebsverteilung bewirkt. Es kommt nun hier darauf an, die tatsächliche Auftriebsverteilung zu bestimmen. Sobald diese bekannt ist, lassen sich alle für den Flug in der Kurve wichtigen Größen berechnen.

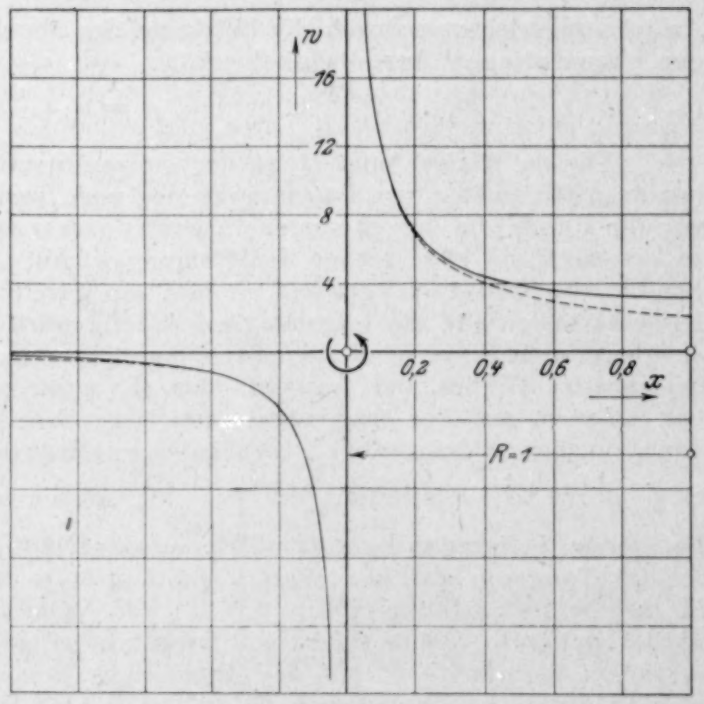


Abb. 2

Zur Lösung dieser Aufgabe gehen wir in der Weise vor, daß wir eine geeignet erscheinende unsymmetrische Auftriebsverteilung annehmen und zusehen, ob sie unseren Forderungen genügt. Die Verfolgung des direkten Weges würde erheblich größere Schwierigkeiten bieten. Es wird angenommen, daß beim geraden Flug der Auftrieb und damit auch die Zirkulation elliptisch über die Spannweite des Flügels verteilt ist. Dies wird durch die Gleichung

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}$$

zum Ausdruck gebracht wird, wenn Γ_0 die Zirkulation in der Mitte des Flügels, l die halbe Flügelspannweite und Γ die Zirkulation im Abstand x von der Flügelmitte bedeuten. In der elementaren Theorie geht man von der Tatsache aus, daß diejenigen Flügelelemente, welche größeren Abstand vom Krümmungsmittelpunkt der Flugbahn haben, größere Geschwindigkeit relativ zur Luft besitzen, und zwar ist die Geschwindigkeit proportional dem Abstand des betreffenden Flügelelementes vom Mittelpunkt der Flugbahn. Dem entsprechend wird, da nach dem Joukowskyschen Satz die Zirkulation der Geschwindigkeit proportional ist, die Zirkulation proportional dem Abstand vom Mittelpunkt angenommen. Diese Verteilung würde durch die Gleichung

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} \left(1 + \frac{x}{R}\right)$$

gekennzeichnet sein. Dieser Ansatz läßt indessen außer acht, daß durch die abgehenden Wirbel die Verteilung der Zirkulation infolge Aenderung des wirksamen Anstellwinkels der einzelnen Flügelelemente ebenfalls verändert wird. Dieser Aenderung der Verteilung der Zirkulation über die Spannweite tragen wir in der Weise Rechnung, daß wir das zweite Glied in der Klammer mit einem Zahlenfaktor β, den wir als »Einflußzahl« bezeichnen, versehen und demgemäß ansetzen:

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} \left(1 + \frac{\beta x}{R}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Die Einflußzahl β ist zunächst unbekannt; wir müssen sie, falls der gewählte Ansatz überhaupt zulässig ist, so bestimmen, daß sie mit den Bedingungen unseres Problems verträglich ist. Zu diesen Bedingungen gelangt man durch folgende Ueberlegung: Da sich unsere Betrachtungen auf einen unverwundenen Flügel erstrecken, so ist der Anstellwinkel α, d. h. der Winkel zwischen Flügelsehne und Bewegungsrichtung für jedes Flügelelement der gleiche. Nun setzt sich nach der Tragflügeltheorie der Anstellwinkel α aus zwei Teilen zusammen, nämlich aus dem Anstellwinkel α', welcher unendlich großer Spannweite entspricht, und dem Winkel $\varphi = \frac{w}{v}$ infolge Veränderung der

Anströmungsrichtung durch die Wirkung des abgehenden Wirbelbandes, so daß man für den geometrischen Anstellwinkel erhält:

$$\alpha = \alpha' + \frac{w}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Dieser Winkel muß längs der ganzen Spannweite konstant sein. Diese Forderung benutzen wir später zur Bestimmung des noch unbekannten Faktors β. Zunächst suchen wir die durch die angenommene Zirkulationsverteilung erzeugte Vertikalgeschwindigkeit zu ermitteln, da sich daraus der Neigungswinkel φ der anströmenden Luft ergibt. Zur Berechnung derselben greifen wir auf die durch Gl. (3) dargestellte Beziehung zurück. Diese läßt sich für die folgende Anwendung noch weiter vereinfachen. Wir sind bereits darüber unterrichtet, daß von der Flügelhinterkante ein aus infinitesimalen Wirbelfäden bestehendes Wirbelband ausgeht, das in unserem speziellen Falle ringförmige Gestalt hat. Jedem auf der tragenden Linie liegenden Aufpunkt lassen sich stets zwei Wirbel von gleicher Stärke, aber verschiedenem Drehsinn zuordnen. Die Wirbelstärke eines elementaren Wirbelstreifens ist wie wir wissen durch den Ausdruck $\frac{d\,\Gamma}{d\,x}\,d\,x$ gegeben. Bei einer beliebigen stetigen Zirkulationsverteilung (die an den Flügelenden mit senkrechter Tangente auf den Wert 0 geht) gibt es daher stets zwei Abszissen x_1 und x_2, für welche die Beziehung gilt: $d\,\Gamma_2 = -\,d\,\Gamma_1$. Die an diesen Stellen abgehenden Elementarwirbel sind also gleich stark, ihr Drehsinn ist aber entgegengesetzt. Für die Wirkung in einem Aufpunkte P mit der Abszisse x_0 kommt die Summe der Einzelwirbel in Betracht. Unter Beachtung von Gl. (3) ist daher

$$d\,w = \frac{1}{4\,\pi}\,\frac{d\,\Gamma}{d\,x}\,d\,x\left[\left(\frac{1}{x_1 - x_0} - \frac{1}{2\,R}\ln\,(x_1 - x_0) + \frac{1}{2\,R}\ln\,8\,R\right)\right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{x_2 - x_0} - \frac{1}{2\,R}\ln\,(x_2 - x_0) + \frac{1}{2\,R}\ln\,8\,R\right)\right].$$

Man sieht, daß bei der Summierung der Wirkung zweier gleich starker Wirbelfäden das von x unabhängige Glied $\frac{1}{2\,R}\ln\,8\,R$ wegfällt. Da dies für sämtliche Elementarwirbelpaare der Fall ist, so können wir für die folgende Integration dieses konstante Glied außer acht lassen. Bezeichnen wir von nun ab den Abstand eines Wirbelfadens von der Flügelmitte mit x, so ist die Vertikalgeschwindigkeit w im Aufpunkte P mit der Abszisse x_0:

$$w = \frac{1}{4\,\pi}\int_{-l}^{+l}\frac{d\,\Gamma}{d\,x}\,\frac{x - x_0}{d\,x} - \frac{1}{8\,\pi\,R}\int_{-l}^{+l}\frac{d\,\Gamma}{d\,x}\ln\,(x - x_0)\,d\,x \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

Aus Gl. (4) ergibt sich $\frac{d\,\Gamma}{d\,x}$ zu:

$$\frac{d\,\Gamma}{d\,x} = \frac{\beta\,\Gamma_0}{R}\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} - \left(1 + \frac{\beta\,x}{R}\right)\frac{\Gamma_0\,x}{l^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}}.$$

Für die Vertikalgeschwindigkeit ergibt sich demnach, wenn wir wieder die Glieder mit $\frac{1}{R^2}$ vernachlässigen.

$$w\,(x_0) = \frac{\beta\,\Gamma_0}{4\,\pi\,R}\int_{-l}^{+l}\frac{\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}\,d\,x}{x - x_0} - \frac{\Gamma_0}{4\,\pi\,l^2}\int_{-l}^{+l}\frac{x\,d\,x}{(x - x_0)\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}} - \frac{\beta\,\Gamma_0}{4\,\pi\,R\,l^2}\int_{-l}^{+l}\frac{x^2\,d\,x}{x - x_0\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}}$$
$$+ \frac{\Gamma_0}{8\,\pi\,R\,l^2}\int_{-l}^{+l}\frac{x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}}\ln\,(x - x_0)\,d\,x.$$

Die Integration dieses Ausdruckes liefert:

$$w = \frac{\Gamma_0}{4\,l}\left(1 + \frac{x_0}{R}\,(2\,\beta + 1/2)\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Diese Art der Verteilung der Vertikalgeschwindigkeit über die Spannweite ist für unser Problem zulässig, vorausgesetzt, daß der Bedingungsgleichung (5) genügt wird, nach welcher der geometrische Anstellwinkel zwischen Flügelsehne und Bewegungsrichtung für jeden Flügelquerschnitt der gleiche sein muß. Letzteres können wir dadurch erreichen, daß wir die noch unbestimmte Konstante β so bestimmen, daß Gl. (5) befriedigt wird. Wir setzen zu diesem Zwecke den Ausdruck für die Vertikalgeschwindigkeit Gl. (7) in Gl. (5) ein, wobei wir auch die Größen α', v und t durch die entsprechenden Ausdrücke ersetzen. t bedeutet die Flügeltiefe. Wir nehmen an, daß wir die in unserer Aufgabe angenommene elliptische Verteilung des Auftriebes durch einen Umriß des Flügels von elliptischer Form bei konstantem Anstellwinkel längs der ganzen Spannweite erreicht haben. Dann ist:

$$t = t_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}$$

unter t_0 die Flügeltiefe in der Mitte des Flügels verstanden. Für α' läßt sich nach Kutta schreiben:

$$\alpha' = \frac{c_a}{2\pi} = \frac{\Gamma}{\pi t v}.$$

Die Größen Γ, t und v sind längs der Spannweite veränderlich. Drücken wir sie durch die Werte Γ_0, t_0 und v_0 in der Flügelmitte aus, so erhält man:

$$\alpha' = \frac{\Gamma_0 \left(1 + \frac{\beta x}{R}\right)}{\pi t_0 v_0 \left(1 + \frac{x}{R}\right)}. \qquad \text{Ferner ist:} \quad \frac{w}{v} = \frac{\Gamma_0 \left(1 + \frac{x}{R}(2\beta + 1/2)\right)}{4 l v_0 \left(1 + \frac{x}{R}\right)}$$

eingesetzt in Gl. (5) liefert:

$$1 + \frac{\beta x}{R} + \frac{\pi t_0}{4l} + \frac{\pi t_0}{4l}\frac{2\beta x}{R} + \frac{\pi t_0}{4l}\frac{x}{2R} = \frac{\pi v_0 t_0 \alpha}{\Gamma_0} + \frac{\pi v_0 t_0 \alpha}{\Gamma_0}\frac{x}{R}.$$

Diese Gleichung muß für jeden Wert von x erfüllt sein. Dies ist nur möglich, wenn die Summe der mit x behafteten Glieder $= 0$ ist. Daher ergibt sich durch Vergleichung der Koeffizienten von x:

$$\beta + \frac{\pi t_0}{2l}\beta + \frac{\pi t_0}{8l} = \frac{\pi v_0 t_0 \alpha}{\Gamma_0}.$$

Setzt man noch $\Gamma_0 = \frac{c_a}{2} t_0 v_0$

und

$$\alpha = \frac{c_a}{2\pi} + \frac{c_a}{\pi}\frac{F}{4l^2} = \frac{c_a}{2\pi} + \frac{c_a t_0}{8l},$$

so erhält man für β den Ausdruck:

$$\beta = \frac{1 + \frac{\pi}{4}\frac{t_0}{l} - \frac{\pi}{8}\frac{t_0}{l}}{1 + \frac{\pi}{2}\frac{t_0}{l}}.$$

Schließlich wollen wir für das Achsenverhältnis $\frac{t_0}{2l}$ des elliptischen Flügelumrisses den Buchstaben λ einführen und erhalten dann:

$$\beta = \frac{1 + \frac{\pi}{4}\lambda}{1 + \pi\lambda} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Aus diesem Ergebnis ersieht man, daß der Wert von β nur von dem Achsenverhältnis des elliptischen Flügelumrisses abhängt. Der größte Wert, den β annehmen kann, ergibt sich für $\lambda = 0$ (d. h. für unendlich große Spannweite) zu $\beta = 1$. Für verschwindend kleine Spannweiten ($\lambda = \infty$) nähert sich β dem Werte $1/4$, denn es ist

$$\lim_{\lambda = \infty} \frac{1 + \frac{\pi}{4}\lambda}{1 + \pi\lambda} = 1/4.$$

In der nachstehenden Zahlentafel sind die Werte von β für verschiedene Werte von λ berechnet.

$\lambda = \infty$	10	5	2	1	0,9	0,8	0,7
$\beta = 0{,}25$	0,273	0,295	0,353	0,431	0,447	0,464	0,484
$\lambda = 0{,}6$	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0
$\beta = 0{,}511$	0,541	0,582	0,636	0,710	0,820	0,897	1,0

In Abb. 3 ist für einen angenommenen Fall die Verteilung der Zirkulation über die Spannweite zur Darstellung gebracht, wie sie sich auf Grund der Tragflächentheorie ergibt (ausgezogene Kurve). Die gestrichelte Kurve stellt die Zirkulationsverteilung dar, welche die elementare Theorie ohne Berücksichtigung des von der Hinterkante ausgehenden gekrümmten Wirbelbandes liefert.

4. Berechnung der Luftkräfte und Momente. In Abb. 4 sind die im allgemeinsten Fall auf einen Flügel wirkenden Luftkräfte und Momente zusammengestellt.

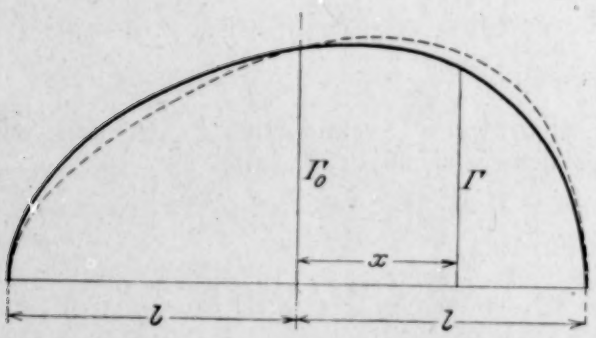


Abb. 3

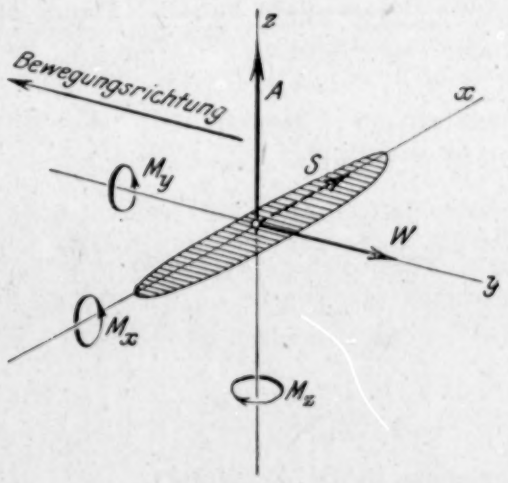


Abb. 4

Die Symmetrielinie des Flügels ist nach der Y-Richtung des eingezeichneten Koordinatensystems orientiert; die Bewegung erfolge entgegen der Y-Richtung. Der Auftrieb A wirkt dann senkrecht zur Bewegung in der Z-Richtung, der Widerstand W der Bewegung entgegen in Richtung Y. Das Moment um die Y-Achse (Quermoment) und das Moment um die Z-Achse (Seitenmoment) bezeichnen wir mit M_y bezw. M_z. Die Seitenkraft S in Richtung X und das Moment M_x (Längsmoment) spielen bei unseren Betrachtungen keine Rolle.

a) Auftrieb und Widerstand. Auf Grund der gewonnenen Ergebnisse wollen wir zunächst untersuchen, in welcher Weise sich Auftrieb und Widerstand bei kreisförmiger Bahn ausdrücken. Es ist:

$$d A = \varrho\, v\, \Gamma\, d x.$$

Setzt man für Γ den Ausdruck Gl. (4) ein und drückt man v durch die Geschwindigkeit v_0 in der Mitte des Flügels aus, so ergibt sich:

$$A = \varrho\, v_0\, \Gamma_0 \int_{-l}^{+l} \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} \left(1 + \frac{\beta\, x}{R}\right)\left(1 + \frac{x}{R}\right) d x$$

$$= \varrho\, v_0\, \Gamma_0 \left(\int_{-l}^{+l} \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}\, d x + \frac{\beta + 1}{R} \int_{-l}^{+l} x \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} + \frac{\beta}{R^2} \int_{-l}^{+l} x^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}\, d x \right).$$

Das 2. Integral in der Klammer mit dem Faktor $\frac{1}{R}$ ist Null. Berücksichtigen wir in diesem Falle, wo der Einfluß 1. Ordnung des Flugbahnradius verschwindet, die 2. Ordnung mit dem Faktor $\frac{1}{R^2}$, so erhält man für den Auftrieb

$$A = \varrho\, v_0\, \Gamma_0\, l\, \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\beta\, l^2}{4\, R^2}\right).$$

Der Faktor vor der Klammer stellt den Auftrieb bei geradliniger Bewegung dar; der Klammerausdruck gibt demnach die Aenderung gegenüber der geradlinigen Bewegung an. Er ist, wie man sieht, nur von geringem Einfluß auf die Größe des Auftriebes, falls der Bahnradius R gegenüber der Spannweite $2\,l$ groß ist. In erster Näherung bleibt daher der Auftrieb gegenüber dem geradlinigen Fluge ungeändert.

Zur Berechnung des induzierten Widerstandes dient der Ansatz:

$$d\,W = \frac{w}{v}\,d\,A = \varrho\,\Gamma\,w\,d\,x.$$

Setzen wir für Γ und w wieder die entsprechenden Ausdrücke Gl. (4) und Gl. (7) ein, so ergibt sich

$$W = \frac{\varrho\,\Gamma_0^2}{4\,l}\int_{-l}^{+l}\sqrt{1-\frac{x^2}{l^2}}\left(1+\frac{\beta\,x}{R}\right)\left(1+\frac{x}{R}\,(2\,\beta+{}^1/_2)\right)d\,x.$$

Die Ausrechnung des Integrals (in ähnlicher Weise wie oben) liefert für den Widerstand

$$W = \frac{\varrho\,\Gamma_0^2\,\pi}{8}\left(1+\frac{\left(2\,\beta^2+\frac{\beta}{2}\right)l^2}{4\,R^2}\right).$$

Beim geradlinigen Fluge ist

$$W = \frac{\varrho\,\Gamma_0^2\,\pi}{8}.$$

Ist $\frac{l}{R}$ klein, so wird der Unterschied gegenüber der geradlinigen Bewegung unbedeutend.

b) Das Moment um die Y-Achse (Quermoment). Zur Bestimmung des Quermomentes M_y setzen wir an:

$$M_y = \int_{-l}^{+l} x\,d\,A = \varrho\int_{-l}^{+l} x\,\Gamma\,v\,d\,x.$$

Γ und v werden wieder, da sie längs der Spannweite veränderlich sind, durch die entsprechenden Ausdrücke ersetzt. Man erhält dadurch:

$$M_y = \varrho\,v_0\,\Gamma_0\int_{-l}^{+l} x\sqrt{1-\frac{x^2}{l^2}}\left(1+\frac{\beta\,x}{R}\right)\left(1+\frac{x}{R}\right)d\,x.$$

Die Integration dieses Ausdruckes liefert unter Vernachlässigung der 2. Ordnung für das Quermoment, wenn man $2\,l = b$ setzt,

$$M_y = \frac{A\,b^2\,(\beta+1)}{16\,R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Es ist hier am Platze, darauf hinzuweisen, daß nach der elementaren Theorie, welche die Wirkung des Wirbelbandes unberücksichtigt läßt, der Wert von $\beta = 1$ ist. In diesem Falle würde das Quermoment M_y' sein:

$$M_y' = \frac{A\,b^2}{8\,R}.$$

Man sieht, daß, da stets β kleiner als 1 ist, das auf den Grundlagen der Tragflügeltheorie berechnete Moment kleiner ist als dasjenige, das sich aus der einfachen elementaren Auffassung ergibt. Die Krümmung des Wirbelbandes wirkt demnach im Sinne einer Abschwächung auf das Quermoment.

c) Das Moment um die Z-Achse (Seitenmoment). Die gleichen Ursachen, die für das Vorhandensein des Quermomentes maßgebend sind, bewirken auch das Auftreten eines Momentes um die Z-Achse. Die äußere Flügelhälfte erfährt wegen des größeren Auftriebes einen größeren induzierten Widerstand, dann aber auch als direkte Wirkung der größeren Geschwindigkeit einen größeren Profilwiderstand. Das Moment des induzierten Widerstandes bezeichnen wir mit M_{zi}, das des Profilwiderstandes mit M_{zo}.

Das Moment des induzierten Widerstandes ist:

$$M_{zi} = \int_{-l}^{+l} x\,\frac{w}{v}\,d\,A = \frac{\varrho\,\Gamma_0^2}{4\,l}\int_{-l}^{+l} x\sqrt{1-\frac{x^2}{l^2}}\left(1+\frac{\beta\,x}{R}\right)\left(1+\frac{x}{R}\,(2\,\beta+{}^1/_2)\right)d\,x.$$

Die Durchrechnung ergibt unter Vernachlässigung der Glieder 2. Ordnung

$$M_{zi} = \frac{A^2\,(6\,\beta+1)}{32\,\pi\,q\,R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Auffallend ist hier, daß dieses Moment von der Flügelspannweite unabhängig ist. Der Ausdruck hat aber, wie man sich leicht überzeugt, die Dimension eines Momentes. Zum Vergleich schreiben wir auch hier wieder das nach dem elementaren Ansatz errechnete Moment M_z' an, das wir aus dem vorstehenden Ausdruck erhalten, wenn $\beta = 1$ gesetzt wird. Es ist also

$$M_z' = \frac{7\,A^2}{32\,\pi\,q\,R}.$$

Dieses Moment ist ebenfalls wieder größer als das nach der Tragflügeltheorie gerechnete.

Wir wollen auch noch den Beitrag des Profilwiderstandes zum Seitenmoment ermitteln. Es ist:

$$M_{zo} = \int_{-l}^{+l} x\,c_{wo}\,\frac{\varrho v^2}{2}\,t\,dx.$$

Hierbei bedeutet c_{wo} die Profilwiderstandszahl, von der wir annehmen, daß sie für alle Flügelelemente die gleiche ist. Drücken wir die veränderliche Geschwindigkeit v und die veränderliche Flügeltiefe t durch die Werte in der Flügelmitte aus, so ergibt sich:

$$M_{zo} = c_{wo}\,t_0\,\frac{\varrho\,v_0^2}{2}\int_{-l}^{+l} x\,\sqrt{1-\frac{x^2}{l^2}}\left(1+\frac{x}{R}\right)dx$$

und somit

$$M_{zo} = W_0\,\frac{b^2}{8\,R}$$

unter $W_0 = c_{wo}\,F\,q$ den Profilwiderstand der geradlinigen Bewegung verstanden. Nun ist das gesamte Seitenmoment

$$M_z = M_{zi} + M_{zo}$$

und wir erhalten daher:

$$M_z = \frac{1}{8\,R}\left(\frac{A^2\,(6\,\beta+1)}{4\,\pi\,q} + W_0\,b^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

5. Der linear verwundene Flügel als verwandtes Problem. Die analytische Behandlung des linear verwundenen Flügels mit elliptischem Umriß ist dem bisher behandelten Falle der Bewegung eines Flügels auf einer kreisförmigen Bahn ganz ähnlich. Es sollen daher die besonderen Verhältnisse hier kurz dargelegt werden. Die Analogie mit der vorstehend behandelten Aufgabe beschränkt sich jedoch nur auf eine derartige Verwindung, bei welcher sich der Anstellwinkel nach einem linearen Gesetz in stetiger Weise von der einen bis zur anderen Flügelspitze ändert. Bedeutet α_0 den Anstellwinkel in der Mitte des Flügels, so stellen wir die Verwindung durch folgende Beziehung dar:

$$\alpha\,(x) = \alpha_0\left(1+\frac{x}{\mu\,l}\right),$$

wobei die Stärke der Verwindung durch die dimensionslose Zahl μ ausgedrückt wird. Um die Auftriebsverteilung eines solchen Flügels zu bestimmen, setzen wir unter Annahme eines elliptischen Flügelumrisses die Zirkulation wieder in der Form an:

$$\Gamma = \Gamma_0\sqrt{1-\frac{x^2}{l^2}}\left(1+\frac{\beta' x}{\mu\,l}\right).$$

Die dieser Auftriebsverteilung entsprechende Vertikalgeschwindigkeit ergibt sich ganz analog wie beim Flügel auf der Kreisbahn zu:

$$w = \frac{\Gamma_0}{4\,l}\left(1+\frac{2\,\beta' x}{\mu\,l}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Der Zahlenfaktor β' ist nun wieder so zu bestimmen, daß die angenommene Zirkulationsverteilung mit der geometrischen Form des Flügels verträglich ist. Man erhält hierfür:

$$\beta' = \frac{1+\frac{\pi}{2}\lambda}{1+\pi\,\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

Für verschiedene Achsenverhältnisse λ des elliptischen Flügels erhält man die in der nachstehenden Tabelle angegebenen Werte von β':

$\lambda = \infty$	10,0	5,0	2,0	1,0	0,9	0,8	0,7
$\beta' = 0{,}500$	0,515	0,529	0,572	0,620	0,632	0,645	0,657
$\lambda = 0{,}6$	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0
$\beta' = 0{,}674$	0,695	0,720	0,758	0,807	0,883	0,934	1,0.

Die Werte von β' sind, wie man sieht, größer als die Werte von β beim Kurvenflug, d. h. die Abweichung der wirklichen Auftriebsverteilung von der nach der elementaren Theorie berechneten, bei welcher der Auftrieb einfach proportional dem Anstellwinkel des betreffenden Flügelelementes gesetzt wird und die Rückwirkung des abgehenden Wirbelbandes auf den Flügel unberücksichtigt bleibt, ist hier nicht so groß wie in dem zuerst behandelten Falle der Bewegung auf einer gekrümmten Bahn.

Bei Vergleich des Auftriebes und Widerstandes mit den gleichen Größen des unverwundenen Flügels zeigt sich, daß der Auftrieb wegen der konstanten Geschwindigkeit längs der Spannweite genau derselbe ist wie beim unverwundenen Flügel. Dagegen ergibt die nähere Berechnung für den induzierten Widerstand:

$$W = \frac{\varrho \Gamma_0 \pi}{8} \left(1 + \frac{\beta'^2}{2\mu^2}\right).$$

Für die Momente M_y und M_z erhält man:

$$M_y = \frac{A b \beta'}{8\mu} \quad . \quad . \quad . \quad (14) \qquad \text{und} \qquad M_z = \frac{3 A^2 \beta'}{8 \pi q b \mu} \quad . \quad . \quad (15).$$

6. Bestimmung der Einflußzahl β durch den Versuch. a) Versuchsanordnung und Methode. Zur Prüfung der im Vorstehenden entwickelten Theorie erschien es wünschenswert, die Einflußzahl β durch den Versuch festzustellen. Hierzu wurde der in Abb. 5 dargestellte Rundlauf verwendet. Die Achse desselben ist am Boden und an einem Unterzug der Decke in Kugeln gelagert. Der zu untersuchende Flügel wurde zwischen den beiden Armen des Rundlaufes, die aus Stahlrohr mit günstigem Luftwiderstandsquerschnitt bestanden, in noch näher zu beschreibender Weise befestigt und zwar so, daß er um die Symmetrieachse (y-Achse) schwingen konnte. Jede Messung wurde während einer einzigen Umdrehung des Rundlaufes ausgeführt, um zu vermeiden, daß der Flügel die durch einen vorhergehenden Umlauf gestörte Luftströmung noch einmal passierte. Die Einrichtung wurde zu diesem Zweck so getroffen, daß $^1/_4$-Umdrehung zur Beschleunigung, etwas mehr als $^1/_2$-Umdrehung zur Messung und eine weitere Umdrehung zur Bremsung benutzt wurde. Die eigentliche Messung fand daher in vollkommen ruhiger und ungestörter Luft statt. Der Antrieb erfolgte, wie aus Abb. 5 ersichtlich, durch Fallgewichte, die an beiden Seiten befestigt waren und an einer

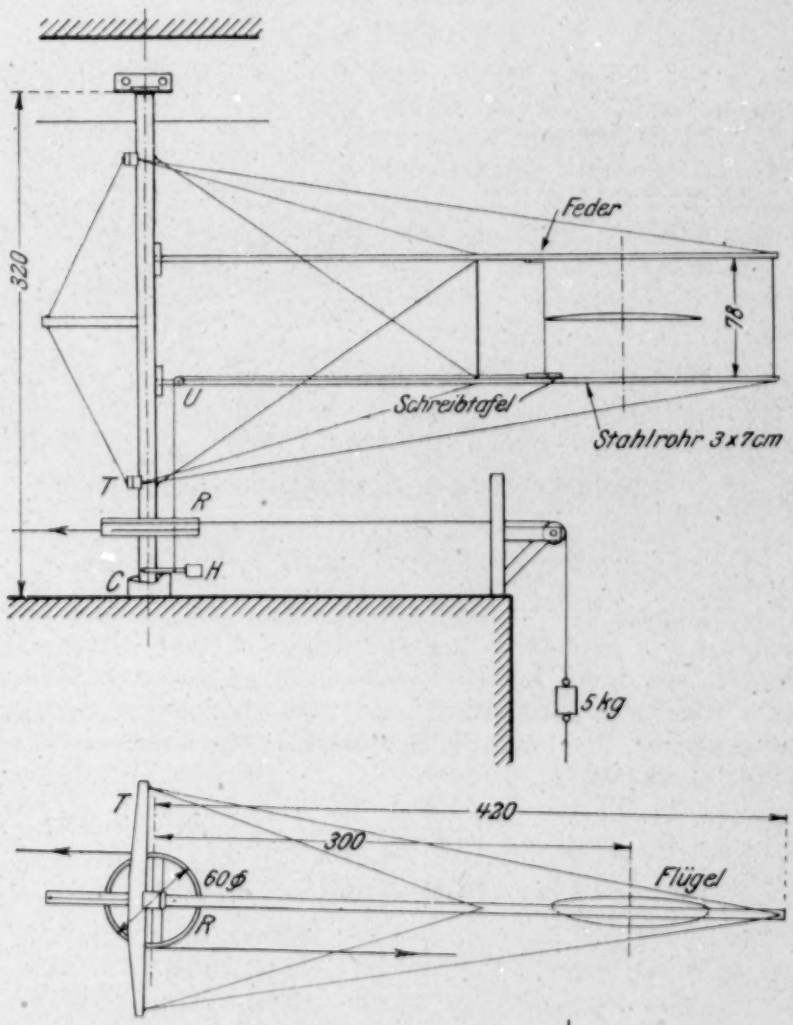


Abb. 5

Riemenscheibe R angriffen. Um eine Durchbiegung der Achse durch einseitige Wirkung der Fallgewichte auszuschalten, wurde der Antrieb doppelt an zwei gegenüberliegenden Stellen der Riemenscheibe ausgeführt, so daß auf die Achse ein reines Moment wirkte. An jedem Seil hingen zwei Gewichte. Das größere von 20 kg diente zur Beschleunigung und setzte bereits nach $^1/_4$-Umdrehung auf eine Unterlage auf. Das zweite 5 kg schwere Gewicht diente zur Ueberwindung der Bewegungswiderstände während der Periode mit konstanter Geschwindigkeit. Meistens wurde die Beschleunigung durch Ziehen an dem Querbalken T von Hand noch etwas vergrößert. Nach etwa einer Umdrehung wickelten sich die an der Riemenscheibe angreifenden beiden Seile nach der entgegengesetzten Seite auf und bewirkten dadurch zunächst eine Bremsung der Bewegung und dann, nachdem der Ruhepunkt erreicht war, eine Beschleunigung in umgekehrter Richtung. Auf diese Weise wurde der Flügel wieder in die Ausgangsstellung zurückgeführt und stand für den nächsten Versuch bereit.

Den Messungen zur Bestimmung des Quermoments lag folgendes Prinzip zugrunde: Geht die Drehachse des Flügels durch dessen Schwerpunkt, so wird bei der Bewegung auf der Kreisbahn das auftretende Quermoment den Flügel zu kippen suchen. Angenommen der Mittelpunkt der Kreisbahn liegt rechts vom Flügel (Abb. 6), so wird, falls der Auftrieb nach unten gerichtet ist (wenn z. B. der Flügel umgekehrt, d. h. mit der Druckseite nach oben aufgehängt ist), das auftretende Moment um D entgegen dem Uhrzeigersinn wirken, da der resultierende Auftrieb an einem Hebelarm e angreift. Um nun dem Moment der Luftkraft Gleichgewicht zu halten, wird unter dem Drehpunkt D ein Gewicht G angebracht, das mit dem Flügel fest verbunden ist und in vertikaler Richtung verschoben werden kann. Auf dieses Gewicht wirkt beim Umlauf des Flügels die Zentrifugalkraft C horizontal nach außen an dem Hebelarm l_1. Der Drehsinn dieses Zentrifugalkraftmomentes ist der umgekehrte wie derjenige des Quermomentes. Bei geeigneter Entfernung des Gewichtes G vom Drehpunkt wird daher zwischem dem Zentrifugalkraftmoment und dem Quermoment der Luftkraft Gleichgewicht bestehen. Dieses Gleichgewicht ist unabhängig von der Umlaufgeschwindigkeit, da sowohl der Auftrieb als auch die Zentrifugalkraft proportional mit dem Quadrat der Geschwindigkeit wachsen. Es war daher nicht erforderlich, bei jedem Umlauf die genaue Geschwindigkeit zu ermitteln; vielmehr genügte es, diese einmalig annähernd festzustellen. Quantitativ liegen die Verhältnisse folgendermaßen:

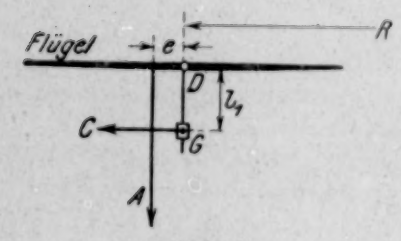


Abb. 6

Das Moment M_y der Luftkraft hat nach Gl. (9) S. 333 den Wert

$$M_y = \frac{N b^2 (\beta + 1)}{16 R}.$$

Hierbei ist der Auftrieb A durch die Normalkraft N, d. i. die auf der Flügelsehne senkrechte Komponente der Luftkraft, ersetzt. Dies war erforderlich, weil die Drehachse des Flügels nicht immer horizontal liegt, sondern je nach dem Anstellwinkel des Flügels mehr oder weniger geneigt ist. Bei einer Neigung der Drehachse ist aber nicht mehr der Auftrieb, sondern die Normalkraft für das Moment maßgebend. Das Moment M_c der Zentrifugalkraft ist

$$M_c = \frac{G v^2 l_1}{g R} \quad (g = \text{Erdbeschleunigung}).$$

Für den Gleichgewichtszustand muß $M_c = M_y$ sein, also

$$\frac{G v^2 l_1}{g R} = \frac{N b^2 (\beta + 1)}{16 R}.$$

Daraus ergibt sich

$$\beta + 1 = \frac{32 G l_1}{c_n F \gamma b^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

unter $c_n = \frac{N}{F q}$ die Normalkraftszahl und unter γ das spez. Gewicht der Luft verstanden. Von den Größen auf der rechten Seite sind F, γ und b ohne weiteres bekannt. Das Produkt $G l_1$ bestimmt man am genauesten durch Feststellung des Winkelausschlages δ, den der Flügel beim Auflegen eines bekannten Gewichtes macht. Wird auf den horizontal

liegenden Flügel im Abstande d vom Drehpunkt ein Gewicht P aufgelegt, so tritt ein gewisser Ausschlag δ ein. Durch einfache Rechnung ergibt sich dann:

$$Gl_1 = \frac{Pd}{\operatorname{tg}\delta}.$$

Der Auftrieb (bezw. die Normalkraft) ist, wie bereits gezeigt, in erster Näherung der gleiche wie bei der geradlinigen Bewegung. Wir können für ihn daher den Wert nehmen, der sich aus der Messung des Flügels im künstlichen Luftstrom für den betreffenden Anstellwinkel ergibt.

Bei den Versuchen kam es nun darauf an, das verschiebbare Gewicht G so einzustellen, daß der Flügel beim Umlauf keinen Ausschlag macht, denn dann sind Quermoment und Zentrifugalkraftmoment einander gleich. Es war zu erwarten, daß der Flügel während der Bewegung Schwingungen um die Gleichgewichtslage ausführt. Um während der Meßperiode mehrere volle Schwingungen beobachten zu können, war es erforderlich, die Schwingungsdauer des Systems zu verkleinern. Zu diesem Zwecke wurde die innere Flügelspitze durch dünne Fäden mit zwei Blattfedern verbunden, die an den beiden Armen des Rundlaufes befestigt waren (vergl. Abb. 5 und 8). Die Federn waren so bemessen, daß die Schwingungsdauer des Flügels 0,2 bis 0,3 s betrug. Die Bewegung der Flügelspitze während einer Umdrehung wurde auf eine 68 × 18 mm große Schreibtafel, aus einer berußten Glasplatte bestehend, aufgezeichnet. Der Schreibstift war an der unteren Blattfeder angebracht. Während eines Umlaufes wurde die Schreibtafel durch eine besondere Vorrichtung in radialer Richtung verschoben und dadurch die Bewegung der Flügelspitze als Funktion des zurückgelegten Weges aufgezeichnet (vergl. Abb. 10). Die Vorrichtung zur Verschiebung der Schreibtafel bestand aus einem Hebel H, der an der Rundlaufachse in einer vertikalen Ebene drehbar befestigt war. Der Arm dieses Hebels lag auf dem feststehenden Blechzylinder C auf, dessen oberer Rand nach einer Schraubenlinie abgeschnitten war. Der Hebel gleitet während des Umlaufes an der Schraubenlinie entlang. Die vertikale Bewegung, die er dadurch macht, da er infolge seines Gewichtes immer nach unten drückt, wird mit Hilfe eines Fadens, der an dem unteren Rundlaufarm um eine Rolle U gelegt ist, auf die Schreibtafel übertragen, die längs einer Schlittenführung horizontal beweglich ist. Radial nach außen wird von einer Spiralfeder ein dauernder Zug auf den Schlitten ausgeübt, so daß der Faden stets gespannt bleibt. Am Ende der Meßstrecke, also nach etwas mehr als $^3/_4$-Umdrehung wird der Schlitten mit der Schreibtafel durch eine Schnappeinrichtung festgehalten und damit das weitere Schicksal des Flügels nicht mehr berücksichtigt.

Der untersuchte Flügel besaß eine Spannweite von 100 cm und eine größte Tiefe von 20 cm. Um elliptische Verteilung des Auftriebes zu erhalten, nahm die Flügeltiefe einer Ellipse entsprechend nach außen ab. Die Druckmittelpunkte der einzelnen Querschnitte, die in $^1/_3$ der Tiefe angenommen wurden, lagen auf einer geraden Linie. Dadurch kam ein Umriß von der in Abb. 7 dargestellten Form zustande. Um dem Flügel größere Festigkeit zu geben, und die Neigung zum Verziehen möglichst zu vermindern, wurde ein ziemlich dickes Profil gewählt. Die größte Flügeldicke betrug 3 cm; das Verhältnis der größten Dicke zur Flügeltiefe war demnach 0,15. Als Material wurde Holz verwendet, das aus mehreren Schichten verleimt war. Nach den ersten Versuchen zeigte sich, daß das Gewicht des Flügels, das rd. 1,6 kg betrug, zu groß war, indem die Lagerreibung die Meßgenauigkeit ungünstig beeinträchtigte. Der Flügel wurde daraufhin von der Druckseite her ausgehöhlt, wobei nur einzelne Rippen zur Versteifung stehen blieben. Die ebene Druckseite wurde dann mit Pausleinwand überzogen. Nach dem Aus-

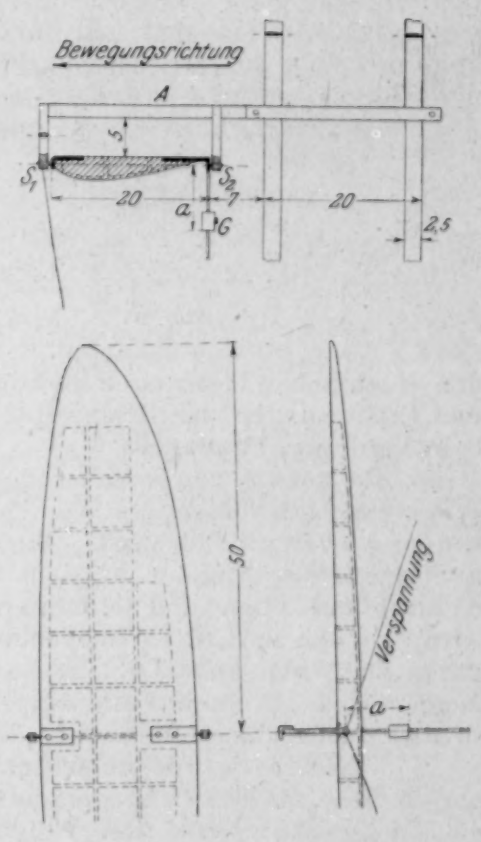


Abb. 7

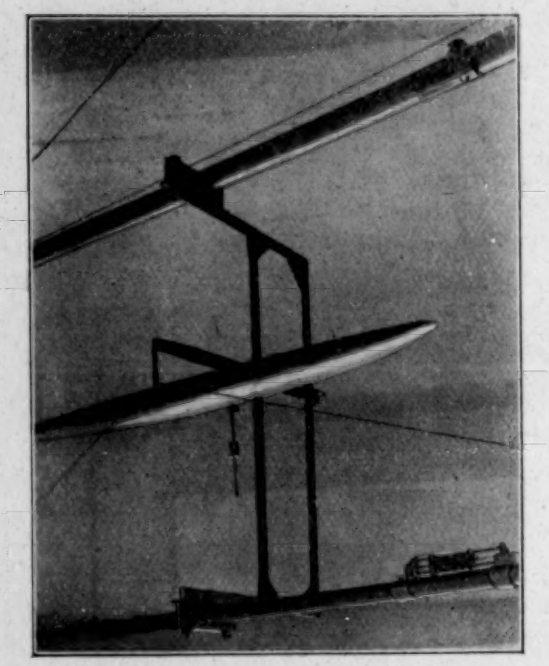


Abb. 8

höhlen betrug das Flügelgewicht nur mehr 0,72 kg Bei Herstellung der Flügelform wurde auf möglichste Symmetrie der beiden Hälften geachtet. In der Mitte des Flügels waren an der Vorder- und Hinterkante Stahlstücke eingelassen und mit konischen Bohrungen versehen. In diese Bohrungen faßten die gehärteten Spitzen von zwei Stahlschrauben S_1 und S_2, so daß nun der Flügel um die durch die Spitzen hindurchgehende Achse drehbar war. Die Lager der beiden Stahlspitzen waren an einem darüber liegenden Querarm A befestigt; dieser konnte in beliebiger Lage (zur Einstellung verschiedener Anstellwinkel) an zwei vertikalen schnittigen Streben festgeklemmt werden. Der vordere Lagerpunkt S_1 war außerdem, um eine Ausbiegung durch die Zentrifugalkraft zu vermeiden, mit dünnen Stahldrähten an den beiden Armen des Rundlaufes verankert. Alle Halteteile des Flügels waren mit Rücksicht auf möglichst geringe Störung der Strömung mit günstigem Luftwiderstandsquerschnitt ausgeführt. Das verschiebbare Gewicht G zur Erzeugung eines Zentrifugalkraftmomentes war, wie ersichtlich, an dem hinteren Lager des Flügels befestigt. Die Befestigung an den beiden Armen sowie die Schreibeinrichtung ist auf dem Lichtbild Abb. 8 zu erkennen. Die Entfernung der Flügelmitte von der Rundlaufachse betrug bei den folgenden Versuchen 300 cm.

b) **Versuche und Ergebnisse.** Es war zunächst erforderlich, den Verlauf der Geschwindigkeit während der Meßperiode zu untersuchen. Dazu wurde ein kleines Pendel verwendet, das in radialer Richtung schwingen konnte. Die Ausschläge des Pendels während des Umlaufes, hervorgerufen durch die Zentrifugalkraft, wurden auf der Schreibtafel aufgezeichnet. Da nur eine geringe Dämpfung des Pendels durch Schreibstiftreibung vorhanden war, so führte es Schwingungen um die jeweilige Gleichgewichtslage aus. Aus der Anzahl Schwingungen während eines bestimmten Weges konnte, da die Schwingungsdauer bekannt war (rd. $^1/_4$ s), die Geschwindigkeit des Flügels bestimmt werden; sie betrug bei den folgenden Versuchen rd. 8 m/s. In Abb. 9 ist eine Pause eines solchen Geschwindigkeitsdiagrammes wiedergegeben. Die ganze Diagrammlänge entspricht etwas weniger als einer vollen Umdrehung des Rundlaufes. Man sieht, daß die Beschleunigungsperiode etwa $^1/_4$ des aufgezeichneten Weges beansprucht, der übrige ist zur Messung verfügbar. Die Unregelmäßigkeiten der Schwingungen, die sich auch bei den eigentlichen Messungen mehr oder weniger zeigten, sind durch elastische Schwingungen und Erzitterungen der beiden Rundlaufarme hervorgerufen, die sich den aufzuzeichnenden Schwingungen überlagern.

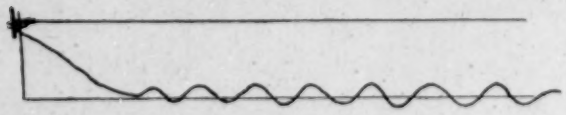


Abb. 9

Es konnte von vornherein nicht angenommen werden, daß der Flügel vollkommen symmetrisch, insbesondere ohne jede Verwindung ausgeführt ist. Eine vorhandene Verwindung aber gibt ebenfalls ein Moment um die Drehachse, das additiv zu dem von der Kreisbahn herrührenden Moment hinzutritt. Ein etwaiges Moment dieser Art läßt sich dadurch feststellen und eliminieren, daß der Flügel um 180° um die Achse gedreht wird, so daß z. B. die Druckseite, die beim ersten Versuch nach oben war, jetzt nach unten zu liegen kommt. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß das Verwindungsmoment sich in einem Falle zum Kurvenmoment addiert, im anderen dagegen subtrahiert, so daß durch das arithmetische Mittel der richtige Wert angegeben wird.

Weiterhin wurde untersucht, ob bei der Bewegung des Flügels nicht etwa unvorhergesehene Massenwirkungen auftreten, die die Ergebnisse fehlerhaft beeinflussen. Zu diesem Zwecke wurde der Flügel auf Auftrieb Null ($\alpha = -6^1/_4{}^0$) eingestellt. Es ist dann — von einem etwaigen Verwindungsmoment abgesehen — das zu messende Quer-

moment = 0. Wenn wir nun auch das Zentrifugalkraftmoment zu Null machen, indem wir das Gewicht G samt Stiel vom Flügel entfernen, so muß Gleichgewicht vorhanden sein, denn durch die Wahl der Drehachse ist der Flügel für sich in das indifferente Gleichgewicht gebracht. Die Ausschläge der Flügelspitze müssen daher symmetrisch zur Nullinie liegen. Dies war in der Tat der Fall und es zeigte sich bereits hier durch Ausführung desselben Versuches in der um 180° gedrehten Lage, daß eine merkliche Verwindung des Flügels nicht vorhanden war.

Da nach Gl. (16) zur Bestimmung von β die Kenntnis von c_n bei verschiedenen Anstellwinkeln nötig ist, so wurde im parallelen Luftstrom eine Messung zur Bestimmung von Auftrieb und Widerstand ausgeführt. Der Wert c_n, der sich von c_a bei kleinen Anstellwinkeln kaum unterscheidet, läßt sich daraus berechnen. Hierzu ist zu bemerken, daß im Luftstrom die gesamte Haltevorrichtung des Flügels einschließlich der beiden Rundlaufarme mit aufgebaut war (jedoch nicht in fester Verbindung mit dem an dem Wagen aufgehängten Flügel), damit etwaige von diesen Teilen herrührende Störungen der Luftkräfte des Flügels im parallelen Luftstrom in gleicher Weise vorhanden sind wie bei der Bewegung am Rundlauf. Die Luftgeschwindigkeit bei dieser Messung war die gleiche wie am Rundlauf, nämlich rd. 8 m/s. Die Ergebnisse sind aus der folgenden Zahlentafel ersichtlich:

α	c_a	c_w	c_n
−5,8	0,044	0,04	0,044
−2,9	0,25	0,024	0,25
0,1	0,48	0,027	0,48
3,0	0,67	0,042	0,67
6,0	0,81	0,062	0,81
8,9	0,80	0,098	0,81

Die Bestimmung des Wertes Gl_1 bei verschiedenen Stellungen des Gewichtes G in der bereits S. 337 angedeuteten Weise ergab das nachstehende Resultat. Dabei bedeutet a den Abstand der unteren Begrenzungsfläche des Gewichtes G von der Drehachse des Flügels (vergl. Abb. 7).

a (cm)	6,8	8,8	10,8	12,8	14,8	16,8
Gl_1 (cm gr) . .	438	561	664	768	875	985

Nach diesen Vorarbeiten wurden die eigentlichen Versuche ausgeführt. Eine größere Anzahl von Meßpunkten war mit Rücksicht auf eine sichere Feststellung des Wertes von β erwünscht. Die Versuche fanden daher bei 5 verschiedenen Anstellwinkeln (von 0° bis 4°) und in je zwei Lagen statt. Da nach dem Ergebnis im parallelen Luftstrom die Strömung bei Anstellwinkeln über 4° abzureißen beginnt, so wurden diese höheren Winkel nicht mehr in den Bereich der Messungen gezogen. Die Abb. 10 gibt die Aufzeichnung von zwei Versuchen wieder. Beim oberen Bild besteht zwischen den beiden Momenten kein Gleichgewicht, da noch ein merklicher Ausschlag zu erkennen ist. Beim unteren Bild hingegen liegen die Ausschläge ziemlich genau symmetrisch zur Nullinie, hier ist also Gleichgewicht vorhanden. Im Durchschnitt waren etwa 4 Umläufe nötig, bis diejenige Stellung des Gewichtes G ermittelt war, bei welcher Gleichgewicht besteht.

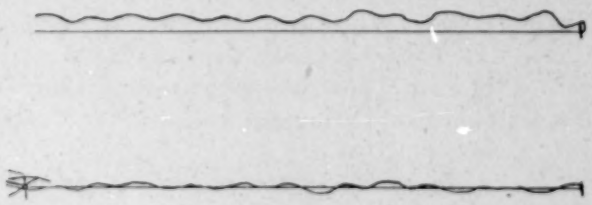


Abb. 10

Die Ergebnisse der Hauptversuche mit dem daraus nach Gl. (16) bestimmten Wert von $\beta + 1$ sind in der folgenden Zahlentafel zusammengestellt. Den Wert von $\beta + 1$ haben wir angegeben, weil diese Kombination in der Formel Gl. (9) für das Quermoment vorkommt.

Druckseite unten					Druckseite oben			
α	a	Gl_1	c_n	$\beta + 1$	a	Gl_1	c_n	$\beta + 1$
0°	98	460	0,46	1,66	100	450	0,46	1,62
1°	88	510	0,54	1,58	84	535	0,54	1,66
2°	74	590	0,60	1,62	74	590	0,60	1,62
3°	65	635	0,67	1,57	67	625	0,67	1,55
4°	48	725	0,74	1,63	45	740	0,74	1,66

Als Mittel aus diesen 10 Messungen ergibt sich für $\beta + 1$ der Wert 1,62. Die größte gemessene Abweichung von diesem Mittelwert beträgt rd. $4^1/_2$ vH. Die Genauigkeit einer Einzelmessung dürfte schätzungsweise etwa $\pm$ 3 bis 4 vH betragen. Der theoretische Wert von $\beta + 1$ für einen Flügel von dem vorliegenden Achsenverhältnis beträgt 1,71 (vergl. die Zahlentafel auf S. 332). Nach der elementaren Theorie ist, wie wir wissen, $\beta + 1 = 2$. Der experimentelle Wert von $\beta + 1$ ist, wie man sieht, um rd. 5,5 vH niedriger als der unter Zugrundelegung der Tragflügeltheorie erhaltene Wert. Die Ursachen für den geringeren experimentellen Wert können folgende sein:

1. Den theoretischen Entwicklungen liegt die Voraussetzung zugrunde, daß die Spannweite des Flügels klein ist gegenüber dem Radius der Flugbahn. Dies war bei den beschriebenen Versuchen nicht in hinreichendem Maße der Fall und es ist vielleicht möglich, daß aus diesem Grunde Abweichungen der beobachteten Art auftreten.

2. Bei dem dicken Flügel und der verhältnismäßig geringen Geschwindigkeit tritt vermutlich auf der Saugseite Ablösung der Strömung und Totwasserbildung ein. Dieses Totwasser wird durch die Zentrifugalkraft radial nach außen geschleudert und dadurch auf der Außenhälfte des Flügels die Ablösung begünstigt. Verstärkung der Ablösung bedingt Verkleinerung des Auftriebes der äußeren Flügelhälfte und somit kleineres Quermoment. Bei großen Geschwindigkeiten und großen Flügeltiefen (große Reynoldssche Zahlen) tritt erfahrungsgemäß die Totwasserbildung immer mehr in den Hintergrund, so daß dann $\beta + 1$ möglicherweise dem theoretischen Wert zustreben wird.

Die Versuche bestätigen mit ausreichender Sicherheit das theoretische Resultat, daß nämlich das wirkliche Quermoment kleiner ist als dasjenige, das auf Grund der einfachen geometrischen Vorstellung berechnet wird, bei der der Einfluß des ringförmigen Wirbelbandes auf dem Flügel außer acht gelassen wird. 170

Über die Spannungen in freitragenden gefüllten Rohren.

Von **E. SCHWERIN** in Charlottenburg.

In einer 1920 veröffentlichten Arbeit hat Thoma[1]) die Spannungen berechnet, die in einem freitragenden, gefüllten Rohr infolge des Gewichts der Flüssigkeit auftreten, und zwar unter der Voraussetzung, daß die Biegungsfestigkeit der Wandung selbst vernachlässigt werden kann. Hierbei ergab sich, daß die dann allein auftretenden Normal- und Schubspannungen aus den Gleichgewichtsbedingungen gefunden werden können und sich in geschlossener Form angeben lassen.

In der vorliegenden Arbeit soll nun der Einfluß der Biegungs- und Torsionsfestigkeit der Wandung eingehend verfolgt werden, und zwar nicht nur bei Belastung durch das Flüssigkeits-, sondern auch durch das Eigengewicht des Rohres selbst; ferner wird nicht nur das wagerecht liegende, sondern auch das geneigte Rohr in den Kreis der Betrachtung gezogen werden.

I. Spannungen infolge des Flüssigkeitsgewichts im wagerecht liegenden Rohr.

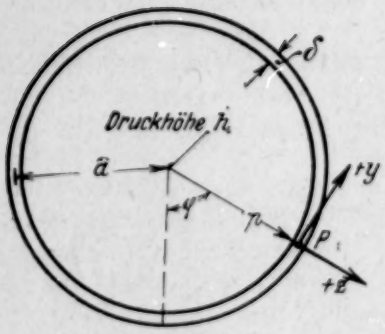


Abb 1

1. Aufstellung der Gleichungen. Das wagerecht gelagerte Rohr, mit Flüssigkeit vom spez. Gew. γ gefüllt, habe die Wandstärke δ, den Radius der Mittelfläche a und die Länge l; das Material besitze das spez. Gew. γ_E und die Elastizitätszahl E. In der Zylinderachse sei eine Druckhöhe h vorhanden, so daß nach Abb. 1 der in Richtung des Radius wirkende Flüssigkeitsdruck p in einem Punkt P, durch den Zentriwinkel φ charakterisiert, beträgt:

$$p = \gamma\,(h + a\cos\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Der Punkt P sei zum Anfangspunkt eines Koordinatensystems gewählt, dessen x-Achse in Richtung der Rohrachse nach links weist und dessen y- und z-Achse wie oben

[1]) Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen, 1920.

angegeben gerichtet sind. Auf die nach wachsendem x und y hin gelegenen Seitenflächen des Zylinderelements wirken dann folgende, auf die ganze Wandstärke δ und die Längeneinheit bezogenen Resultanten von Kräften und Momenten:

längs des Querschnitts des Rohres:

gleichmäßig über die Wandstärke verteilte Normalspannungen als Zugspannungen positiv, mit der Resultierenden T_1; linear mit dem Abstand von der Mittelfläche wachsende Biegungsspannungen, statisch gleichwertig einem Kräftepaar vom Moment G_1, positiv, wenn auf Zubiegung der Schale hinwirkend;

Schubspannungen in Richtung der z-Achse mit der Resultierenden N_1;

Torsionsspannungen statisch gleichwertig einem Torsionsmoment H_1, positiv, wenn entgegengesetzt dem Uhrzeiger drehend;

Schubspannungen in Richtung der y-Achse mit der Resultierenden S_1;

längs der Zylindererzeugenden:

analoge Spannungsresultanten T_2, N_2 und Spannungsmomente G_2, gleichfalls als zubiegende Momente positiv;

Schubspannungen in Richtung der negativen x-Achse mit der Resultierenden S_2;

Torsionsspannungen, gleichwertig einem Torsionsmoment H_2, positiv im Sinne des Uhrzeigers.

Die Formänderung der Schale sei in folgender Weise gekennzeichnet:

u, v, w die in die Richtungen der bezw. x, y, z-Achsen fallenden Verschiebungskomponenten von P.

ε_1 ε_2 in der Mittelfläche gemessene Dehnungen in Richtung der Erzeugenden bezw. senkrecht dazu.

ω Winkelverkleinerung des ursprünglich rechten, von den positiven x- und y-Richtungen eingeschlossenen Winkels.

$\varkappa_1$ $\varkappa_2$ Krümmungsänderungen in Richtung der Erzeugenden bezw. senkrecht dazu, als Aufbiegungen positiv.

τ der gegenseitige Verdrehungswinkel zweier auf derselben Erzeugenden im Abstand der Längeneinheit liegender Querschnittselemente, positiv im Sinne von H_1.

Bezeichnet σ den Querkontraktionskoeffizienten und wird zur Abkürzung:

$$D = \frac{E\,\delta^3}{12\,(1-\sigma^2)}$$

gesetzt, so sind nach Love[1]) die Spannungsresultanten bezw. Spannungsmomente mit den Formänderungen in folgender Weise verbunden:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{12\,D}{\delta^3}\,(\varepsilon_1 + \sigma\,\varepsilon_2) & G_1 &= -D\,(\varkappa_1 + \sigma\,\varkappa_2) + T_1\,\frac{\delta^2}{12\,a} \\ T_2 &= \frac{12\,D}{\delta^3}\,(\varepsilon_2 + \sigma\,\varepsilon_1) & G_2 &= -D\,(\varkappa_2 + \sigma\,\varkappa_1) \\ S_1 &= \frac{12\,D}{\delta^3}\,\frac{1-\sigma}{2}\,\omega & H_1 &= D\,(1-\sigma)\,\tau - S_1\,\frac{\delta^2}{12\,a} \\ & & H_2 &= -D\,(1-\sigma)\,\tau \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (\mathrm{I})$$

Die Hinzufügung der T_1 und S_1 enthaltenden Korrektionsglieder in den Formeln für G_1 und H_1 ist deshalb notwendig, weil die Biegungsverzerrungen $\delta\varkappa$, $\delta\tau$ klein gegen die Reckungen ε, ω sind.

Ferner ergeben sich aus den von Love angegebenen allgemeinen Beziehungen, wenn zur Abkürzung:

$$\xi = \frac{x}{a} \qquad \frac{\partial U}{\partial \xi} = U' \qquad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \dot{U}$$

geschrieben wird, folgende Formänderungs-Verschiebungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a\,\varepsilon_1 &= u' & a^2\,\varkappa_1 &= w'' \\ a\,\varepsilon_2 &= \dot{v} + w & a^2\,\varkappa_2 &= \dot{w}' - \dot{v} \\ a\,\omega &= v' + \dot{u} & a^2\,\tau &= \dot{w}' - v' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (\mathrm{II}),$$

[1]) A. E. H. Love, Lehrb. d. Elastizität, deutsch von A. Timpe, Teubner 1907, S. 604, 605, (36) u. (39).

während die Gleichgewichtsbedingungen am Zylinderelement lauten:

$$\begin{aligned} T_1' - S_2 &= 0 & H_1' - G_2 + N_2\, a &= 0 \\ S_1' + T_2 + N_2 &= 0 & G_1' + H_2 - N_1\, a &= 0 \\ N_1' + N_2 - T_2 + a\gamma\,(h + a\cos\varphi) &= 0 & -H_2 + (S_1 + S_2)\, a &= 0 \end{aligned}$$

oder auch, wenn S_2 mit Hilfe der letzten Gleichung und H_2 mittels (I.) eliminiert wird:

$$\left.\begin{aligned} T_1' + S_1\left(1 + \frac{\delta^2}{12\,a^2}\right) + \frac{H_1}{a} &= 0 & H_1' - G_2 + N_2\, a &= 0 \\ S_1' + T_2 + N_2 &= 0 & G_1' - H_1 - S_1\, a\,\frac{\delta^2}{12\,a^2} - N_1\, a &= 0 \\ N_1' + N_2 - T_2 + a\gamma\,(h + a\cos\varphi) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}.$$

Nun besteht die in diesen Gleichungen auftretende, von den äußeren Kräften abhängige »Störungsfunktion« $a\gamma\,(h + a\cos\varphi)$ aus den beiden Gliedern $a\gamma h$ und $a^2\gamma\cos\varphi$ und es wird daher der schließlich resultierende Gesamtspannungszustand, da für das hier vorliegende lineare Gleichungssystem das Superpositionsgesetz gilt, als Ueberlagerung der den beiden Einflüssen $a\gamma h$ und $a^2\gamma\cos\varphi$ entsprechenden Spannungszustände erhalten werden können. Man erkennt, daß das konstante Störungsglied $a\gamma h$ einen rotationssymmetrischen, das Glied $a^2\gamma\cos\varphi$ hingegen einen in bezug auf φ sinus- bezw. cosinusförmig verlaufenden Spannungszustand hervorrufen wird, von denen der letztere, also der Fall $h = 0$, zunächst betrachtet werde.

2. Der sinusförmige Spannungszustand infolge von $a^2\gamma\cos\varphi$. Mit $h = 0$ kann wenn zur Abkürzung

$$\frac{\delta^2}{12\,a^2} = \varepsilon \qquad S_1 = S \qquad H_1 = H$$

gesetzt wird, den Gleichungen (I), (II), (III) durch folgenden Ansatz genügt werden:

$$\begin{aligned} T_1 &= \overline{T_1}\cos\varphi & G_1 &= \overline{G_1}\cos\varphi & \overline{N_1} &= N_1\cos\varphi \\ T_2 &= \overline{T_2}\cos\varphi & G_2 &= \overline{G_2}\cos\varphi & \overline{N_2} &= N_2\sin\varphi \\ S &= \overline{S}\sin\varphi & H &= \overline{H}\sin\varphi \\ \varepsilon_1 &= \overline{\varepsilon_1}\cos\varphi & \varkappa_1 &= \overline{\varkappa_1}\cos\varphi & u &= \overline{u}\cos\varphi \\ \varepsilon_2 &= \overline{\varepsilon_2}\cos\varphi & \varkappa_2 &= \overline{\varkappa_2}\cos\varphi & v &= \overline{v}\sin\varphi \\ \omega &= \overline{\omega}\sin\varphi & \tau &= \overline{\tau}\sin\varphi & w &= \overline{w}\cos\varphi \end{aligned}$$

wo die überstrichenen Größen nur noch Funktionen von x darstellen. Hiermit gehen die Gleichgewichtsbedingungen (III), wenn wir die Querstriche nachträglich fortlassen, über in

$$\left.\begin{aligned} T_1' + S\,(1 + \varepsilon) + \frac{H}{a} &= 0 & H' + G_2 + N_2\, a &= 0 \\ S' - T_2 + N_2 &= 0 & G_1' - H - S\, a\,\varepsilon - N_1\, a &= 0 \\ N_1' + N_2 - T_2 + a^2\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(III a)},$$

während die Formänderungsbedingungen lauten:

$$a\,\varepsilon_1 = u', \quad a\,\varepsilon_2 = v + w, \quad a\,\omega = v' - u, \quad a^2\varkappa_1 = w'', \quad a^2\varkappa_2 = -w - v, \quad a^2\tau = -w' - v'$$

$$T_1 = \frac{12\,D}{\delta^3}(\varepsilon_1 + \sigma\,\varepsilon_2), \qquad T_2 = \frac{12\,D}{\delta^3}(\varepsilon_2 + \sigma\,\varepsilon_1), \qquad S = \frac{12\,D}{\delta^3}\,\frac{1-\sigma}{2}\,\omega$$

$$G_1 = -D\,(\varkappa_1 + \sigma\,\varkappa_2) + T_1\,a\,\varepsilon, \quad G_2 = -D\,(\varkappa_2 + \sigma\,\varkappa_1), \quad H = +D\,(1-\sigma)\,\tau - S\,a\,\varepsilon.$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich nun in folgender Weise zu einer einzigen Gleichung zusammenziehen. Die Addition der mit a multiplizierten ersten Gleichgewichtsbedingung zur letzten ergibt:

$$a\,T_1' + G_1' + a\,(S - N_1) = 0 \quad \ldots \quad (3\,\text{a}),$$

ferner folgt aus der Subtraktion der zweiten von der dritten Gleichgewichtsbedingung:

$$N_1' - S' + a^2\gamma = 0, \text{ somit } N_1 = S - a^2\gamma\,\xi - c_1 \quad \ldots \quad (2)$$

und zufolge (3 a)

$$a\,T_1 + G_1 + a\left(a^2\gamma\,\frac{\xi^2}{2} + c_1\,\xi + c_2\right) = 0 \quad \ldots \quad (3).$$

Elimiminiert man aus den Gl. (III a) zunächst N_1 und N_2 und zwar mittelst der Beziehungen:

$$N_1 = S - a^2\gamma\,\xi - c_1, \quad N_2 = -\frac{1}{a}\,(H' + G_2) \quad \ldots \quad (4),$$

so erhält man folgende drei Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} T_1' + S(1+\varepsilon) + \frac{H}{a} = 0, \quad S' - T_2 - \frac{H' + G_2}{a} = 0, \\ a\,T_1 + G_1 + a\left(a^2\gamma\,\frac{\xi^2}{2} + c_1\,\xi + c_2\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(IIIb)}.$$

Aus diesen folgt:

$$\left.\begin{aligned} G_1 = -a\,T_1 - a\left(a^2\gamma\,\frac{\xi^2}{2} + c_1\,\xi + c_2\right) \\ G_2 = a\,[(2+\varepsilon)\,S' - T_2 - T_1''], \quad H = -a\,T_1' - a\,S(1+\varepsilon) \end{aligned}\right\} \quad \text{(IIIc)}.$$

Andererseits liefern die Formänderungsbedingungen (IIa) die Beziehungen:

$$\omega' + \varepsilon_1 = -a\,(\varkappa_2'' + \varkappa_1), \quad \varepsilon_2 = -a\,\varkappa_2, \quad \tau = a\,\varkappa_2' \quad \ldots \quad \text{(IIb)}.$$

Ersetzt man hierin mit Hilfe der Gl. (Ia) die Formänderungen durch die Spannungsresultanten, so erhält man folgende weiteren Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} -G_1 + a\,\varepsilon\,T_1 + \sigma\,G_2 + (1+\sigma)\,(H' + a\,S'\,\varepsilon) = -a\,\varepsilon\,[2S'(1+\sigma) + T_1 - T_2\,\sigma] \\ a\,\varepsilon\,(T_2 - T_1\,\sigma) = G_2 - G_1\,\sigma + \sigma\,T_1\,a\,\varepsilon \\ H + a\,\varepsilon S + \frac{a\,\varepsilon}{1+\sigma}\,(T_2' - T_1'\,\sigma) \quad 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(IIc)}$$

und schließlich durch Einführung von (IIIc) in (IIc) drei Gleichungen für $T_1\ T_2\ S$:

$$-(1+\sigma)\,(T_1'' + S') + T_1\,(1+\varepsilon) + \sigma\,S'\,(2+\varepsilon) - \sigma\,T_2 + \sigma\,T_1''$$
$$+ \varepsilon\,[2S'(1+\sigma) + T_1 - T_2\,\sigma] + a^2\gamma\,\frac{\xi^2}{2} + c_1\,\xi + c_2 = 0 \quad \ldots \quad (5),$$

$$\varepsilon\,(T_2 - T_1\,\sigma) - S'\,(2+\varepsilon) + T_2 - T_1'' - \sigma\,T_1 - \sigma\left(a^2\gamma\,\frac{\xi^2}{2} + c_1\,\xi + c_2\right) = 0 \quad \ldots \quad (6),$$

$$-T_1' - S + \frac{\varepsilon}{1+\sigma}\,(T_2' - T_1'\,\sigma) = 0 \quad \ldots \quad (7).$$

Aus der zweiten derselben folgt:

$$T_2 = \sigma\,T_1 + \frac{1}{1+\varepsilon}\,[S'(2+\varepsilon) + T_1'' + \sigma\left(a^2\gamma\,\frac{\xi^2}{2} + c_1\,\xi + c_2\right) \quad \ldots \quad (8).$$

Setzt man dies in (5) und (7) ein und eliminiert schließlich noch S, so erhält man für die Längsspannungsresultante T_1, wenn nur die erste Potenz der sehr kleinen Größe $\varepsilon = \frac{\delta^2}{12\,a^2}$ beibehalten und:

$$\frac{1-\sigma^2}{\varepsilon} = \frac{12\,a^2}{\delta^2}(1-\sigma^2) = \nu^4$$

gesetzt wird:

$$T_1^{(\mathrm{IV})} + \alpha_1\,T_1'' + \alpha^2\,T_1 + \beta_1\,\xi^2 + \beta_2\,\xi + \beta_3 = 0 \quad \ldots \quad \text{(IV)},$$

wo:

$$\alpha_1 = -4 - 2\,\varepsilon\,\frac{2+3\,\sigma}{1+\sigma}, \quad \alpha_2 = \nu^4\left(1 + \varepsilon\,\frac{\sigma^2}{1-\sigma^2}\right),$$

$$\beta_1 = \frac{\gamma}{2}\,a^2\,\nu^4\,\frac{1+\varepsilon}{1+3\,\varepsilon} = \sim \frac{\gamma}{2}\,a^2\,\nu^4\,(1-2\,\varepsilon), \quad \beta_2 = c_1\,\nu^4\,\frac{1+\varepsilon}{1+3\,\varepsilon} = \sim c_1\,\nu^4\,(1-2\,\varepsilon),$$

$$\beta_3 = c_2\,\nu^4\,\frac{1+\varepsilon}{1+3\,\varepsilon} = \sim c_2\,\nu^4\,(1-2\,\varepsilon).$$

Das Problem ist somit auf die Integration der Gl. (IV) zurückgeführt.

3. Integration. Das vollständige Integral der linearen Differentialgleichung (IV) mit konstanten Koeffizienten lautet:

$$T_1 = C_1 \sin(\mu_2\,\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu_1\,\xi) + C_2 \sin(\mu_2\,\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu_1\,\xi) + C_3 \cos(\mu_2\,\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu_1\,\xi) + C_4 \cos(\mu_2\,\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu_1\,\xi) + \mathfrak{T}_{1_2}\,\xi^2 + \mathfrak{T}_{1_1}\,\xi + \mathfrak{T}_{1_0}$$

wo:

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{\nu^2}{2}\left(1 - \varepsilon\,\frac{\sigma^2}{1-\sigma^2}\right) + 1 + \varepsilon\,\frac{2+3\,\sigma}{2\,(1+\sigma)}} \qquad \mu_2 = \sqrt{\frac{\nu^2}{2}\left(1 - \varepsilon\,\frac{\sigma^2}{1-\sigma^2}\right) - 1 - \varepsilon\,\frac{2+3\,\sigma}{2\,(1+\sigma)}}$$

so daß also

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 = \nu^2\left(1 - \varepsilon\,\frac{\sigma^2}{1-\sigma^2}\right), \quad \mu_1^2 - \mu_2^2 = 2 + \varepsilon\,\frac{2+3\,\sigma}{1+\sigma} \quad \ldots \quad \text{(IVa)}$$

und ferner:

$$\mathfrak{T}_{1_2} = -\frac{\gamma}{2}\,a^2\left(1 - \frac{2-\sigma^2}{1-\sigma^2}\,\varepsilon\right), \qquad \mathfrak{T}_{1_1} = -c_1\left(1 - \frac{2-\sigma^2}{1-\sigma^2}\,\varepsilon\right),$$

$$\mathfrak{T}_{1_0} = -c_2\left(1 - \frac{2-\sigma^2}{1-\sigma^2}\,\varepsilon\right) - \gamma\,a^2\,\varepsilon\,\frac{2+\sigma}{1-\sigma^2}$$

während $C_1 \ldots . C_4$ die vier willkürlichen Integrationskonstanten bezeichnen.

Aus T_1 lassen sich die übrigen Spannungs- und Formänderungsgrößen ohne Schwierigkeit bestimmen. Man erhält nach (5a), (7a) zunächst für S:

$$S = S^{(1)} \sin(\mu_2 \xi)\, \mathfrak{Sin}(\mu_1 \xi) + S^{(2)} \sin(\mu_2 \xi)\, \mathfrak{Cof}(\mu_1 \xi) + S^{(3)} \cos(\mu_2 \xi)\, \mathfrak{Sin}(\mu_1 \xi) + S^{(4)} \cos(\mu_2 \xi)\, \mathfrak{Cof}(\mu_1 \xi) + \mathfrak{S},$$

wo mit der Abkürzung:

$$\frac{1 - \sigma + \varepsilon \dfrac{2 - \sigma^2}{1 + \sigma}}{\gamma^2} = \varrho_1.$$

$$\left.\begin{aligned} S^{(1)} &= C_2 \mu_1 \frac{\varrho_1 - 1}{1 - 2\varepsilon} + C_3 \mu_2 \frac{\varrho_1 + 1}{1 - 2\varepsilon} & S^{(3)} &= C_4 \mu_1 \frac{\varrho_1 - 1}{1 - 2\varepsilon} - C_1 \mu_2 \frac{\varrho_1 + 1}{1 - 2\varepsilon} \\ S^{(2)} &= C_1 \mu_1 \frac{\varrho_1 - 1}{1 - 2\varepsilon} + C_4 \mu_2 \frac{\varrho_1 + 1}{1 - 2\varepsilon} & S^{(4)} &= C_3 \mu_1 \frac{\varrho_1 - 1}{1 - 2\varepsilon} - C_2 \mu_2 \frac{\varrho_1 + 1}{1 - 2\varepsilon} \\ \mathfrak{S} &= (\gamma a^2 \xi + c_1)\left(1 - \varepsilon \frac{2 - \sigma}{1 - \sigma^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Sodann folgt aus (8) für T_2, wenn

$$2 + \sigma + \varepsilon \frac{5 + 16\sigma + 9\sigma^2}{1 + \sigma} = \varrho_2$$

eingeführt wird:

$$T_2 = T_2^{(1)} \sin(\mu_2 \xi)\, \mathfrak{Sin}(\mu_1 \xi) + T_2^{(2)} \sin(\mu_2 \xi)\, \mathfrak{Cof}(\mu_1 \xi) + T_2^{(3)} \cos(\mu_2 \xi)\, \mathfrak{Sin}(\mu_1 \xi) + T_2^{(4)} \cos(\mu_2 \xi)\, \mathfrak{Cof}(\mu_1 \xi) + \mathfrak{T}_{2_2} \xi^2 + \mathfrak{T}_{2_1} \xi + \mathfrak{T}_{2_0}$$

wo: $T_2^{(1)} = -C_1 \varrho_2 + 2 C_4 \mu_1 \mu_2 (1 + 5\varepsilon)$, $T_2^{(2)} = -C_2 \varrho_2 + 2 C_3 \mu_1 \mu_2 (1 + 5\varepsilon)$,
$T_2^{(3)} = -C_3 \varrho_2 - 2 C_2 \mu_1 \mu_2 (1 + 5\varepsilon)$, $T_2^{(4)} = -C_4 \varrho_2 - 2 C_1 \mu_1 \mu_2 (1 + 5\varepsilon)$

und:

$$\mathfrak{T}_{2_2} = \varepsilon \frac{\sigma}{1 - \sigma^2} \gamma \frac{a^2}{2}, \quad \mathfrak{T}_{2_1} = \varepsilon \frac{\sigma}{1 - \sigma^2} c_1, \quad \mathfrak{T}_{2_0} = \gamma a^2 + \varepsilon \left(-2\gamma a^2 \frac{1 + \sigma^2}{1 - \sigma^2} + c_2 \frac{\sigma}{1 - \sigma^2}\right).$$

Für das Torsionsmoment H_1 erhält man nach (III c):

$$H_1 = H_1^{(1)} \sin(\mu_2 \xi)\, \mathfrak{Sin}(\mu_1 \xi) + H_1^{(2)} \sin(\mu_2 \xi)\, \mathfrak{Cof}(\mu_1 \xi) + H_1^{(3)} \cos(\mu_2 \xi)\, \mathfrak{Sin}(\mu_1 \xi) + H_1^{(4)} \cos(\mu_2 \xi)\, \mathfrak{Cof}(\mu_1 \xi) + \mathfrak{H}$$

wo:

$$\begin{aligned} H_1^{(1)} &= C_2 \mu_1 [\varrho_1 - 3\varepsilon(1 - \varrho_1)] + C_3 \mu_2 [\varrho_1 + 3\varepsilon(1 + \varrho_1)] \\ H_1^{(2)} &= C_1 \mu_1 [\varrho_1 - 3\varepsilon(1 - \varrho_1)] + C_4 \mu_2 [\varrho_1 + 3\varepsilon(1 + \varrho_1)] \\ H_1^{(3)} &= C_4 \mu_1 [\varrho_1 - 3\varepsilon(1 - \varrho_1)] - C_1 \mu_2 [\varrho_1 + 3\varepsilon(1 + \varrho_1)] \\ H_1^{(4)} &= C_3 \mu_1 [\varrho_1 - 3\varepsilon(1 - \varrho_1)] - C_2 \mu_2 [\varrho_1 + 3\varepsilon(1 + \varrho_1)] \end{aligned}$$

$$\mathfrak{H} = -a(\gamma a^2 \xi + c_1)\, \varepsilon \frac{1 + 2\sigma}{1 + \sigma},$$

während die Spannungsmomente G_1 G_2 und die Querkraft N_1 sich nach (III c), (II c), (7) direkt bestimmen aus:

$$G_1 = -a T_1 - a\left(a^2 \gamma \frac{\xi^2}{2} + c_1 \xi + c^2\right)$$

$$G_2 = -a\varepsilon T_2 - \sigma a T_1 (1 + 2\varepsilon) - a\sigma\left(a^2 \gamma \frac{\xi^2}{2} + c_1 \xi + c^2\right)$$

$$N_1 = S - a^2 \gamma \xi - c_1.$$

Hiernach werden die Partikulärlösungen:

$$G_1 = \frac{a\varepsilon}{1 - \sigma^2}\left[-(2 - \sigma^2)\left(\gamma \frac{a^2}{2} \xi^2 + c_1 \xi + c_2\right) + \gamma a^2 (2 + \sigma)\right]$$

$$G_2 = \frac{a\varepsilon}{1 - \sigma^2}\left[-\sigma\left(\gamma \frac{a^2}{2} \xi^2 + c_1 \xi + c_2\right) + \gamma a^2 (1 + 2\sigma)\right]$$

$$\mathfrak{N}_1 = -\varepsilon \frac{2 - \sigma}{1 - \sigma^2} (\gamma a^2 \xi + c_1).$$

Für die Querkraft N_2 folgt nach (III a):

$$N_2 = N_2^{(1)} \sin(\mu_2 \xi)\, \mathfrak{Sin}(\mu_1 \xi) + N_2^{(2)} \sin(\mu_2 \xi)\, \mathfrak{Cof}(\mu_1 \xi) + N_2^{(3)} \cos(\mu_2 \xi)\, \mathfrak{Sin}(\mu_1 \xi) + N_2^{(4)} \cos(\mu_2 \xi)\, \mathfrak{Cof}(\mu_1 \xi) + \mathfrak{N}_{2_2} \xi^2 + \mathfrak{N}_{2_1} \xi + \mathfrak{N}_{2_0}$$

wo mit

$$\varrho_3 = 1 + \varepsilon \frac{3 + 9\sigma + 5\sigma^2}{1 + \sigma},$$

$$N_2^{(1)} = -C_1 \varrho_3 + 6 C_4 \mu_1 \mu_2 \varepsilon, \quad N_2^{(2)} = -C_2 \varrho_3 + 6 C_3 \mu_1 \mu_2 \varepsilon,$$
$$N_2^{(3)} = -C_3 \varrho_3 + 6 C_2 \mu_1 \mu_2 \varepsilon, \quad N_2^{(4)} = -C_4 \varrho_3 - 6 C_1 \mu_1 \mu_2 \varepsilon,$$

$$\mathfrak{N}_{2_2} = \mathfrak{T}_{2_2} = \varepsilon \frac{\sigma}{1 - \sigma^2} \gamma \frac{a^2}{2}, \quad \mathfrak{N}_{2_1} = \mathfrak{T}_{2_1} = \varepsilon \frac{\sigma}{1 - \sigma^2} c_1, \quad \mathfrak{N}_{2_0} = \varepsilon\sigma\left(-\gamma a^2 \frac{1 + 2\sigma}{1 - \sigma^2} + \frac{c_2}{1 - \sigma^2}\right).$$

Für die Verschiebungen u, v, w erhält man nach einigen Umformungen:

$$\frac{E\delta}{a}u = u^{(1)}\sin(\mu_2\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu_1\xi) + u^{(2)}\sin(\mu_2\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu_1\xi) + u^{(3)}\cos(\mu_2\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu_1\xi) + u^{(4)}\cos(\mu_2\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu_1) + u_3\xi^3 + u_2\xi^2 + u_1\xi + c_1'$$

wo, wenn:

$$\frac{1-\sigma^2}{\nu^2} - \sigma\varrho_1(2+3\varepsilon) + \sigma(1+4\varepsilon) = \varrho_4',$$

$$\frac{1-\sigma^2}{\nu^2} - \sigma\varrho_1(2+3\varepsilon) - \sigma(1+4\varepsilon) = \varrho_4'',$$

$$u^{(1)} = \mu_1 C_2\varrho_4' + \mu_2 C_3\varrho_4'', \quad u^{(2)} = \mu_1 C_1\varrho_4' + \mu_2 C_4\varrho_4'',$$
$$u^{(3)} = \mu_1 C_4\varrho_4' - \mu_2 C_1\varrho_4'', \quad u^{(4)} = \mu_1 C_3\varrho_4' - \mu_2 C_2\varrho_4''$$

und:

$$u_3 = -\gamma\frac{a^2}{6}(1-2\varepsilon), \quad u_2 = -\frac{c_1}{2}(1-2\varepsilon), \quad u_1 = -c_2(1-2\varepsilon) - \gamma a^2\left[\sigma + \varepsilon\frac{2-\sigma-2\sigma^3}{1+\sigma}\right],$$

während c_1' eine willkürliche Translationskonstante.

Für v folgt der gleiche Ausdruck, nur daß an Stelle der $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ . . ., u_1, u_2 . . . mit

$$2+\sigma+2\varepsilon\frac{1+3\sigma+\sigma^2}{1+\sigma} = \varrho_5$$

die Werte treten:

$$v_1^{(1)} = -C_1\varrho_5 + 2\varepsilon C_4\mu_1\mu_2\frac{3+\sigma}{1+\sigma}, \quad v_2^{(2)} = -C_2\varrho_5 + 2\varepsilon C_3\mu_1\mu_2\frac{3+\sigma}{1+\sigma},$$

$$v^{(3)} = -C_3\varrho_5 - 2\varepsilon C_2\mu_1\mu_2\frac{3+\sigma}{1+\sigma}, \quad v^{(4)} = -C_4\varrho_5 - 2\varepsilon C_1\mu_1\mu_2\frac{3+\sigma}{1+\sigma},$$

$$\mathfrak{v}_4 = \frac{u_3}{4}, \quad \mathfrak{v}_3 = \frac{u_2}{3}, \quad \mathfrak{v}_2 = \frac{u_1}{2} + (1+\sigma)\gamma a^2\left(1-\varepsilon\frac{2-\sigma}{1-\sigma^2}\right),$$

$$\mathfrak{v}_1 = c_1' + 2(1+\sigma)\left(1-\varepsilon\frac{2-\sigma}{1-\sigma^2}\right)c_1.$$

Auch hier tritt eine weitere, willkürliche Translationskonstante c_2' auf.

Die radiale Verschiebung w ist endlich gegeben durch:

$$w = \frac{T_2 - T_1\sigma}{E\delta} - v.$$

Von Wichtigkeit ist ferner die Größe $w' = \frac{dw}{d\left(\frac{x}{a}\right)}$, die die Drehung der Erzeugenden bei der Deformation darstellt. Für diese folgt aus (IIa):

$$w' = -a^2\tau - v' = -a^2\tau - a\omega - u$$

und somit nach (Ia):

$$w' = -\frac{a^2}{D(1-\sigma)}(H + 3a\varepsilon S) - u.$$

Durch die im vorstehenden angegebenen Werte sämtlicher Spannungs- und Deformationsgrößen ist der Spannungszustand vollständig und eindeutig bestimmt und es läßt sich jetzt folgendes erkennen:

Die C_1 . . . . . C_4 enthaltenden Teile der Lösungen, die die Integrale des homogenen Gleichungssystems darstellen, nehmen von den Rohrenden aus rasch ab, sind jedoch für die Spannungsverteilung an den letzteren bezw. den Versteifungsringen von Bedeutung. Gegen die Mitte jeder Rohröffnung hin werden jedoch die durch die deutschen Buchstaben gekennzeichneten Partikulärlösungen fast allein maßgebend sein. Nun liefern die letzteren für die Biegungsmomente G_1 G_2 H, sowie für N_1 N_2 Werte von der Größenordnung $\varepsilon a T$ bezw. εT, d. h. da $\varepsilon = \frac{\delta^2}{12a^2}$ meist sehr klein, ist der Einfluß der Biegungssteifigkeit der Rohrwandung selbst sehr gering.

Noch deutlicher wird dies, wenn man den Quotienten $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{T}}$ bildet, der das Herausrücken der Stützlinie aus der Mittelfläche angibt. Man erhält z. B. in der Mitte eines an seinen beiden Enden frei gestützten Rohres, wenn

$$\mathfrak{T}_{1(0)} = \gamma\frac{l^2}{8}, \qquad \mathfrak{T}_{2(0)} = \gamma a^2$$

die Längsspannungen ohne Berücksichtigung der Biegungsfestigkeit bezeichnen:

$$\frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{T}_{1(0)}} = \delta\,\frac{\delta}{12\,a}\left(\frac{2-\sigma^2}{1-\sigma^2} + 8\,\frac{a^2}{l^2}\,\frac{2+\sigma}{1-\sigma^2}\right); \qquad \frac{\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{T}_{2(0)}} = \delta\,\frac{\delta}{12\,a}\left(\frac{1+2\sigma+\sigma^3\,\frac{l^2}{8\,a^2}}{1-\sigma^2}\right)$$

d. h. für das schon verhältnismäßig dickwandige Rohr von $\frac{\delta}{a} = \frac{1}{20}$ wird bei $\frac{a}{l} = \frac{1}{5}$, $\sigma = 0{,}3$:

$$\frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{T}_{1(0)}} = \sim \frac{1}{80}\,\delta = \frac{\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{T}_{2(0)}}.$$

Es ist jedoch bemerkenswert, daß mit wachsender Rohrlänge unter sonst gleichen Umständen der Einfluß von $\mathfrak{G}_2$ zu-, der von $\mathfrak{G}_1$ hingegen abnimmt.

4. Auflagerbedingungen. Die für die Bestimmung der 8 Konstanten $C_1\ C_2\ C_3\ C_4\ c_1\ c_2\ c_1'\ c_2'$ maßgebenden Randbedingungen lauten für die praktisch vorkommenden Stützungen eines Rohrendquerschnitts wie folgt:

In einem vollkommen eingespannten Endquerschnitt muß sein:

$$u = 0 \qquad v = 0 \qquad w = 0 \qquad w' = \frac{d\,w}{d\left(\frac{x}{a}\right)} = 0.$$

Ist hingegen die Stützung derart, daß das Rohr durch einen starren Deckel abgeschlossen ist, der nur vertikal gestützt ist, jedoch sich ungehindert in der Längsrichtung verschieben und sich auch neigen kann, so lauten bei gelenkigem Anschluß des Rohrs an den Deckel die Bedingungen im Endquerschnitt:

$$G_1 = 0 \qquad T_1 = 0 \qquad w = 0 \qquad v = 0$$

hingegen bei biegungsfestem Anschluß des Rohrs an den Deckel:

$$G_1 + a\,T_1 = 0 \qquad w' = 0 \qquad w = 0 \qquad v = 0.$$

Eine besondere Betrachtung erfordert der Fall des kontinuierlichen Rohrstranges, der mittels starrer Versteifungsringe unsenkbar gelagert ist. Bei diesem sind an jeder Mittelstütze folgende Bedingungen zu befriedigen, wenn die an derselben zusammenstoßenden Oeffnungen den Index m bezw. $m+1$ ebenso wie die zugehörigen Spannungs- und Deformationsgrößen erhalten:

$$\begin{array}{llll} T_{1(m)} = T_{1(m+1)} & u_{(m)} = u_{(m+1)} & v_{(m)} = 0 & w_{(m)} = 0 \\ G_{1(m)} = G_{1(m+1)} & w_{(m)} = w_{(m+1)}' & v_{(m+1)} = 0 & w_{(m+1)} = 0 \end{array}$$

Man erhält also an jeder Mittelstütze 8, an jeder Endstütze 4, im ganzen also bei n Oeffnungen: $8\,(n-1) + 2\,.\,4 = 8\,n$ Gleichungen, denen in jeder Oeffnung 8 zu bestimmende Konstanten, im ganzen also $8\,n$ Unbekannte gegenüberstehen; die Zahl der letzteren reduziert sich jedoch bei Symmetrie auf die Hälfte.

5. Der rotationssymmetrische Spannungszustand infolge von $h\,\gamma$. Zu den in **2** bis **4** berechneten Spannungen sind nun nach **1** noch die sich infolge des Störungsgliedes $\gamma\,h$ ergebenden Spannungen zu überlagern. Da dieselben in bezug auf die Rohrachse gleichmäßig verteilt sind, fallen in den Gl. (I), (II), (III) alle Ableitungen nach φ fort; ebenso verschwinden auch $N_2\ H\ S\ \omega\ \tau\ v$. Wir erhalten daher in diesem Falle folgendes Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{ll} T_1 = \frac{12\,D}{\delta^2}\,(\varepsilon_1 + \sigma\,\varepsilon_2) & G_1 = -\,D\,(\varkappa_1 + \sigma\,\varkappa_2) + T_1\,a\,\varepsilon \\ T_2 = \frac{12\,D}{\delta^2}\,(\varepsilon_2 + \sigma\,\varepsilon_1) & G_2 = -\,D\,(\varkappa_2 + \sigma\,\varkappa_1) \end{array}\right\} \quad \text{(Id)}.$$

$$a\,\varepsilon_1 = u', \quad a\,\varepsilon_2 = w'; \qquad a^2\,\varkappa_1 = w'', \quad \varkappa_2 = 0. \quad \text{(IId)}.$$

$$T_1' = 0, \text{ somit } T_1 = c, \quad N_1' - T_2 + a\,\gamma\,h = 0, \quad G_1' - N_1\,a = 0 \quad \text{(IIId)}$$

Mit Rücksicht auf $\varkappa_2 = 0$ (nach IId) folgt für Gl. (Id):

$$T_1 = \frac{12\,D}{\delta^2}\,(\varepsilon_1 + \sigma\,\varepsilon_2) = c \qquad G_1 = -\,D\,\varkappa_1 + T_1\,a\,\varepsilon = -\,D\,\varkappa_1 + c\,a\,\varepsilon$$

$$T_2 = \frac{12\,D}{\delta^2}\,(\varepsilon_2 + \sigma\,\varepsilon_1) \qquad G_2 = -\,D\,\sigma\,\varkappa_1.$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich in folgender Weise auf eine Gleichung zusammenziehen.

Die Elimination von N_1 aus (III) ergibt:

$$G_1'' - a T_2 + a^2 \gamma h = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(IIIc)},$$

hierzu mit $T_1 = c$ und (IId)

$$\varepsilon_2'' = a \varkappa_1; \quad \varkappa_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(IIc)}.$$

Ersetzt man in (IIc) Dehnungen und Krümmungsänderungen mittels (Id), so erhält man:

$$\varepsilon_2'' = \frac{T_2'' - T_1'' \sigma}{E \delta} = \frac{G_1^{(IV)}}{E \delta a} = a \varkappa_1 = \frac{a}{D} (c a \varepsilon - G_1),$$

mithin:

$$G_1^{(IV)} + \frac{12 a^2}{\delta^2} (1 - \sigma^2) G_1 - c a (1 - \sigma^2) = 0.$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung lautet:

$$G_1 = C_1 \sin(\mu\xi) \mathfrak{Sin}(\mu\xi) + C_2 \sin(\mu\xi) \mathfrak{Cof}(\mu\xi) + C_3 \cos(\mu\xi) \mathfrak{Sin}(\mu\xi) + C_4 \cos(\mu\xi) \mathfrak{Cof}(\mu\xi) + c a \varepsilon,$$

wobei

$$\mu = \frac{\nu}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{12 a^2}{\delta^2} (1 - \sigma^2) = \nu^4.$$

Nach Bestimmung von G_1 folgt für T_2 nach (IIIc):

$$T_2 = G_1'' + a\gamma h = \frac{\nu^2}{a} [- C_4 \sin(\mu\xi) \mathfrak{Sin}(\mu\xi) - C_3 \sin(\mu\xi) \mathfrak{Cof}(\mu\xi) + C_2 \cos(\mu\xi) \mathfrak{Sin}(\mu\xi) + C_1 \cos(\mu\xi) \mathfrak{Cof}(\mu\xi)], + a\gamma h$$

ferner für G_2 nach (Id):

$$G_2 = \sigma G_1 - \sigma c a \varepsilon = \sigma [C_1 \sin(\mu\xi) \mathfrak{Sin}(\mu\xi) + C_2 \sin(\mu\xi) \mathfrak{Cof}(\mu\xi) + C_3 \cos(\mu\xi) \mathfrak{Sin}(\mu\xi) + C_4 \cos(\mu\xi) \mathfrak{Cof}(\mu\xi)].$$

Für die Querkraft N_1 liefert die letzte der Gleichgewichtsbedingungen (IIId):

$$N_1 = \frac{\nu}{a\sqrt{2}} [(C_2 - C_3) \sin(\mu\xi) \mathfrak{Sin}(\mu\xi) + (C_1 - C_4) \sin(\mu\xi) \mathfrak{Cof}(\mu\xi) + (C_1 + C_4) \cos(\mu\xi) \mathfrak{Sin}(\mu\xi) + (C_2 + C_3) \cos(\mu\xi) \mathfrak{Cof}(\mu\xi)],$$

während man für die Verschiebungen erhält:

$$w = a \varepsilon_2 = \frac{a}{E \delta} (T_2 - T_1 \sigma)$$

$$u = a \int \varepsilon_1 d\xi = \frac{a}{E\delta} \int (T_1 - T_2 \sigma) d\xi = \frac{a}{E\delta} \int \{c - \sigma (N_1' + \gamma a h)\} d\xi$$

$$= - \frac{a\sigma}{E\delta} N_1 + \frac{a}{E\delta} (c - \sigma a \gamma h) \xi + c' \quad (c' = \text{willk. Konst.})$$

und die Tangentendrehung w' sich ergibt zu:

$$w' = \frac{a}{E\delta} T_2' = \frac{\nu^3}{E\delta\sqrt{2}} \begin{bmatrix} - (C_2 + C_3) \sin(\mu\xi) \mathfrak{Sin}(\mu\xi) - (C_1 + C_4) \sin(\mu\xi) \mathfrak{Cof}(\mu\xi) \\ + (C_1 - C_2) \cos(\mu\xi) \mathfrak{Sin}(\mu\xi) + (C_2 - C_3) \cos(\mu\xi) \mathfrak{Cof}(\mu\xi) \end{bmatrix}$$

Hiermit sind sämtliche Spannungen und Formänderungen bestimmt, sobald noch die Werte der 6 Konstanten $C_1 C_2 C_3 C_4 c c'$ [1]) aus den im folgenden angegebenen Randbedingungen ermittelt sind.

Die Bedingungen, denen die Spannungen und Formänderungen in einem Endquerschnitt genügen müssen, sind die folgenden:

In einem eingespannten Endquerschnitt muß sein:

$$u = 0 \qquad w = 0 \qquad w' = 0.$$

Bei Abschluß durch starre, nur vertikal gestützte, drehbare, in der Längsrichtung frei verschiebliche Deckel hat man, wenn das Rohrende gelenkig an den Deckel angeschlossen ist:

$$G_1 = 0 \qquad T_1 = 0 \qquad w = 0,$$

während bei biegungsfestem Anschluß des Rohres an den Deckel die Bedingungen lauten:

$$w' = 0 \qquad T_1 = 0 \qquad w = 0.$$

---

[1]) Diese sind natürlich nicht identisch mit den in Lösungen unter 2. auftretenden Konstanten.

Bei kontinuierlichen Rohrsträngen sind über jeder Mittelstütze folgende 6 Bedingungen zu erfüllen:

$$\begin{array}{lll} T_{1(m)} = T_{1(m+1)} & u_{(m)} = u_{(m+1)} & w_m' = 0 \\ G_{1(m)} = G_{1(m+1)} & w'_{(m)} = w'_{(m+1)} & w_{m+1} = 0, \end{array}$$

so daß man also bei n Oeffnungen: $6(n-1) + 2 \cdot 3 = 6n$ Gleichungen für die $6n$ Konstanten — bei Symmetrie nur die Hälfte — erhält.

Nach Bestimmung der Konstanten und Einsetzung derselben in die obigen Spannungen und Deformationen können die unter 2. und 3. bestimmten Spannungszustände überlagert und so die Gesamtspannungen infolge des Flüssigkeitsgewichtes und Ueberdruckes erhalten werden, wobei bemerkt sei, daß, wenn kein Ueberdruck vorhanden, in den Formeln unter 3. $h = a$ einzusetzen ist.

II. Spannungen infolge des Rohreigengewichts im wagerecht liegenden Rohr.

Die Spannnngen des Rohreigengewichts selbst werden im allgemeinen gegenüber denen des Flüssigkeitsgewichts und Ueberdrucks zurücktreten.

Immerhin besitzt z. B. ein Rohrstück von 1 cm Länge bei einer Wandstärke δ einem Radius a, spez. Gew. γ_E ein Gewicht $2\pi a \delta \gamma_E$, die eingeschlossene Flüssigkeit vom spez. Gew. γ_F hingegen ein solches von $\pi a^2 \gamma_F$. Die Gewichte verhalten sich also wie

$$\frac{G_R}{G_F} \sim \frac{2\pi a \delta \gamma_E}{\pi a^2 \gamma_F} \sim \frac{2\delta}{a} \frac{\gamma_E}{\gamma_F} = 15{,}6 \frac{\delta}{a}$$

für ein eisernes ($\gamma_E = 7{,}8$ t/m^3) Rohr mit Wasserfüllung ($\gamma_F = 1$ t/m^3).

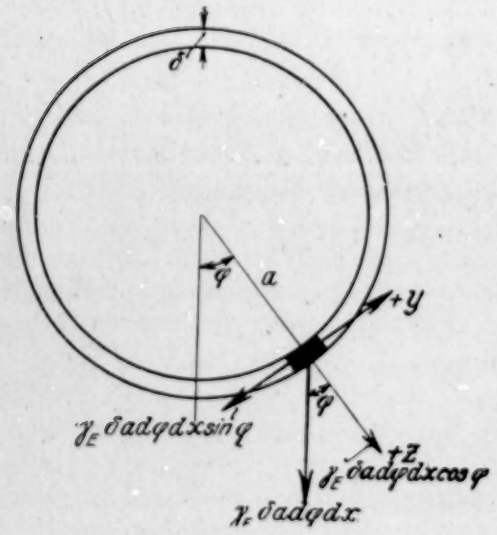


Abb. 2

Für $\frac{\delta}{a} = \frac{1}{40}$ würde hiernach das Rohrgewicht etwa 39 vH des Flüssigkeitsgewichts und für $\frac{\delta}{a} = \frac{1}{100}$ noch etwa 16 vH des letzteren betragen. Es sind also infolge des Rohrgewichts immerhin nicht ganz unbeträchtliche Spannungen zu erwarten, die wir im folgenden untersuchen wollen.

1. Aufstellung der allgemeinen Gleichungen. Aus einem wagerecht liegenden Rohr von der Wandstärke δ, dem Radius a, dem spez. Gew. γ_E sei ein unendlich schmaler Ring von der Breite dx herausgeschnitten. (Abb. 2.)

Dann besitzt ein Bogenelement desselben von der Länge $a\,d\varphi$ das Gewicht $\gamma_E \delta a\, d\varphi\, dx$, dessen Komponenten in der Y- bezw. Z-Richtung sind:

$$\begin{aligned} Y &= -\gamma_E \delta a\, d\varphi\, dx \sin\varphi = -\gamma_E' a^2 d\varphi\, dx \sin\varphi \\ Z &= +\gamma_E \delta a\, d\varphi\, dx \cos\varphi = +\gamma_E' a^2 d\varphi\, dx \cos\varphi, \end{aligned}$$

wenn $\gamma_E \frac{\delta}{a} = \gamma_E'$ gesetzt wird.

Nach S. 342 lauten daher die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left.\begin{array}{ll} T_1' - S_2 = 0 & H_1' - G_2 + N_2 a = 0 \\ S_1' + T_2 + N_2 - a^2 \gamma_E' \sin\varphi = 0 & G_1' + H_2 - N_1 a = 0 \\ N_1' + N_2 - T_2 + a^2 \gamma_E' \cos\varphi = 0 & -H_2 + (S_1 + S_2) a = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(III)},$$

während die Formänderungsgleichungen (I) (II) unverändert bleiben.

Man überzeugt sich nun leicht, daß die obigen Gleichungen ebenfalls durch den sinus- bezw. cosinusförmigen Ansatz befriedigt werden können und daß dann die Gleichgewichtsbedingungen die Form annehmen[1]):

$$\begin{array}{ll} T_1 + S(1+\varepsilon) + \frac{H}{a} = 0 & \\ S' - T_2 + N_2 - a^2 \gamma_E' = 0 & H_1' + G_2 + N_2 a = 0 \\ N_1' + N_2 - T_2 + a^2 \gamma_E' = 0 & G_1' - H - S a \varepsilon - N_1 a = 0 \end{array},$$

während die Formänderungen sich wieder nach (Ia) (IIa) bestimmen.

[1]) Wiederum unter Fortlassung der Striche über den Buchstaben.

Im folgenden soll nun der Einfluß des in der zweiten Gleichgewichtsbedingung auftretenden Störungsgliedes getrennt von dem der dritten Gleichung verfolgt werden.

2. Diskussion der Spannungen. a) Einfluß des Störungsgliedes $+a^2\gamma_E'$ der dritten Gleichgewichtsbedingung. Wenn, wie wir jetzt zunächst annehmen, das Störungsglied $-a^2\gamma_E'$ in der Y-Richtung nicht vorhanden ist und nur in der Z-Richtung ein solches von der Größe $+a^2\gamma_E'$, so stimmen die Gl. (IIIf) vollkommen mit den Gl. (IIIa) überein, wenn in den letzteren statt γ das reduzierte spez. Gew. des Rohrmaterials $\gamma_E' = \gamma_E \frac{\delta}{a}$ eingesetzt wird. Hieraus geht hervor, daß das Störungsglied in der Z-Richtung $+a^2\gamma_E'$ Spannungen hervorruft, die aus den im I. Abschnitt angegebenen Spannungen durch Multiplikation mit dem Verhältnis $\frac{\gamma_E'}{\gamma}$ abgeleitet werden können. Die Konstanten $C_1 \ldots C_4\, c_1\, c_2\, c_1'\, c_2'$ verkleinern sich also im Verhältnis $\frac{\gamma_E'}{\gamma}$ und in den Partikularlösungen ist statt γ_E' statt γ einzusetzen.

b) Einfluß des Störungsgliedes $-a^2\gamma_E'$ der zweiten Gleichgewichtsbedingung. Dieser Einfluß ist zwar nicht mehr so einfach zu übersehen, wie der des Gliedes in der Z-Richtung. Nimmt man jedoch mit den Gl. (IIIf) sowie den Formänderungsgleichungen (Ia) (IIa) die gleichen Transformationen vor, die S. 342 bis 343 zur Aufstellung der Hauptgleichung für T_1 geführt haben, so ergibt sich für $\overline{T_1}$ genau dieselbe Gl. (IV) wie oben, so daß also das Störungsglied $-a^2\gamma_E'$ der Y-Richtung dem Sinne und der Größe nach genau die gleichen Spannungen $\overline{T_1}$ hervorruft wie $+a^2\gamma_E'$ der Z-Richtung. Dasselbe ergibt sich für die Größen $\overline{S_1}\ G_1\ \overline{N_1}\ \overline{H_1}$ da die Gleichungen, aus denen sie nach Bestimmung von $\overline{T_1}$ gefunden werden, dieselben bleiben.

Anders verhält es sich jedoch mit den Größen $\overline{T_2}\ N_2\ \overline{G_2}$, $u_1\ \overline{v}\ \overline{w}$) für die zwar die homogenen Lösungen dieselben bleiben, die in deutschen Buchstaben geschriebenen Lösungen jedoch folgende Werte annnehmen[1]):

$$\mathfrak{T}_{2E} = -\gamma_E' \frac{a^2}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon\sigma}{1-\sigma^2}\left(\frac{\gamma_E'}{2} a^2 \xi^2 + c_1^* + c_2^*\right) + \gamma_E' a^2 \left(1 - 2\varepsilon \frac{1+\sigma^2}{1-\sigma^2}\right)$$

$$\mathfrak{N}_{2E} = -\gamma_E' \frac{a^2\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon\sigma}{1-\sigma^2}\left(\frac{\gamma_E'}{2} a^2\xi^2 + c_1^*\xi^2 + c_2^*\right) - \gamma_E' a^2 \varepsilon\sigma \frac{1+2\sigma}{1-\sigma^2}$$

$$\mathfrak{S}_{2E} = -\gamma_E' \frac{a^3\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{a\varepsilon}{1-\sigma^2}\left[-\sigma\left(\frac{\gamma_E' a^2}{2}\xi^2 + c_1^*\xi + c_2^*\right) + \gamma_E' a^2 (1+2\sigma)\right]$$

$$\frac{E\delta}{a} u_E = u_{3E}\xi^3 + u_{2E}\xi^2 u_{1E}\xi + c_1'^*$$

$$= \sigma\gamma_E' \frac{a^2\xi}{1+\varepsilon} - (1-2\varepsilon)\left(\gamma_E' \frac{a^2}{6}\xi^3 + \frac{c_1^*}{2}\xi^2 + c_2^*\xi\right) - \gamma_E' a^2 \xi\left[\sigma + \varepsilon\frac{2-\sigma-2\sigma^3}{1+\sigma}\right] + c_1'^*$$

$$\frac{E\delta}{a} v_E = v_{4E}\xi^4 + v_{3E}\xi^3 + v_{2E}\xi^2 + v_{1E}\xi + c_2'^*$$

$$= \sigma\gamma_E' \frac{a^2\xi^2}{2(1+\varepsilon)} - (1-2\varepsilon)\left(\gamma_E' \frac{a^2\xi^4}{24} + \frac{c_1^*\xi^3}{6} + \frac{c^{2*}\xi^2}{2}\right)$$

$$-\gamma a^2\xi^2\left[-1 - \frac{\sigma}{2} + \varepsilon\left(\frac{2-\sigma}{1-\sigma} + \frac{2-\sigma-\sigma^3}{2(1+\sigma)}\right)\right] + 2(1+\sigma)\left(1 - \varepsilon\frac{2-\sigma}{1-\sigma^2}\right)c_1^*\xi + c_1'^*\xi + c_2'^*$$

$$\frac{E\delta}{a} w_E = \mathfrak{T}_{2E} - \mathfrak{T}_{1E} - v_E \frac{E\delta}{a}.$$

c) Gesamtspannungen und Formänderungen infolge des Rohrgewichts. Nach vorstehendem lassen sich nun die Gesamtspannungen und Formänderungen infolge des Rohrgewichts, die durch den Index g gekennzeichnet seien, durch einfache Superposition der den beiden Störungsgliedern entsprechenden Spannungszustände ermitteln. Man findet auf diesem Wege folgende Werte:

$$\mathfrak{T}_{1g} = \mathfrak{T}_{1_2}\xi^2 + \mathfrak{T}_{1_1}\xi + \mathfrak{T}_{1_0},$$

wo

$$\mathfrak{T}_{1_2} = -\gamma_E' a^2\left(1 - \frac{2-\sigma^2}{1-\sigma^2}\varepsilon\right), \qquad \mathfrak{T}_{1_1} = -c_{1g}\left(1 - \frac{2-\sigma^2}{1-\sigma^2}\varepsilon\right),$$

$$\mathfrak{T}_{1_0} = -c_{2g}\left(1 - \frac{2-\sigma^2}{1-\sigma^2}\varepsilon\right) - 2\gamma_E' a^2 \varepsilon \frac{2+\sigma}{1-\sigma^2};$$

---

[1]) Der Index E soll andeuten, daß es sich um Teillösungen infolge Eigengewicht des Rohres handelt.

$$\mathfrak{S}_g = (2\gamma_E' a^2 \xi + c_{1g})\left(1 - \varepsilon \frac{2-\sigma}{1-\sigma^2}\right), \qquad \mathfrak{T}_{2g} = \mathfrak{T}_{2_2}\xi^2 + \mathfrak{T}_{2_1}\xi + \mathfrak{T}_{2_0},$$

wo

$$\mathfrak{T}_{2_2} = \varepsilon \frac{\sigma}{1-\sigma^2}\gamma_E' a^2, \quad \mathfrak{T}_{2_1} = \frac{\varepsilon\sigma}{1-\sigma^2} c_{1g}, \quad \mathfrak{T}_{2_0} = \gamma_E' a^2 + \varepsilon\left(-\gamma_E' a^2 \frac{1+3\sigma^2}{1-\sigma^2} + c_{2g}\frac{\sigma}{1-\sigma^2}\right),$$

$$\mathfrak{G}_{1g} = \frac{a\varepsilon}{1-\sigma^2}\left[-(2-\sigma^2)(\gamma_E' a^2 \xi^2 + c_{1g}\xi + c_{2g}) + 2\gamma_E' a^2 (2+\sigma)\right]$$

$$\mathfrak{G}_{2g} = \frac{a\varepsilon}{1-\sigma^2}\left[-\sigma(\gamma_E' a^2 \xi^2 + c_{1g}\xi + c_{2g}) + \gamma_E' a^2 (1 + 4\sigma + \sigma^2)\right]$$

$$\mathfrak{H}_g = -a(2\gamma_E' a^2 \xi + c_{1g})\,\varepsilon \frac{1+2\sigma}{1+\sigma}$$

$$\mathfrak{N}_{1g} = -\varepsilon \frac{2-\sigma}{1-\sigma^2}(2\gamma_E' a^2 \xi + c_{1g}), \quad \mathfrak{N}_{2g} = \frac{\varepsilon\sigma}{1-\sigma^2}(\gamma_E' a^2 \xi^2 + c_{1g}\xi + c_{2g}) + \varepsilon\gamma_E' a^2 \frac{1-2\sigma-5\sigma^2}{1-\sigma^2}$$

und schließlich für die Verschiebungen:

$$\frac{E\delta}{a} u_g = -(1-2\varepsilon)\left(\gamma_E' \frac{a^2}{3}\xi^3 + \frac{c_{1g}}{2}\xi^2 + c_{2g}\xi\right) - \gamma_E' a^2 \xi\left[\sigma(1+\varepsilon) + 2\varepsilon\frac{2-\sigma-\sigma^3}{1+\sigma}\right]$$

$$\frac{E\delta}{a} v_g = v_{4g}\xi^4 + v_{3g}\xi^3 + v_{2g}\xi^2 + v_{1g}\xi + c_g'\xi + c_{2g},$$

wo

$$v_{4g} = \frac{-\gamma_E' a^2}{12}(1-2\varepsilon), \qquad v_{3g} = \frac{-c_{1g}}{6}(1-2\varepsilon)$$

$$v_{2g} = \frac{-c_{2g}}{2}(1-2\varepsilon) + \frac{\gamma_E' a^2}{2}\left[4 + 3\sigma + \varepsilon\frac{-12+\sigma+2\sigma^2+3\sigma^3-2\sigma^4}{1-\sigma^2}\right]$$

$$v_{1g} = 2(1+\sigma)\left(1 - \varepsilon\frac{2-\sigma}{1-\sigma^2}\right)c_{1g}$$

$$\frac{E\delta}{a} w_g = \mathfrak{T}_{2g} - \mathfrak{T}_{1g} - v_g \frac{E\delta}{a},$$

sowie für die Tangentendrehung (vergl. S. 345)

$$\frac{E\delta}{a} w' = -\frac{12a(1+\sigma)}{\delta^2}\mathfrak{H}_g - 3(1+\sigma)\mathfrak{S}_g - u_g\frac{E\delta}{a},$$

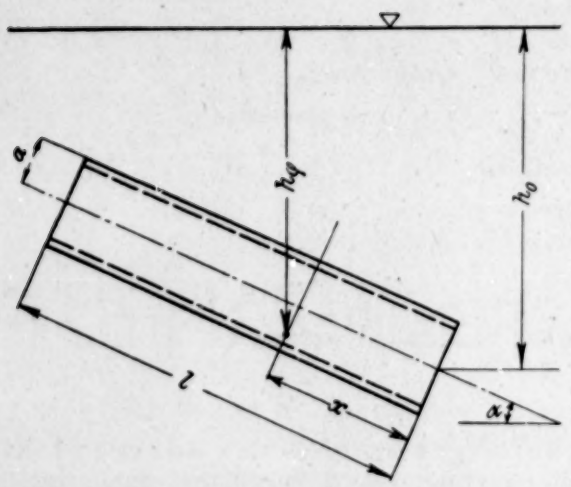


Abb. 3

während die homogenen Lösungen formal ungeändert bleiben, da nur die in denselben auftretenden Konstanten $C_1 \ldots C_4$ durch $C_{1g} \ldots C_{4g}$ zu ersetzen sind.

III. Das geneigt liegende Rohr.

1. Spannungen infolge des Flüssigkeitsgewichts. Nachdem im vorstehenden die Spannungen infolge des Flüssigkeits- und Eigengewichts für das wagerecht liegende Rohr ermittelt worden sind, soll nunmehr angenommen werden, daß die Rohrachse unter dem Winkel α gegen die Horizontale geneigt liegt. In diesem Falle beträgt nach Abb. 3 der Flüssigkeitsdruck für die Flächeneinheit in der jetzt schräg gemessenen Entfernung x vom unteren Rohrende, an dem — auf der Achse — die Druckhöhe h_0 vorhanden sei,

$$p = \gamma h_\varphi = \gamma\,[h_0 - x\sin\alpha + a\cos\varphi\cos\alpha] = \gamma\,[h_0 - h_1\,\xi + a\cos\varphi\cos\alpha],$$

wenn $h_1 = a\sin\alpha$ die Druckhöhenänderung in der Rohrachse auf eine schräge Länge gleich dem Rohrradius darstellt. Demnach lauten dann die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left.\begin{array}{ll} T_1' - S_2 = 0 & H_1' - G_2 + N_2 a = 0 \\ S_1' + T_2 + N_2 = 0 & G_1' + H_2 - N_1 a = 0 \\ N_1' + N_2 - T_2 + a\gamma(h_0 - h_1\xi + a\cos\alpha\cos\varphi) = 0 & -H_2 + (S_1 + S_2)a = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(IIIg)},$$

während die Formänderungsbedingungenen (I) (II) ungeändert bleiben.

Man erkennt nun aus der Form des Störungsgliedes in (IIIg), daß die Gesamtspannungen sich auch hier wieder aus einem rotationssymmetrischen und einem sinus- bezw. cosinusförmigen Spannungszustand additiv zusammensetzen werden.

Bezüglich des letzteren zeigt der Vergleich des ihm entsprechenden Störungsgliedes $a^2\gamma \cos\alpha$ mit dem des bereits unter **2** bis **4** untersuchten Spannungszustandes $a^2\gamma$, daß die gesuchten Spannungen durch genau die gleichen Formeln wie oben sich bestimmen, wofern nur in denselben überall $\gamma\cos\alpha$ statt γ gesetzt wird; eine besondere Betrachtung erübrigt sich daher. Für die rotationssymmetrisch verteilten Spannungen hingegen lauten jetzt die Gleichgewichts- und Formänderungsbedingungen:

$$T_1' = 0 \text{ somit: } T_1 = c, \qquad N_1' - T_2 + a\gamma(h_0 - h_1\xi) = 0, \qquad G_1' - N_1 a = 0 \quad \text{(IIIh)}$$

$$a\varepsilon_1 = u', \qquad a\varepsilon_2 = w, \qquad a^2\varkappa_1 = w'', \qquad \varkappa_2 = 0 \quad \text{(Ih)}.$$

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{12D}{\delta^3}(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2) = c & G_1 &= -D\varkappa_1 + T_1 a\varepsilon = -D\varkappa_1 + ca\varepsilon \\ T_2 &= \frac{12D}{\delta^3}(\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1) & G_2 &= -D\sigma\varkappa_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{(Ih)}.$$

Eliminiert man wieder zunächst N_1 aus (IIIh), so folgt

$$G_1'' - aT_2 + a^2\gamma(h_0 - h_1\xi) = 0,$$

und mit $T_1 = c$, wenn in den aus (IIh) folgenden Beziehungen $\varepsilon_2'' = a\varkappa_1$; $\varkappa_2 = 0$ mittels (Ih) Dehnungen und Krümmungsänderungen durch die Spannungsresultanten ausgedrückt werden:

$$\varepsilon_2'' = \frac{T_2' - T_1''\sigma}{E\delta} = \frac{G_1^{(IV)}}{E\delta a} = a\varkappa_1 = \frac{a}{D}(-G_1 + ca\varepsilon),$$

mithin wie S. 347 [1]):

$$G_{1\alpha}^{(IV)} + \frac{12a^2}{\delta^3}(1-\sigma^2)\,G_{1\alpha} - ca(1-\sigma^2) = 0.$$

Es bleibt also außer $T_1 = c$ auch G_1 wie S. 347 berechnet, nämlich:

$$G_{1\alpha} = C_{1\alpha}\sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) + C_{2\alpha}\sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi) + C_{4\alpha}\cos(\mu\xi) + C_{3\alpha}\cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) + ca\varepsilon,$$

wo

$$\mu = \frac{\nu}{\sqrt{2}} \qquad \nu^4 = \frac{12a^2}{\delta^2}(1-\sigma^2).$$

Hingegen ergibt sich jetzt für T_2:

$$T_{2\alpha} = \frac{G_1''}{a} + a\gamma(h_0 - h_1)\xi = \frac{\nu^2}{a}[-C_{4\alpha}\sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) - C_{3\alpha}\sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi) + C_{2\alpha}\cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) + C_{1\alpha}\cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi)] + a\gamma(h_0 - h_1\xi),$$

ferner für G_2 und N_1 wie S. 347:

$$G_{2\alpha} = \sigma G_1 - \sigma ca\varepsilon = \sigma[C_{1\alpha}\sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) + C_{2\alpha}\sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi) + C_{3\alpha}\cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) + C_{4\alpha}\cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi)]$$

$$N_{1\alpha} = \frac{\nu}{a\sqrt{2}}\left[\begin{aligned} &+(C_{2\alpha} - C_{3\alpha})\sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) + (C_{1\alpha} - C_{4\alpha})\sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi) \\ &(C_{1\alpha} + C_{4\alpha})\cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) + (C_{2\alpha} + C_{3\alpha})\cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi)\end{aligned}\right],$$

während sich für die Verschiebungen ergibt:

$$w_\alpha = a\varepsilon_{2\alpha} = \frac{a}{E\delta}(T_{2\alpha} - \sigma T_{1\alpha}$$

$$u_\alpha = a\int\varepsilon_1\,d\xi = \frac{a}{E\varrho}\int(T_{1\alpha} - T_{2\alpha}\sigma)\,d\xi = \frac{a}{E\delta}\int\{c_\alpha - \sigma[N_{1\alpha}' + a\gamma(h_0 - h_1\xi)]\}\,d\xi$$

$$= -\frac{a\sigma}{E\delta}N_{1\alpha} + \frac{a}{E\delta}\left[(c_\alpha - \sigma a\gamma h_0)\xi) + \sigma h_1\, a\gamma\frac{\xi^2}{2}\right] + c_\alpha' \quad (c_\alpha' = \text{willk. Konst.})$$

und für die Tangentendrehung:

$$w_\alpha' = \frac{a}{E\delta}T_{2\alpha}' = \frac{\nu^3}{E\delta\sqrt{2}}[-(C_{2\alpha} + C_{3\alpha})\sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) - (C_{1\alpha} + C_{4\alpha})\sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi) + (C_{1\alpha} - C_{4\alpha})\cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) + (C_{2\alpha} - C_{3\alpha})\cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi) - a\gamma h_1.$$

2. Spannungen infolge des Rohreigengewichts. In ebenso übersichtlicher Weise wie für das Flüssigkeitsgewicht lassen sich auch für das Rohreigengewicht die Spannungen im schräg liegenden Rohr auf die des horizontalen Rohrs zurückführen.

[1]) Der Index α kennzeichnet Spannungs- und Deformationsgrößen des unter α geneigten Rohres.

Für das letztere lauten nämlich, wie man leicht sieht, die Gleichgewichtsbedingungen bei Beanspruchung allein durch Rohreigengewicht:

$$\begin{aligned} &T_1' - S_2 \cdot - a^2 \gamma_E' \sin\alpha = 0 && H_1' - G_2 \cdot + N_2\, a = 0 \\ &S_1' + T_2 \cdot + N_2 - a^2 \gamma_E' \cos\alpha \sin\varphi = 0 && G_1' + H_2 \cdot - N_1\, a = 0 \\ &N_1' + N_2 \cdot - T_2 + a^2 \gamma_E' \cos\alpha \cos\varphi = 0 && -H_2 + (S_1 + S_2)\, a = 0 \end{aligned}$$

Vergleicht man diese mit den oben angegebenen Gleichungen für das horizontale Rohr, so erkennt man, daß dieselben sich, wenn man von dem Störungsglied $-a^2\gamma_E' \sin\alpha$ der X-Richtung zunächst absieht, nur um den konstanten Faktor $\cos\alpha$ in den beiden Störungsgliedern der Y- und Z-Richtung unterscheiden. Hieraus geht hervor, daß die Gesamtspannungen sich wieder aus einem sinus- bezw. cosinusförmigen Spannungszustand zusammensetzen, der sich einfach aus den früheren Werten dadurch ergibt, daß überall $\gamma_E' \cos\alpha$ statt γ_E' geschrieben wird, sowie einem rotationssymmetrischen Zustand für den die Gleichgewichtsbedingungen lauten:

$$T_1' = a^2 \gamma_E' \sin\alpha; \qquad \text{mithin: } T_1 = a^2 \gamma_E' \xi \sin\alpha + c_\alpha^*$$
$$N_1' - T_2 = 0, \qquad G_1' - N_1\, a = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{III\,i}),$$

ferner:

$$a\varepsilon_1 = u' \qquad a\varepsilon_2 = w \qquad a^2 \varkappa_1 = w'' \qquad \varkappa_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II\,i})$$

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{12\,D}{\delta^3}(\varepsilon_1 + \sigma\,\varepsilon_2) \\ T_2 &= \frac{12\,D}{\delta^3}(\varepsilon_2 + \sigma\,\varepsilon_1) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II\,i}) \qquad \left.\begin{aligned} G_1 &= -D\varkappa_1 + T_1\, a\varepsilon \\ G_2 &= -D\sigma\varkappa_1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (\mathrm{I\,i}).$$

Die Elimination von N_1 aus (III i) ergibt:

$$G_1'' - a\,T_2 = 0,$$

hierzu mit $T_1 = \xi a^2 \gamma_E' \sin\alpha + c_\alpha^*$ und $\varepsilon_2'' = a\varkappa_1$; $\varkappa_2 = 0$,
mit Benutzung von (I i):

$$\varepsilon_2'' = \frac{T_2'' - T_1''\,\sigma}{E\delta} = \frac{G_1^{(\mathrm{IV})}}{E\delta a} = a\varkappa_1 = \frac{a}{D}\left[-G_1 + a\varepsilon\,(c_\alpha^* + \xi a^2 \gamma_E' \sin\alpha)\right].$$

Hieraus:

$$G_1^{(\mathrm{IV})} + \frac{12\,a^2}{\delta^2}(1-\sigma^2)\,G_1 - a\,(1-\sigma^2)\,(c_\alpha^* + \xi a^2 \gamma_E' \sin\alpha) = 0.$$

Das Integral lautet:

$$G_{1\alpha} = C_{1\alpha}' \sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) + C_{2\alpha}' \sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi) + C_{3\alpha}' \cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) + C_{4\alpha}' \cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi) + a\varepsilon\,(c_\alpha^* \xi a^2 \gamma_E' \sin\alpha).$$

Für die übrigen Spannungen und Formänderungen findet man:

$$T_{2\alpha} = \frac{G_1''}{a} = \frac{\nu^2}{a}\left[-C_{4\alpha}' \sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) - C_{3\alpha}' \sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi) + C_{2\alpha}' \cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) + C_{1\alpha}' \cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi)\right].$$

$$G_{2\alpha} = \sigma\,G_{1\alpha} - \sigma a\varepsilon\,T_{1\alpha} = [C_{1\alpha}' \sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) + C_{2\alpha}' \sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi) + C_{3\alpha}' \cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) + C_{4\alpha}' \cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi)]$$

$$N_{1\alpha} = \frac{\nu}{a\sqrt{2}}\left[\begin{matrix}(C_{1\alpha}' - C_{3\alpha}')\sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) + (C_{1\alpha}' - C_{4\alpha}')\sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi) \\ +(C_{1\alpha}' + C_{4\alpha}')\cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) + (C_{2\alpha}' + C_{3\alpha}')\cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi)\end{matrix}\right] + a^2 \gamma_E' \sin\alpha$$

$$w_\alpha = a\varepsilon_2 = \frac{a}{E\,\delta}(T_{1\alpha} - \sigma\,T_{1\alpha})$$

$$u_\alpha = a\int \varepsilon_1\,d\xi = \frac{a}{E\,\delta}\int (T_{1\alpha} - T_{2\alpha}\,\sigma)\,d\xi = \frac{a}{E\,\delta}\int \{\xi a^2 \gamma_E' \sin\alpha + c_\alpha^* - \sigma N_{1\alpha}'\}\,d\xi$$

$$= -\frac{a\delta}{E\delta}\,N_{1\alpha} + \frac{a}{E\delta}\left(c_\alpha^*\,\xi + \frac{\xi^2}{2}\,a^2 \gamma_E' \sin\alpha\right) + c_\alpha^{*\prime} \quad (c_\alpha^{*\prime} = \text{willk. Konst.})$$

$$w_\alpha' = \frac{a}{E\,\delta}(T_{2\alpha}' - T_{1\alpha}')$$

$$= \frac{\nu^3}{E\,\delta\sqrt{2}}\left[\begin{matrix}-(C_{2\alpha}' + C_{3\alpha}')\sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) - (C_{1\alpha}' + C_{4\alpha}')\sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi) \\ +(C_1{}'\alpha - C_4{}'\alpha)\cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) + (C_{2\alpha}' + C_{3\alpha}')\cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi)\end{matrix}\right] - a^2 \gamma_E' \sin\alpha$$

Dieser Spannungszustand ist dem in II, 2, *c* gegebenen (mit $\gamma_E' \cos\alpha$ statt γ_E') zu überlagern, womit dann die Berechnung des schräg liegenden Rohres vollständig auf die des horizontalen zurückgeführt ist.

Zusammenfassung.

Die in der vorliegenden Arbeit gegebenen theoretischen Grundlagen ermöglichen es, die in schrägen oder horizontalen freitragenden Rohrleitungen beliebiger Stützung — insbesondere auch Walzenkesseln — auftretenden Spannungen genauer als bisher zu berechnen und insbesondere sich über die beträchtlichen Spannungen in der Nähe der Auflager ein der Wirklichkeit näher kommendes Bild zu machen.

Die für dünnwandige zylindrische biegungsfeste Schalen gültigen Gleichgewichts- und Formänderungsbedingungen werden zunächst für den Fall des horizontalen, durch Flüssigkeitsdruck beanspruchten Rohres aufgestellt und in geschlossener Form vollständig integriert, wobei in der Weise vorgegangen wird, daß der Einfluß der einzelnen Störungsglieder getrennt verfolgt wird.

Hierbei ergibt sich, daß die im Rohr auftretenden Gesamtspannungen sich aus der Ueberlagerung zweier Spannungszustände zusammensetzen, von denen der eine inbezug auf die Rohrachse symmetrisch, der andere sinus- bezw. cosinusförmig verteilte Spannungen hervorruft.

Die für jeden dieser Spannungszustände getrennt anzusetzenden Randbedingungen werden für alle praktisch wichtigen Stützungsarten, insbesondere auch für kontinuierliche Leitungsstränge angegeben.

Nachdem sodann auch der Einfluß des Rohreigengewichts für das horizontale Rohr vollständig ermittelt ist, wird das biegungsfeste, geneigt liegende Rohr gleichfalls auf Flüssigkeits- und Eigengewichtsbelastung untersucht und gezeigt, daß sich bei wiederum getrennter Verfolgung des Einflusses der einzelnen Störungsglieder die Spannungen in geneigt liegenden Rohren in sehr einfacher und übersichtlicher Weise auf die im horizontalen Rohr auftretenden zurückführen lassen. 80

Über die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen von Schwingungsproblemen.

Von **GEORG PICK** in Prag.[1])

Die Gleichungen, welche entstehen, wenn man von den Diagonalelementen einer gegebenen quadratischen Matrix die Unbekannte t subtrahiert, und die erhaltene Determinante gleich Null setzt, haben lauter reelle Wurzeln in dem Falle, daß die gegebene Matrix symmetrisch ist. Es liegt deshalb nahe, für den allgemeinen Fall eine Abschätzung des Imaginärteils der Wurzel zu suchen, der diesen Teil in Abhängigkeit setzt von der Abweichung der Matrix von der Symmetrie. Von diesem Gedanken ausgehend hat Bendixson solche Gleichungen untersucht, und Hirsch hat die Untersuchung auf Matrizen mit komplexen Elementen ausgedehnt[2]).

Wenn diese Frage nun hier zunächst unter Beschränkung auf reelle Matrizen wieder aufgenommen wird, so geschieht das, weil die von Bendixson erzielte Abschätzung des Imaginärteils erheblich verbessert, nämlich durch eine **scharfe** Abschätzung ersetzt werden kann. Sind $a_{\mu\nu}$ die Elemente der gegebenen n-zeiligen Matrix, und bezeichnet man den größten unter den Werten

$$\left|\frac{a_{\mu\nu}-a_{\nu\mu}}{2}\right|$$

mit g, so findet Bendixson für den Imaginärteil der Wurzel $t=r+si$ die Beziehung

$$-g\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \leq s \leq +g\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

[1]) Die gewöhnlichen Schwingungsprobleme der Mechanik führen auf ein System von linearen Gleichungen, die eine etwas allgemeinere Form haben, als die vom Verfasser hier vorausgesetzten. Da man nämlich stets Differentialgleichungen zweiter Ordnung hat, tritt der Exponent λ nicht linear, sondern quadratisch in dem Koeffizientenschema (Matrix) der linearen Gleichungen auf. Eine unmittelbare Anwendung der Ergebnisse der nachstehenden Arbeit auf die Entscheidung der Stabilitätsfrage bei derartigen Schwingungsproblemen wird daher kaum möglich sein. Wohl aber kommen hier andere als mechanische Schwingungsvorgänge in Frage, vor allem Temperaturschwankungen und elektrische Schwingungen, bei denen der Einfluß der Selbstinduktion vernachlässigt wird. (Anmerkung des Herausgebers.)

[2]) Bendixson, Acta mathematica XXV, S. 359—365, Hirsch, ebenda S. 367—370.

Es ist aber, wie sich im folgenden zeigen wird,

$$-g \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2n} \leqq s \leqq +g \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2n},$$

und diese Schranken stimmen mit den obigen zwar für $n = 2$ und $n = 3$ überein, sind aber von $n = 4$ an numerisch kleiner. Sie stellen andererseits das Beste dar, was zu erreichen ist, weil sich eine Matrix von der vorausgesetzten Beschaffenheit angeben läßt, bei der die Gleichheitszeichen der Formel zutreffen [1]).

Den Abschätzungen der Wurzeln charakteristischer Determinantengleichungen entsprechen solche der reziproken singulären Werte Fredholmscher Integralgleichungen. Auf diese soll hier zum Schlusse kurz hingewiesen werden, ohne auf den Beweis der bezüglichen Formeln näher einzugehen.

I. Symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen.

Es sei $b_{\mu\nu} = b_{\nu\mu}$. Die algebraische Gleichung in t

$$\begin{vmatrix} b_{11} - t, & b_{12}, & \ldots & b_{1n} \\ b_{21}, & b_{22} - t, & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}, & b_{n2}, & \ldots & b_{nn} - t \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

hat dann lauter reelle Wurzeln. Ist r irgend eine von ihnen, so genügen den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + \ldots + b_{1n} x_n &= r x_1 \\ b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + \ldots + b_{2n} x_n &= r x_2 \\ &\vdots \\ b_{n1} x_1 + b_{n2} x_2 + \ldots + b_{nn} x_n &= r x_n \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

n nicht sämtlich verschwindende Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$, die reell angenommen werden können, wovon wir aber keinen Gebrauch machen wollen. Multipliziert man die Gleichungen (2) der Reihe nach mit den konjugierten Werten der x, also $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n$ und addiert, so ergibt sich

$$r \sum_{\mu} x_\mu \bar{x}_\mu = \sum_{\mu,\nu} b_{\mu\nu} \bar{x}_\mu x_\nu \text{ [2])} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3),$$

worin, wie im folgenden die Summationen über alle Werte der Zeiger von 1 bis n auszudehnen sind. Es ist zulässig und für das Folgende bequem, die Größen x so zu normieren, daß

$$\sum_{\mu} x_\mu \bar{x}_\mu = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

ist. Dann wird also

$$r = \sum_{\mu,\nu} b_{\mu\nu} \bar{x}_\mu x_\nu \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Ersetzt man hier auf der rechten Seite alle x durch ihre Absolutwerte, die mit den entsprechenden y bezeichnet werden sollen, die $b_{\mu\nu}$ aber einmal durch $\pm f$, das anderemal durch $-f$, wo f den größten der Beträge $|b_{\mu\nu}|$ bedeutet, so ergibt sich

$$-f \sum_{\mu,\nu} y_\mu y_\nu \leqq r \leqq f \sum_{\mu,\nu} y_\mu y_\nu \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

Hier steht rechts und links, abgesehen von den Faktoren $\pm f$, ein Wert jener quadratischen Form, deren sämtliche Koeffizienten gleich Eins sind. Ein solcher Wert, erzeugt durch normierte y, ist höchstens gleich der größten Wurzel der zugehörigen charakteristischen (also hier Säkular-) Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda, & 1, & \ldots & 1 \\ 1, & 1 - \lambda, & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & 1, & \ldots & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

d. h. von

$$\lambda^n - n\lambda^{n-1} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

---

[1]) Vollständigkeit halber werden im folgenden auch die reellen Teile der Wurzeln behandelt, was für das mechanische Problem von Wichtigkeit ist; die sie betreffenden Resultate finden sich bei Bendixson a. a. O. schon vor.

[2]) Solche Zusammenfassungen sind auch bei Bendixson der Ausgangspunkt, sie werden aber oben in anderer Weise verwertet als bei ihm.

Dieser größte Wurzelwert ist augenscheinlich n, und es ergibt sich also

$$-nf \leqq r \leqq nf \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Man sieht auch, daß diese Schranken erreicht werden, wenn von vornherein alle $b_{\mu\nu}$ entweder gleich $+f$ oder gleich $-f$ gesetzt werden.

Es sei $c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}$, also $c_{\mu\mu} = 0$. Die algebraische Gleichung in t

$$\begin{vmatrix} c_{11}-t, & c_{12}, & \ldots & c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22}-t, & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1}, & c_{n2}, & \ldots & c_{nn}-t \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

hat dann lauter rein imaginäre Wurzeln. Ist is irgend eine von ihnen, so genügen den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n &= is\,x_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n &= is\,x_2 \\ &\vdots \\ c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots + c_{nn}x_n &= is\,x_n \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

n nicht sämtlich verschwindende Zahlen x, die wir wieder normiert annehmen dürfen. Durch Zusammenfassung, wie oben, erhält man

$$is = \sum_{\mu,\nu} c_{\mu\nu}\bar{x}_\mu x_\nu = \sum_{\mu<\nu} c_{\mu\nu}(\bar{x}_\mu x_\nu - x_\mu \bar{x}_\nu) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

wo die letzte Summation nur über die Wertepaare μ, ν zu erstrecken ist, die der beigesetzten Bedingung genügen.

Mit dieser Relation verfahren wir nun so: Zuerst wollen wir bewirken, daß die Arkus der vorkommenden Werte der Unbestimmten innerhalb eines Winkelraums von der Größe π, also etwa zwischen $-\frac{\pi}{2}$ exkl. und $+\frac{\pi}{2}$ inkl., liegen. Das gelingt, indem wir nötigenfalls die Vorzeichen einiger (oder aller) x umkehren. Sie bleiben dabei normiert. Damit die rechte Seite von (11) dabei ungeändert bleibt, wird man nun auch bei den $c_{\mu\nu}$ entsprechend Zeichenumkehrungen vornehmen müssen, was also geschehen soll. Wir wollen zweitens eine Umnumerierung der Unbestimmten so vornehmen, daß sie nach zunehmenden Werten jener Arkus gereiht sind; entsprechende Indexvertauschungen sind an den Koeffizienten vorzunehmen. Statt (11) ergibt sich so

$$is = \sum_{\mu<\nu} c_{\mu\nu}^*(\bar{y}_\mu y_\nu - y_\mu \bar{y}_\nu) = \sum_{\mu,\nu} c_{\mu\nu}^* \bar{y}_\mu y_\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

und es gilt jetzt Folgendes: a) die $c_{\mu\nu}^*$ stimmen, abgesehen von Vorzeichen und Reihenfolge, mit den $c_{\mu\nu}$ überein; b) die Größen $\frac{\bar{y}_\mu y_\nu - y_\mu \bar{y}_\nu}{i}$ sind positiv. Denn sie sind die Imaginärteile von Zahlen, deren Arkus zwischen Null und π liegen.

Es sei nun g der größte unter den Beträgen $|c_{\mu\nu}|$, also auch unter den $|c_{\mu\nu}^*|$. Ersetzt man auf der rechten Seite von (12) alle $c_{\mu\nu}^*$ mit $\mu < \nu$ einmal durch $+g$, das anderemal durch $-g$, so erhält man eine obere und eine untere Schranke für s. Man kann das Resultat so aussprechen: $\frac{s}{g}$ liegt zwischen dem größten und kleinsten Werte unter den durch i dividierten Wurzeln der charakteristischen Gleichung jener schiefsymmetrischen Matrix, in der auf der einen Seite der Hauptdiagonale überall $+1$, auf der andern überall -1 steht. Denn $\sum_{\mu<\nu}(\bar{y}_\mu y_\nu - y_\mu \bar{y}_\nu)$ und der entgegengesetzte Ausdruck sind Werte der zugehörigen Bilinearform dieser Matrix, und das Behauptete ergibt sich aus einem bekannten Satz über Hermitesche Formen; in eine solche geht diese Bilinearform durch Division mit i über. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\begin{vmatrix} -t & & & \\ & -t & & (1) \\ & & \ddots & \\ & (-1) & & -t \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

in verständlicher Bezeichnungsweise. Die Determinante ist leicht nach einer von Hölder angegebenen Regel auszurechnen [1]). Man erhält so statt (13)

$$(t+1)^n + (t-1)^n = 0 \quad \ldots \quad (14),$$

woraus sich die Lösnngen

$$t = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \text{ mit } \alpha^n = -1 \quad \ldots \quad (15)$$

ergeben, oder anders

$$t = i \operatorname{cotg} \frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad (k = 1, 2, \ldots n) \quad \ldots \quad (16).$$

Der algebraisch größte unter den durch (16) bestimmten Werten von $\frac{t}{i}$ ist ctg $\frac{\pi}{2n}$, der kleinste $-$ ctg$\frac{\pi}{2n}$.

Man hat also jetzt

$$-g \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} \leq s \leq g \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} \quad \ldots \quad (17)$$

und es ist klar, daß diese Werte wirklich erreicht werden, wenn die $c_{\mu\nu}$ für $\mu < \nu$ von vornherein alle gleich g sind.

II. Allgemeine reelle Matrizen. Die Fredholmsche Gleichung.

Es seien $a_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots n)$ beliebige n^2 reelle Zahlen. Wir setzen

$$\frac{a_{\mu\nu} + a_{\nu\mu}}{2} = b_{\mu\nu}, \quad \frac{a_{\mu\nu} - a_{\nu\mu}}{2} = c_{\mu\nu} \text{ also } a_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + c_{\mu\nu} \quad \ldots \quad (18),$$

und es sei f der größte unter den Beträgen $|b_{\mu\nu}|$, g der größte unter den Beträgen $|c_{\mu\nu}|$. Die $b_{\mu\nu}$ sind die Elemente einer symmetrischen, die $c_{\mu\nu}$ sind die Elemente einer schiefsymmetrischen Matrix.

$t = r + s\,i$ sei eine Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-t, & a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-t, & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2}, & a_{n1}, & \ldots & a_{nn}-t \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \quad (29).$$

Dann gibt es n nicht sämtlich verschwindende Größen $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= t\,x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= t\,x_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= t\,x_n \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (20)$$

befriedigen. Durch Zusammenfassung wie im vorigen Abschnitt erhält man

$$t = \sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu}\,\bar{x}_\mu\,x_\nu \quad \ldots \quad (21),$$

wenn die x wieder normiert angenommen werden. Indem man nun Reelles und Imaginäres trennt, ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} r &= \sum_{\mu,\nu} b_{\mu\nu}\,\bar{x}_\mu\,x_\nu \\ i\,s &= \sum_{\mu,\nu} c_{\mu\nu}\,\bar{x}_\mu\,x_\nu \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (22)$$

und es gilt also der Satz:

Der reelle Teil jedes charakteristischen Werts der $a_{\mu\nu}$-Matrix liegt zwischen dem größten und kleinsten charakteristischen Wert der $\frac{a_{\mu\nu}+a_{\nu\mu}}{2}$-Matrix; der imaginäre Teil dagegen (abgesehen vom Faktor i) zwischen dem größten und kleinsten charakteristischen Wert der $\frac{a_{\mu\nu}-a_{\nu\mu}}{2}$-Matrix.

---

[1]) Leipziger Berichte 65, S. 110–120 und 66, S. 98–102. In dem ersten dieser Aufsätze findet sich auch die Auflösung der Gleichung (13). Vgl. ferner Hirsch, Math. Ann. 52, S. 150 ff.

Denn die rechten Seiten in (22) sind durch normierte x erzeugte Werte der zu den beiden Hilfsmatrizen gehörigen Formen.

Aus den Ergebnissen (8) und (17) des vorigen Abschnitts fließen nun die Abschätzungen

$$\left.\begin{aligned} -nf \leqq \Re(t) \leqq +nf \qquad & \left(f = \mathrm{Max}\left|\frac{a_{\mu\nu}+a_{\nu\mu}}{2}\right|\right) \\ -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2a}g \leqq \Im(t) \leqq +\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}g \qquad & \left(g = \mathrm{Max}\left|\frac{a_{\mu\nu}+a_{\nu\mu}}{2}\right|\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (23),$$

und man erkennt auch, daß die Gleichheitszeichen realisiert werden können, und zwar gerade durch die im vorigen Abschnitt festgestellten besonderen symmetrischen bezw. schiefsymmetrischen Matrizen. Es ist leicht, den in der zweiten Formel von (23) auftretenden Koeffizienten $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$ mit dem bei Bendixson auftretenden $\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$ direkt zu vergleichen, und zwar vermittelst der unschwer zu beweisenden Relation

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n} + \operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{2n} + \ldots + \operatorname{ctg}^2\frac{(2n-1)\pi}{2n} = n(n-1) \quad . \; . \; . \; . \; (24).$$

Hier sind links je zwei von den Enden gleich weit abliegende Posten einander gleich, und der bei ungeradem n auftretende mittlere Posten ist gleich Null. Man sieht also direkt die Richtigkeit der Beziehung

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n} \leqq \frac{n(n-1)}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (25),$$

und daß das Gleichheitszeichen nur in den Fällen $n = 2$ und $n = 3$ gilt, abgesehen von dem belanglosen Fall $n = 1$.

Zu den gewonnenen Abschätzungen (23) sei noch folgendes bemerkt. Es wäre eigentlich sachgemäß, in den Voraussetzungen die Diagonalelemente, die eine Rolle für sich spielen, von den übrigen Elementen zu trennen. Man kann nun auch diese Verallgemeinerung ohne weiteres an den obigen Resultaten anbringen, man braucht zu diesem Zwecke nur t um eine gegebene reelle Zahl zu vermindern. Die erste Formel in (23) erleidet eine leichte Modifikation, die explizit anzugeben hier wohl überflüssig ist.

Schließlich noch eine Bemerkung über die lineare Integralgleichung

$$x(u) + \lambda\int_0^1 K(u,v)\,x(v)\,dv = y(u) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (26)$$

mit beliebigem (stetigem) reellen Kern. Die singulären Werte von λ, also diejenigen, für welche

$$x(u) + \lambda\int_0^1 K(u,v)\,x(v)\,dv = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (27)$$

eine nicht identisch verschwindende Lösung $x(u)$ hat, entsprechen den negativen reziproken Werten der Wurzeln einer charakteristischen Gleichung, den Elementen der zugehörigen Matrix die Werte des Kerns $K(u,v)$. Wenn nun die Abschätzungen (23) beim Grenzübergang standhalten, so ergeben sich folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned} -\mathrm{Max}\left|\frac{K(u,v)+K(v,u)}{2}\right| \leqq \Re\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leqq \mathrm{Max}\left|\frac{K(u,v)+K(v,u)}{2}\right| \\ -\frac{2}{\pi}\mathrm{Max}\left|\frac{K(u,v)-K(v,u)}{2}\right| \leqq \Im\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leqq \frac{2}{\pi}\mathrm{Max}\left|\frac{K(u,v)-K(v,u)}{2}\right| \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (28).$$

Während aber in der ersten dieser Relationen die Gleichheitszeichen durch konstante $K(u,v)$ bewirkt werden können, gelingt das in der zweiten Relation nicht durch stetige Kerne, wohl aber durch schiefsymmetrische $K(u,v)$, bei denen $K(u,v)$ für $u < x$ einen konstanten, für $u > v$ also den entgegengesetzten konstanten Wert hat.

Auf den Beweis von (28), der übrigens für die erste Relation auf der Hand liegt, soll nicht näher eingegangen werden.

Prag, Januar 1922. 157

Das Helmertsche Verteilungsgesetz für die Quadratsumme zufälliger Beobachtungsfehler.

Von **L. v. BORTKIEWICZ** in Berlin.

Gauß hat sein Fehlergesetz, wonach eine Wahrscheinlichkeit $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 u^2} d u$ dafür besteht, daß die zufällige Abweichung eines empirischen Wertes irgend einer Größe von ihrem wahren Wert, oder anders: der zufällige Fehler einer Größe, zwischen den Grenzen u und $u + d u$ eingeschlossen sei, im Jahre 1809 aufgestellt und dieses Fehlergesetz zum Angelpunkt der mathematischen Theorie der Beobachtungsfehler gemacht[1]). Die Frage, wie groß auf Grundlage des Gaußschen Gesetzes die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß die Quadratsumme einer beliebigen Anzahl zufälliger Fehler in ein bestimmtes differentielles Intervall falle, wurde — ungeachtet der Tatsache, daß diese Quadratsumme eine grundlegende Bedeutung für die mathematische Theorie der Beobachtungsfehler hat — erst sechsundsechzig Jahre später, und zwar von Helmert, aufgeworfen und gelöst[2]).

Helmert hat dabei angenommen, daß sämtlichen in Frage kommenden Fehlern Beobachtungen von gleicher Genauigkeit entsprechen, und er hat den Beweis in der Weise geführt, daß er zuerst die Fälle von 2, 3 und 4 Fehlern betrachtet, sodann die für diese drei Fälle gewonnenen Ergebnisse in einer Formel von bestimmter Gestalt zusammengefaßt und schließlich, um die Allgemeingültigkeit dieser Formel zu erweisen, gezeigt hat, daß, wenn sie für die Fehlerzahl n gelte, sie auch für die Fehlerzahl $n + 2$ gelten müsse. Dieser etwas mühsame Weg und jene einschränkende Annahme sollen im folgenden bei Ableitung des (verallgemeinerten) Helmertschen Verteilungsgesetzes vermieden werden[3]).

1. Die Wahrscheinlichkeit, daß $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ in ein bestimmtes differentielles Intervall fällt. Man fasse von vornherein n zufällige Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ ins Auge und bezeichne mit h_i die Präzision, die einem Fehler ε_i entspricht. Die Wahrscheinlichkeit, daß ε_i zwischen u_i und $u_i + d u_i$ enthalten ist, wird dann durch $\frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 u_i^2} d u_i$ ausgedrückt. An Stelle der Summe $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$ tritt hier nach der Fehlertheorie die Summe

$$\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Die Wahrscheinlichkeit für diese Summe, zwischen den Grenzen s und $s + d s$ enthalten zu sein, sei mit $f_n(s) d s$ bezeichnet. Des symmetrischen Charakters des Gaußschen Fehlergesetzes wegen stellt sich die Wahrscheinlichkeit, daß $|\varepsilon_i|$, d. h. der absolute Betrag eines Fehlers ε_i, zwischen u_i und $u_i + d u_i$ liege, als $\frac{2 h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 u_i^2} d u_i$ dar. Das ist zugleich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $|h_i \varepsilon_i|$ in den Grenzen $h_i u_i$ und $h_i u_i + h_i d u_i$ eingeschlossen bleibt. Setzt man $h_i u_i = t_i$, so erhält man als Ausdruck derselben Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t_i^2} d t_i$, und führt man die Bezeichnung

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_m^2 = r_m^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

---

[1]) C. F. Gauß, Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate, in deutscher Sprache herausgegeben von A. Börsch und P. Simon, Berlin 1887, S. 92—102.

[2]) F. R. Helmert, Ueber die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit im Zusammenhang stehende Fragen, Zeitschr. f. Math. u. Physik, Bd. 21, 1876, S. 192—218. Seine Endformel hatte Helmert bereits ebenda, Bd. 20, 1875, S. 303, mitgeteilt und hierbei die alsbaldige Veröffentlichung der Ableitung dieser Formel in Aussicht gestellt.

[3]) Zur Ableitung des Helmertschen Verteilungsgesetzes vergl. E. Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891, S. 147—150, und P. Pizzetti, I fondamenti matematici per la critica dei risultati sperimentali (Atti della Regia Università di Genova. Quarto centenario Columbiano, Genova 1892, S. 113 bis 333), S. 256—258.

ein, so läßt sich durch

$$\int_0^s f_n(r_n^2)\, d\, r_n^2$$

die Wahrscheinlichkeit dafür ausdrücken, daß die Summe (1) zwischen 0 und s zu liegen kommt. Man hat nun offenbar:

$$\int_0^s f_n(r_n^2)\, d\, r_n^2 = \int\int \ldots \int \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t_1^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t_2^2} \ldots \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t_n^2}\, d\, t_1\, d\, t_2 \ldots d\, t_n,$$

wobei die Integrationsgrenzen rechter Hand sich aus den Ungleichungen $0 < r_n^2 < s$ und aus der Bedingung ergeben, daß $t_1, t_2, \ldots t_n$ stets positiv bleiben. Alsdann findet man:

$$\int_0^s f_n(r_n^2)\, d\, r_n^2 = 2^n \pi^{-\frac{n}{2}} \int\int \ldots \int e^{-r_n^2}\, d\, t_1\, d\, t_2 \ldots d\, t_n$$

und, unter Anwendung der neu einzuführenden Bezeichnung

$$\int\int \ldots \int d\, t_1\, d\, t_2 \ldots d\, t_n = V_n(s) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

durch Differentiation nach s:

$$f_n(s) = 2^n \pi^{-\frac{n}{2}} e^{-s} \frac{d\, V_n(s)}{d\, s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Die Größe $V_n(s)$ läßt sich wie folgt bestimmen. Mit Rücksicht auf (2) hat man:

$$V_n(r_n^2) = \int_0^{r_n} \int_0^{r_{n-1}} \ldots \int_0^{r_1} d\, t_1\, d\, t_2 \ldots d\, t_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3'),$$

und setzt man:

$$\frac{\sqrt{r_m^2 - t_m^2}}{r_m} = \frac{r_{m-1}}{r_m} = v_m,$$

so erhält man:

$$t_m = r_m \sqrt{1 - v_m^2}, \qquad d\, t_m = -\frac{r_m\, v_m}{\sqrt{1 - v_m^2}}\, d\, v_m.$$

Demnach geht (3') in

$$V_n(r_n^2) = \int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{r_1\, v_1}{\sqrt{1 - v_1^2}} \frac{r_2\, v_2}{\sqrt{1 - v_2^2}} \ldots \frac{r_n\, v_n}{\sqrt{1 - v_n^2}}\, d\, v_1\, d\, v_2 \ldots d\, v_n$$

über. Man setze alsdann:

$$\int_0^1 \frac{v_m^m}{\sqrt{1 - v_m^2}}\, d\, v_m = c_m \quad \text{und} \quad c_1\, c_2 \ldots c_m = g_m \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Durch sukzessive Integrationen findet sich:

$$\int_0^1 \frac{r_1\, v_1}{\sqrt{1 - r_1^2}}\, d\, v_1 = g_1\, r_1 = g_1\, r_2\, v_2, \qquad \int_0^1 \frac{g_1\, r_2^2\, v_2^2}{\sqrt{1 - v_2^2}}\, d\, v_2 = g_2\, r_2^2 = g_2\, r_3^2\, v_3^2 \ldots$$

$$V_n(r_n^2) = \int_0^1 \frac{g_{n-1}\, r_n^n\, v_n^n}{\sqrt{1 - v_n^2}}\, d\, v_n = g_n\, r_n^n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3'').$$

Es läßt sich ferner aus (5) durch partielle Integration eine Rekursionsformel herleiten, mit deren Hilfe g_n leicht ermittelt werden kann. Man hat nämlich:

$$c_m = \int_0^1 \frac{v_m^{m-1}\, v_m\, d\, v_m}{\sqrt{1 - v_m^2}} = \left\{ -\, v_m^{m-1} \sqrt{1 - v_m^2} \right\}_0^1 + (m-1) \int_0^1 v_m^{m-2} \sqrt{1 - v_m^2}\, d\, v_m$$

$$= (m-1)(c_{m-2} - c_m),$$

woraus

$$c_m = \frac{m-1}{m} c_{m-2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

folgt. Zugleich ist:

$$c_0 = \int_0^1 \frac{d\,v_0}{\sqrt{1-v_0^2}} = \frac{\pi}{2}, \qquad c_1 = \int_0^1 \frac{v_1\,d\,v_1}{\sqrt{1-v_1^2}} = 1.$$

Es ergibt sich daher laut Formel (6) $c_2 = \frac{\pi}{4}$ und weiterhin auf Grund der Formeln (5) und (6):

$$\frac{g_{m+2}}{g_m} = c_1\,c_2\,\frac{c_3}{c_1}\frac{c_4}{c_2}\cdots\frac{c_{m+1}}{c_{m-1}}\frac{c_{m+2}}{c_m} = \frac{\pi}{4}\,\frac{2}{3}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{m}{m+1}\,\frac{m+1}{m+2},$$

$$\frac{g_{m+2}}{g_m} = \frac{\pi}{2\,(m+2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Somit erhält man schließlich, da $g_1 = 1$ und $g_2 = \frac{\pi}{4}$, bei n ungerade:

$$g_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\ldots n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8')$$

und bei n gerade:

$$g_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\ldots n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8'').$$

Damit ist der letzte vorbereitende Schritt zur Bestimmung von $f_n(s)$ getan. Greift man nunmehr auf die Formeln (4) und (3″) zurück, so findet man:

$$V_n(s) = g_n\,s^{\frac{n}{2}}, \qquad \frac{d\,V_n(s)}{d\,s} = \frac{n}{2}\,g_n\,s^{\frac{n-2}{2}}, \qquad f_n(s) = 2^{n-1}\,n\,\pi^{-\frac{n}{2}}\,s^{\frac{n-2}{2}}\,e^{-s}\,g_n,$$

mithin bei n ungerade wegen (8′):

$$f_n(s) = \frac{2^{\frac{n-1}{2}}\,s^{\frac{n-2}{2}}\,e^{-s}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(n-2)\sqrt{\pi}} = \frac{2^{n-1}\left(\frac{n-1}{2}\right)!\,s^{\frac{n-2}{2}}\,e^{-s}}{(n-1)!\sqrt{\pi}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9')$$

und bei n gerade wegen (8″):

$$f_n(s) = \frac{2^{\frac{n-2}{2}}\,s^{\frac{n-2}{2}}\,e^{-s}}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(n-2)} = \frac{s^{\frac{n-2}{2}}\,e^{-s}}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9'').$$

Um für $f_n(s)$ einen einheitlichen Ausdruck zu erhalten, der nicht mehr davon abhängt, ob n ungerade oder gerade ist, muß man das Eulersche Integral zweiter Gattung (Gammafunktion)

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}\,e^{-x}\,d\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

heranziehen.

Für ganzzahlige p ist bekanntlich $\Gamma(p) = (p-1)!$, für p-Werte, die in der Mitte zwischen zwei ganzen Zahlen liegen, $\Gamma(p) = \sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\ldots(p-1)$. Daher kann für (8′) und (8″) bezw. für (9′) und (9″) einheitlich geschrieben werden:

$$g_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n\,\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8), \qquad f_n(s) = \frac{s^{\frac{n-2}{2}}\,e^{-s}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Der von Helmert betrachtete Fall ist dadurch charakterisiert, daß $h_1 = h_2 = \ldots = h_n = h$. Bezeichnet man mit $\psi_n(u)\,du$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$ zwischen u und $u+du$ zu liegen kommt, so erhält man $h^2 u = s$, $h^2 du = ds$, $\psi_n(u)du = f_n(s)\,ds$ und folglich $\psi_n(u) = h^2 f_n(s)$. Daher ergibt sich auf der Grundlage von (9):

$$\psi_n(u)\,du = \frac{h^n\,u^{\frac{n-2}{2}}\,e^{-h^2 u}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,du\,^{1}).$$

---

[1]) So schreibt die Helmertsche Formel Czuber (a. a. O., S. 149, Formel 5), während bei Helmert selbst (a. a. O., S. 203, Formel 25) an Stelle von u und du die Produkte $n\,\sigma_2$ und $n\,\delta_2$ auftreten, wobei $\delta_2 = d\,\sigma_2$.

2. Die Wahrscheinlichkeit, daß $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ einen bestimmten Wert nicht überschreitet. Man fasse nunmehr die (von Helmert nicht betrachtete) Wahrscheinlichkeit ins Auge, daß $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ den Wert z nicht überschreitet. Bezeichnet man sie mit $F_n(z)$, so hat man der Formel (9) zufolge:

$$F_n(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^z s^{\frac{n-2}{2}} e^{-s} ds \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Bei $n = 1$ wird vermittelst der Substitution $s = t^2$

$$F_1(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{z}} e^{-t^2} dt$$

Bei $n > 1$ liegt der Fall weniger einfach. Das in (11) auftretende Integral erscheint als sogenannte unvollständige Gammafunktion und soll im folgenden einer eingebürgerten Bezeichnungsweise gemäß durch $\Gamma\left(\frac{n}{2}, z\right)$ dargestellt werden. Demnach ist

$$F_n(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}, z\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11').$$

Man setze $\frac{n}{2} = k$ und $k = \tau + \delta$, wo τ eine ganze Zahl ist, die der Bedingung $0 < \delta \leqq 1$ genügt. Durch wiederholte partielle Integration findet man:

$$\Gamma(k, z) = -e^{-z}\{z^{k-1} + (k-1)z^{k-2} + (k-1)(k-2)z^{k-3} + \ldots (k-1)(k-2)\ldots(\delta+1)z^{\delta}\}$$
$$+ (k-1)(k-2)\ldots(\delta+1)\,\delta \int_0^z s^{\delta-1} e^{-s} ds.$$

Diese Formel kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$\Gamma(k,z) = \delta(\delta+1)\ldots(k-1)\left[\int_0^z s^{\delta-1} e^{-s} ds - e^{-z}\left\{\frac{z^{\delta}}{\delta} + \frac{z^{\delta+1}}{\delta(\delta+1)} + \ldots + \frac{z^{k-1}}{\delta(\delta+1)\ldots(k-1)}\right\}\right] \quad (12).$$

Man erhält zugleich, indem man hierin $z = \infty$ setzt, die bekannte Beziehung:

$$\Gamma(k) = \delta(\delta+1)\ldots(k-1)\int_0^{\infty} s^{\delta-1} e^{-s} ds.$$

Daher findet man wegen (11'):

$$F_n(z) = \frac{\int_0^z s^{\delta-1} e^{-s} ds - e^{-z}\left\{\frac{z^{\delta}}{\delta} + \frac{z^{\delta+1}}{\delta(\delta+1)} + \ldots + \frac{z^{k-1}}{\delta(\delta+1)\ldots(k-1)}\right\}}{\int_0^{\infty} s^{\delta-1} e^{-s} ds} \quad \ldots \quad (11'').$$

Ist n **ungerade**, so hat man $\tau = \frac{n-1}{2}$, $\delta = 1/2$ zu setzen, und man erhält vermöge der Substitution $s = t^2$:

$$\int_0^z s^{\delta-1} e^{-s} ds = 2\int_0^{\sqrt{z}} e^{-t^2} dt, \qquad \int_0^{\infty} s^{\delta-1} e^{-s} ds = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

und folglich:

$$F_n(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{z}} e^{-t^2} dt - \frac{e^{-z}}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{2z^{\frac{1}{2}}}{1} + \frac{2^2 z^{\frac{3}{2}}}{1\cdot 3} + \ldots + \frac{2^{\frac{n-1}{2}} z^{\frac{n-2}{2}}}{1\cdot 3\ldots(n-2)}\right\}$$

oder auch

$$F_n(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{z}} e^{-t^2}\, dt - e^{-z} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{\sqrt{2z}}{1} + \frac{(\sqrt{2z})^3}{1 \cdot 3} + \ldots + \frac{(\sqrt{2z})^{n-2}}{1 \cdot 3 \ldots (n-2)} \right\} \qquad (12').$$

Ist aber n gerade, so hat man $\tau = \frac{n-2}{2}$, $\delta = 1$ zu setzen, und man erhält dementsprechend:

$$\int_0^z s^{\delta-1} e^{-s}\, ds = 1 - e^{-z}, \qquad \int_0^\infty s^{\delta-1} e^{-s}\, ds = 1$$

und folglich:

$$F_n(z) = 1 - e^{-z} \left\{ 1 + z + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{z^{\frac{n}{2}-1}}{1 \cdot 2 \ldots \left(\frac{n}{2} - 1\right)} \right\} \ldots \qquad (12'').$$

Die Formeln (12') und (12'') lassen sich mittels der Substitutionen $t\sqrt{2} = y$ und $\sqrt{2z} = \chi$ auch wie folgt darstellen:

$$F_n\left(\frac{\chi^2}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\chi} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy - e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{\chi}{1} + \frac{\chi^3}{1 \cdot 3} + \ldots + \frac{\chi^{n-2}}{1 \cdot 3 \ldots (n-2)} \right\} \qquad (13'),$$

$$F_n\left(\frac{\chi^2}{2}\right) = 1 - e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \left\{ 1 + \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^4}{2 \cdot 4} + \ldots + \frac{\chi^{n-2}}{2 \cdot 4 \ldots (n-2)} \right\} \ldots \qquad (13'').$$

Pearson gibt in seiner Tafel XII[1]) die numerischen Werte von

$$P_{n'}(\chi^2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_\chi^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy + e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{\chi}{1} + \frac{\chi^3}{1 \cdot 3} + \ldots + \frac{\chi^{n'-3}}{1 \cdot 3 \ldots (n'-3)} \right\} \qquad (14')$$

bei n' gerade und von

$$P_{n'}(\chi^2) = e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \left\{ 1 + \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^4}{2 \cdot 4} + \ldots + \frac{\chi^{n'-3}}{2 \cdot 4 \ldots (n'-3)} \right\} \ldots \qquad (14''),$$

bei n' ungerade für $n' = 3, 4, 5$ usw. bis 30 und $\chi^2 = 1, 2, 3$ usw. bis 30, sowie $\chi^2 = 40, 50, 60$ und 70 an.

Da, wie bekannt,

$$\int_\chi^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^\chi e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy,$$

so kann (14') auch wie folgt geschrieben werden:

$$P_{n'}(\chi^2) = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\chi} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy + e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{\chi}{1} + \frac{\chi^3}{1 \cdot 3} + \ldots + \frac{\chi^{n'-3}}{1 \cdot 3 \ldots (n'-3)} \right\} \qquad (15),$$

und man erhält demnach sowohl für n ungerade wie für n gerade die Beziehung:

$$F_n(z) = 1 - P_{n'}(\chi^2)$$

bei $n' = n + 1$, $\chi^2 = 2z$, oder anders geschrieben:

$$F_n(z) = 1 - P_{n+1}(2z) \ldots \qquad (16).$$

Es sei z. B. $n = 20$, und es werde nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, daß $\sum_{i=1}^{20} h_i^2 \varepsilon_i^2$ den Wert 13 nicht überschreite. Aus $\sqrt{2 \cdot 13} = \chi$ ergibt sich: $\chi^2 = 26$, und man findet in der Pearsonschen Tafel XII für $n' = 21$ und $\chi^2 = 26$: $P = 0{,}165\,812$. Der gesuchte Wert, d. h. $F_{20}(13)$, ist also $0{,}834\,188$.

Sofern man keine übermäßige Genauigkeit anstrebt und sich vielmehr auf etwa vier Dezimalstellen im Resultat beschränkt, kann $F_n(z)$ auf viel kürzerem Wege ermittelt

[1]) K. Pearson, Tables for statisticians and biometricians. Cambridge 1914, S. XXXI und 26 bis 28.

werden[1]). Man braucht nämlich nur, bei einem gegebenen n die Werte $f_n(s)$ für $s = 1, 2, 3$ usw. zu berechnen, um alsdann an Hand der Näherungsformel

$$F_n(z) = f_n(1) + f_n(2) + \ldots + f_n(z-1) + \frac{1}{2} f_n(z) + \frac{1}{24}\{f_n(z-1) - f_n(z+1)\} \quad (17)$$

zu den gesuchten Werten von $F_n(z)$ zu gelangen. Formel (17) leitet sich daraus her, daß näherungsweise

$$F_n(z) = \int_0^z f_n(s)\, ds = \frac{1}{2} f_n(0) + f_n(1) + f_n(2) + \ldots f_n(z-1) + \frac{1}{2} f_n(z) - \frac{1}{12}\{f_n'(z) - f_n'(0)\}$$

sowie

$$f_n'(z) = \frac{\{f_n(z) - f_n(z-1)\} + \{f_n(z+1) - f_n(z)\}}{2},$$

wobei noch $f_n(0) = f_n'(0) = 0$. Für $n = 20$ erhält man:

z	$F_n(z)$ genau	$F_n(z)$ näherungsweise	z	$F_n(z)$ genau	$F_n(z)$ näherungsweise	z	$F(z)$ genau	$F_n(z)$ näherungsweise
1	0,0000	0,0000	7	0,1695	0,1696	13	0,8342	0,8342
2	0,0000	0,0000	8	0,2834	0,2834	14	0,8906	0,8906
3	0,0011	0,0010	9	0,4126	0,4125	15	0,9301	0,9302
4	0,0081	0,0081	10	0 5421	0,5420	...	.....	.....
5	0,0318	0,0319	11	0 6595	0,6594	...	.....	.....
6	0,0839	0,0841	12	0,7576	0,7576	20	0,9950	0,9950

3. Die mathematische Erwartung, der mittlere Fehler und der wahrscheinlichste Wert von $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$. Bisher sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$, sei es in ein bestimmtes differentielles Intervall falle, sei es eine bestimmte Grenze nicht überschreite, betrachtet worden. Es bietet sowohl ein theoretisches wie ein praktisches Interesse, diese Betrachtungen in der Richtung auf die mathematische Erwartung oder das theoretische arithmetische Mittel, den mittleren Fehler und den wahrscheinlichsten Wert von $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ zu ergänzen. Bezeichnet man allgemein mit $\mathfrak{E}(x)$ die

[1]) Der hohe Grad der Genauigkeit der Werte $P_{n'}(\chi^2)$ bei Pearson steht übrigens in einem gewissen Widerspruch zu der Tatsache, daß bei dem praktischen Gebrauch, den er selbst und seine Schule von diesen Werten machen, die Funktion $P_{n'}(\chi^2)$ als solche nur näherungsweise die dabei in Frage kommende Wahrscheinlichkeit ausdrückt. Es handelt sich nämlich da um die Wahrscheinlichkeit, daß eine bestimmte aus n' Beobachtungsfehlern gebildete Größe (die aber nicht identisch ist mit der Summe der betreffenden »abgewogenen« Fehlerquadrate) den Wert χ^2 überschreite. Wäre $P_{n'}(\chi^2)$ ein genauer Ausdruck dieser Wahrscheinlichkeit, so müßte der mittlere Fehler der in Frage stehenden empirischen Größe genau gleich $\sqrt{2(n'-1)}$ sein; und das trifft eben nicht zu. Näheres hierüber in meiner Schrift »Die Iterationen«, Berlin 1917, S. 62 bis 66. Vergl. Richard Greiner, Ueber das Fehlersystem der Kollektivmaßlehre, in der Zeitschrift f. Math. u. Phys., Bd. 57, 1909, S 121 bis 158, 225 bis 260, 337 bis 373. Hier (S. 355 bis 357) findet sich, wie bei mir in den »Iterationen«, eine Ableitung des betreffenden mittleren Fehlers. Die — von der meinigen abweichende — Methode der Ableitung ist durchaus einwandfrei, und Greiner wäre auch zu einem mit dem meinigen übereinstimmenden Ergebnis gekommen, wenn er sich nicht, ganz am Schluß, bei Zusammenziehung gewisser Summanden, verrechnet hätte. Auf S. 356 muß nämlich die letzte Formel (Zeile 3 von unten) nicht

$$2\frac{n-1+s}{n}(s-1) + \sum_1^s \frac{1-p_i}{np_i}, \quad \text{sondern} \quad \frac{2(n-1)-s}{n}(s-1) + \sum_1^s \frac{1-p_i}{np_i}$$

lauten. Letzterer Ausdruck kann aber auch als

$$\frac{2(n-1)(s-1) - s^2}{n} + \frac{1}{n}\sum_1^s \frac{1}{p_i}$$

geschrieben werden, und er steht in dieser Form mit meiner Formel (42) auf S. 64 der »Iterationen« vollständig im Einklang. Dabei ist zu beachten, daß den Greinerschen Bezeichnungen n, s, p_i der Reihe nach meine Bezeichnungen s, m, π_i entsprechen.

mathematische Erwartung einer beliebigen Größe x, so findet man unter Berücksichtigung von (9) und (10):

$$\mathfrak{E}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2\right) = \int_0^\infty f_n(s)\, s\, ds = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty s^{\frac{n}{2}} e^{-s}\, ds = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{n}{2} \qquad (18),$$

$$\mathfrak{E}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2\right)^2\right\} = \int_0^\infty f_n(s)\, s^2\, ds = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty s^{\frac{n}{2}+1} e^{-s}\, ds = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n(n+2)}{4} \qquad (19)$$

und, nebenbei bemerkt, allgemein, d. h. für eine beliebige ganze positive Zahl r:

$$\mathfrak{E}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2\right)^r\right\} = \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) \ldots \left(\frac{n}{2}+r-1\right) = \frac{n(n+2)\ldots(n+2r-2)}{2^r} \qquad (20).$$

Man erhält ferner auf der Grundlage von (18) und (19) den mittleren Fehler von $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$, der mit μ_n bezeichnet werden soll, aus der bekannten Beziehung zwischen den Erwartungswerten $\mathfrak{E}(x)$, $\mathfrak{E}(x^2)$ und dem mittleren Fehler von x:

$$\mu_n = \sqrt{\frac{n(n+2)}{4} - \frac{n^2}{4}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \qquad (21).$$

Der wahrscheinlichste Wert $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$, der mit s' bezeichnet werden möge, entspricht der Bedingung

$$f_n(s') = \text{maximum},\quad f_n'(s') = \frac{s'^{\frac{n-4}{2}} e^{-s'}\left(\frac{n-2}{2} - s'\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = 0,$$

woraus

$$s' = \frac{n}{2} - 1$$

hervorgeht (man überzeugt sich leicht davon, daß $f_n''(s) < 0$ bei $s = \frac{n}{2} - 1$). In der Tatsache, daß s' um 1 hinter der mathematischen Erwartung von $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ zurückbleibt, kommt der asymmetrische Charakter des für die Größe $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ maßgebenden Fehlergesetzes zum Ausdruck.

4. Das für $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ maßgebende Fehlergesetz und seine Beziehungen zum Gaußschen Fehlergesetz. Da die mathematische Erwartung von $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ laut Formel (18) $\frac{n}{2}$ ist, so entspricht einem Wert s von $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ ein zufälliger Fehler von der Größe $s - \frac{n}{2}$. Man setze $s - \frac{n}{2} = v$ und bezeichne mit $\varphi_n(v)\, dv$ die Wahrscheinlichkeit für einen zufälligen Fehler von $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$, zwischen v und $v + dv$ enthalten zu sein. Es ist $\varphi_n(v)\, dv = f_n(s)\, ds$, und man braucht nur in (9) s durch $\frac{n}{2} + v$ zu ersetzen, um zu dem analytischen Ausdruck von $\varphi_n(v)$ zu gelangen. Man findet:

$$\varphi_n(v) = \frac{\left(\frac{n}{2}+v\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-v}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) e^{\frac{n}{2}}} \qquad (22).$$

Es kann nun gezeigt werden, daß das durch diese Formel dargestellte Fehlergesetz mit wachsendem n in das Gaußsche Fehlergesetz übergeht, d. h. daß $q_n(v)$ dem Grenzwert

$$\gamma_n(v) = \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 v^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

zustrebt, wobei $H = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Bestimmt man, nebenbei bemerkt, hieraus den mittleren Fehler von $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$, so erhält man in Uebereinstimmung mit (21):

$$\sqrt{\int_0^\infty \frac{2H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 v^2} v^2 \, dv} = \frac{1}{H\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24).$$

Der in Frage stehende Uebergang vollzieht sich mittels der Formel

$$\Gamma(n) = n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n(n+1)(n+2)} \cdots} \sqrt{2\pi}\,^{1)}.$$

Diese Formel ergibt:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{n}{2} + \frac{1}{6n} - \frac{1}{45n(n+2)(n+4)} \cdots} \sqrt{2\pi}$$

oder auch:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \sqrt{n\pi}\, e^{-\frac{n}{2} + \frac{1}{6n} - \frac{1}{45n(n+2)(n+4)} \cdots},$$

so daß man zunächst aus (22)

$$q_n(v) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{2v}{n}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-v - \frac{1}{6n} + \frac{1}{45n(n+2)(n+4)} \cdots} \quad \ldots \quad (22')$$

erhält. Man setze sodann $\frac{v}{n} = w$ und beachte im folgenden, daß mit Rücksicht auf (21) w von der Größenordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ist. Es ist nunmehr:

$$q_n(v) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} (1 + 2w)^{\frac{n}{2}-1} e^{-nw - \frac{1}{6n} + \frac{1}{45n(n+2)(n+4)} \cdots}$$

oder auch:

$$\log \text{nat}\, q_n(v) = -\log \text{nat}\, \sqrt{n\pi} + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \log \text{nat}\,(1 + 2w) - nw - \frac{1}{6n} + \frac{1}{45n(n+2)(n+4)} \cdots \quad (25).$$

Hieraus gewinnt man schließlich für $\log \text{nat}\, q_n(v)$ folgenden Ausdruck:

$$\log \text{nat}\, q_n(v) = -(\log \text{nat}\, \sqrt{n\pi} + nw^2) + \left(\frac{4}{3} n w^3 - 2w\right) - \left(2nw^4 - 2w^2 + \frac{1}{6n}\right) + \left(\frac{16}{5} n w^5 - \frac{8}{3} w^3\right) - \ldots \quad (25').$$

Demgegenüber erhält man aus (23):

$$\log \text{nat}\, \gamma_n(v) = -(\log \text{nat}\, \sqrt{n\pi} + nw^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23').$$

Sofern man die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ usw. hierbei vernachlässigt, stimmen also die natürlichen Logarithmen von $q_n(v)$ und von $\gamma_n(v)$ miteinander überein. Damit ist erwiesen, daß das für $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ maßgebende Fehlergesetz mit wachsendem n in der Tat allmählich in das Gaußsche Fehlergesetz übergeht, und zwar in dem Sinne, daß wenn man den Wert $w\sqrt{n}$ oder, was dasselbe ist, $\frac{v}{\sqrt{n}}$ (nicht aber w!) festhält, der

---

[1]) Siehe O. Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, Braunschweig 1866, Bd. 2, S. 259. Vergl. W. Láska, Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik, Braunschweig 1888, S. 269.

Quotient $\varphi_n(v) : \gamma_n(v)$ mit wachsendem n der Einheit zustrebt. Das tritt am deutlichsten zutage, wenn man $\varphi_n(v)$ als Funktion nicht mehr von n und w, sondern von n und $w\sqrt{n}$ darstellt. Man setze $w\sqrt{n} = r$. Dann findet man aus (25′) und (23′):

$$\frac{\varphi_n(v)}{\gamma_n(v)} = e^{\left(\frac{4r^3}{3\sqrt{n}} - \frac{2r}{\sqrt{n}}\right) - \left(\frac{2r^4}{n} - \frac{2r^2}{n} + \frac{1}{6n}\right) + \cdots}.$$

Es erübrigt, zu bestimmen, für welche Werte bezw. Wertbereiche von v die Gleichung $\varphi_n(v) = \gamma_n(v)$ bezw. die Ungleichungen $\varphi_n(v) > \gamma_n(v)$ und $\varphi_n(v) < \gamma_n(v)$ platzgreifen. Hierzu bilde man die halbe Differenz

$$\frac{\log\text{nat}\,\varphi_n(v) - \log\text{nat}\,\gamma_n(v)}{2} = \eta(w) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26).$$

Aus (25) und (23′) folgt:

$$2\eta(w) = n w^2 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\log\text{nat}(1 + 2w) - nw - \frac{1}{6n} + \frac{1}{45\,n(n+2)(n+4)} \cdots,$$

woraus sich durch drei sukzessive Differentiationen

$$\frac{d^3\eta(w)}{dw^3} = \frac{4(n-2)}{(1+2w)^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

ergibt. Nun hat man aber: $1 + 2w \geqq 0$, weil $1 + 2w = 1 + \frac{2v}{n} = \frac{2}{n}\left(\frac{n}{2} + v\right) = \frac{2s}{n}$. Die dritte Ableitung von $\eta(w)$ wechselt demnach ihr Vorzeichen nicht. Daher kann $\eta(w)$ höchstens drei Nullstellen haben; dementsprechend kann es höchstens drei voneinander verschiedene Werte von v geben, für welche $\varphi_n(v) = \gamma_n(v)$. Die Wurzeln dieser Gleichung seien, ohne daß hiermit der Entscheidung der Frage, ob sie tatsächlich sämtlich voneinander verschieden sind, vorgegriffen wird, mit v_1, v_2, v_3 bezeichnet, wobei $v_1 \leqq v_2 \leqq v_3$. Man setze ferner:

$$w = \frac{a}{\sqrt{n}} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n\sqrt{n}} + \cdots \qquad \eta(w) = \frac{A}{\sqrt{n}} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n\sqrt{n}} + \cdots \quad \ldots \quad (28)$$

und für $m = 1, 2, 3$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{v_m}{n} = w_m, \quad \frac{n}{2} + v_m = s_m, \\ &w_m = \frac{a_m}{\sqrt{n}} + \frac{b_m}{n} + \frac{c_m}{n\sqrt{n}} + \cdots, \quad \eta(w_m) = \frac{A_m}{\sqrt{n}} + \frac{B_m}{n} + \frac{C_m}{n\sqrt{n}} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (29).$$

Auf der Grundlage von (25′), (23′) und (26) findet man:

$$\eta(w) = \left(\frac{2}{3}n w^3 - w\right) - \left(n w^4 - w^2 + \frac{1}{12n}\right) + \left(\frac{8}{5}n w^5 - \frac{4}{3}w^3\right) - \cdots \quad (30).$$

Setzt man alsdann in (30) für w seinen durch (28) gegebenen Ausdruck ein, so nimmt $\eta(w)$ eine der dortigen Formel entsprechende Gestalt an, wobei, wie man sofort einsieht, A nur von a, B nur von a und b, C nur von a, b und c abhängt usw. Man erhält:

$$\left.\begin{aligned} &A = \frac{2a^3}{3} - a, \quad B = -a^4 + a^2 + (2a^2 - 1)b - \frac{1}{12}, \\ &C = 2a\left(\frac{4a^4}{5} - \frac{2a^2}{3} - 2a^2 b + b + b^2\right) + (2a^2 - 1)c \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (31).$$

Es ist nun $\eta(w_m) = 0$; daher findet man a_m, b_m, $c_m \ldots$ nacheinander aus $A_m = 0$, $B_m = 0$, $C_m = 0, \ldots$ Die Gleichung $A_m = 0$ liefert laut (31) die drei Werte:

$$a_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32).$$

Man hat ferner für $m = 1, 2, 3$

$$B_m = -a_m^4 + a_m^2 + (2a_m^2 - 1)b_m - \frac{1}{12} = 0$$

zu setzen, und findet hieraus, mit Rücksicht auf (32):

$$b_1 = \frac{5}{12}, \qquad b_2 = -\frac{1}{12}, \qquad b_3 = \frac{5}{12} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33).$$

Setzt man gleicherweise laut (31) für $m = 1, 2, 3$

$$C_m = 2a_m\left(\frac{4a_m^4}{5} - \frac{2a_m^2}{3} - 2a_m^2 b_m + b_m + b_m^2\right) + (2a_m^2 - 1)c_m = 0,$$

so ergeben sich hieraus, mit Rücksicht auf (32) und (33), die Werte:

$$c_1 = \frac{101}{720}\sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad c_2 = 0, \qquad c_3 = -\frac{101}{720}\sqrt{\frac{3}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34).$$

Die in (32), (33) und (34) angegebenen Lösungen gestatten die Unbekannten w_1, w_2 und w_3 näherungsweise, und zwar mit einem Fehler von der Größenordnung $\frac{1}{n^2}$, zu bestimmen: auf (29) zurückgreifend, erhält man:

$$w_1 = -\sqrt{\frac{3}{2n}} + \frac{5}{12n} + \frac{101}{720n}\sqrt{\frac{3}{2n}}, \quad w_2 = -\frac{1}{12n}, \quad w_3 = \sqrt{\frac{3}{2n}} + \frac{5}{12n} - \frac{101}{720n}\sqrt{\frac{3}{2n}} \quad (35)$$

und dementsprechend wegen (29):

$$v_1 = -\sqrt{\frac{3n}{2}} + \frac{5}{12} + \frac{101}{720}\sqrt{\frac{3}{2n}}, \quad v_2 = -\frac{1}{12}, \quad v_3 = \sqrt{\frac{3n}{2}} + \frac{5}{12} - \frac{101}{720}\sqrt{\frac{3}{2n}} \quad (36),$$

sowie

$$s_1 = \frac{n}{2} - \sqrt{\frac{3n}{2}} + \frac{5}{12} + \frac{101}{720}\sqrt{\frac{3}{2n}}, \quad s_2 = \frac{n}{2} - \frac{1}{12}, \quad s_3 = \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{3n}{2}} + \frac{5}{12} - \frac{101}{720}\sqrt{\frac{3}{2n}} \quad (37).$$

Es ergeben sich nach dem Vorstehenden vier Wertbereiche von v bezw. von s, in deren Grenzen die Differenz $\varphi_n(v) - \gamma_n(v)$ ihr Vorzeichen nicht ändert. Man hat aber:

$$\varphi_n(0) = \frac{e^{-\frac{1}{6n} + \frac{1}{45n(n+2)(n+4)}\cdots}}{\sqrt{n\pi}}, \quad \gamma_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}},$$

somit $\varphi_n(0) - \gamma_n(0) < 0$. Der Wert 0 von v bezw. $\frac{n}{2}$ von s fällt in den Bereich der Werte v_2 bis v_3 von v bezw. s_2 bis s_3 von s; daher ist die Differenz $\varphi_n(v) - \gamma_n(v)$ in diesem Bereich und folglich auch im Bereich der Werte $-\frac{n}{2}$ bis v_1 von v bezw. 0 bis s_1 von s negativ, hingegen im Bereich der Werte v_1 bis v_2 von v bezw. s_1 bis s_2 von s und im Bereich der Werte v_3 bis ∞ von v bezw. s_3 bis ∞ von s positiv.

5. Bemerkungen zu den graphischen Darstellungen. In Abb. 1 sind für $n = 20$ und in Abb. 2 für $n = 100$ die beiden Funktionen $\varphi_n(v)$ und $\gamma_n(v)$ dargestellt, und zwar $\varphi_n(v)$ als ausgezogene, $\gamma_n(v)$ als gestrichelte Kurve. Auf der Abszissenachse sind die Werte von s angegeben, die mit den zugehörigen Werten von v nach Maßgabe der Formel $v = s - \frac{n}{2}$ zusammenhängen.

Bei $n = 20$ erhält man den Formeln (37) zufolge:

$$s_1 = 4{,}98, \qquad s_2 = 9{,}92, \qquad s_3 = 15{,}86.$$

Gleiche oder nur wenig davon abweichende Werte erhält man durch lineare Interpolation auf der Grundlage der gegebenen Reihen der Werte $\varphi_n(v)$ und $\gamma_n(v)$. Die interpolierten Werte seien mit s_1', s_2', s_3' bezeichnet. Man hat:

s	v	$f_n(s) = \varphi_n(v)$	$\gamma_n(v)$
4	−6	0,01323	0,02085
5	−5	0,03627	0,03614

Es sei nun $s_1' = 4 + \lambda$. Aus der Gleichung

$$\varphi_n(-6) + \lambda\{\varphi_n(-5) - \varphi_n(-6)\} = \gamma_n(-6) + \lambda\{\gamma_n(-5) - \gamma_n(-6)\}$$

findet man:

$$\lambda = \frac{\gamma_n(-6) - \varphi_n(-6)}{\{\gamma_n(-6) - \varphi_n(-6)\} + \{\gamma_n(-5) - \gamma_n(-5)\}},$$

somit

$$\lambda = \frac{0{,}00762}{0{,}00762 + 0{,}000\,3} = \frac{762}{775} = 0{,}98$$

und $s_1' = 4{,}98$. Dieselbe Methode liefert die Werte $s_2' = 9{,}92$, $s_3' = 15{,}89$. Man überzeugt sich davon, daß s_3 genauer als s_3' ist, aus folgender Zusammenstellung:

s	v	$f_n(s) = \varphi_n(v)$	$\gamma_n(v)$	$10^5\{\varphi_n(v) - \gamma_n(v)\}$
15,86	5,86	0,02265	0,02266	− 1
15,89	5,89	0,02236	0,02226	10

Bei $n = 100$ erhält man nach den Formeln (37)

$$s_1 = 38{,}19, \qquad s_2 = 49{,}92, \qquad s_3 = 62{,}65$$

und nach obiger Interpolationsmethode:

$$s_1' = 38{,}16, \qquad s_2' = 49{,}92, \qquad s_3' = 62{,}68.$$

Nachstehende Tabelle zeigt, daß die Werte s_1, s_2 und s_3 bis auf die zweite Dezimale inklusive exakte Lösungen darstellen (was übrigens auch im Fall $n = 20$ zutrifft) und daß die Werte s_1' und s_3' ungenau sind.

s	v	$f_n(s) = \varphi_n(v)$	$\gamma_n(v)$	$10^6\{\varphi_n(v) - \gamma_n(v)\}$
38,16	−11,84	0,013868	0,013886	−18
38,17	−11,83	0,013908	0,013919	−11
38,18	−11,82	0,013948	0,013953	− 5
38,19	−11,81	0,013987	0,013985	2
38,20	−11,80	0,014027	0,014019	8
49,91	− 0,09	0,056422	0,056414	8
49,92	− 0,08	0,056412	0,056415	− 3
49,93	− 0,07	0,056403	0,056416	−13
62,64	12,64	0,011414	0,011417	− 3
62,65	12,65	0,011389	0,011388	1
62,66	12,66	0,011364	0,011359	5
62,67	12,67	0,011339	0,011331	8
62,68	12,68	0,011315	0,011302	13

In Abb. 3 und 4 versinnbildlichen für $n = 20$ bezw. $n = 100$ die ausgezogenen Kurven den Verlauf der Funktion $F_n(z)$, d. h. der Wahrscheinlichkeit, daß $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ kleiner als z ist, und die gestrichelten Kurven den Verlauf der Funktion $G_n(z)$, welche dieselbe Wahrscheinlichkeit ausdrücken würde, wenn hier das Gaußsche Fehlergesetz mit der Präzision $H = \frac{1}{\sqrt{n}}$ Anwendung fände, wobei die

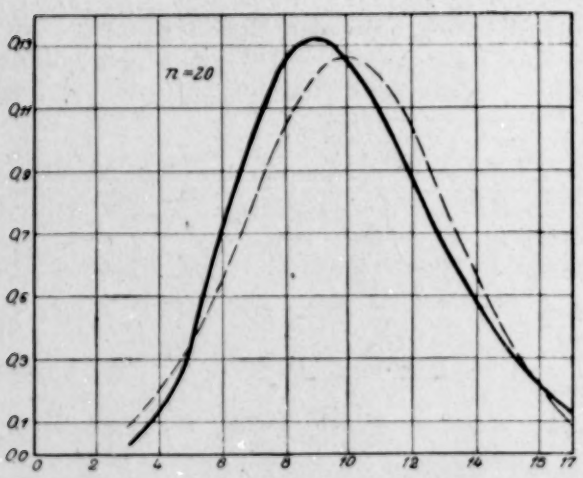


Abb. 1

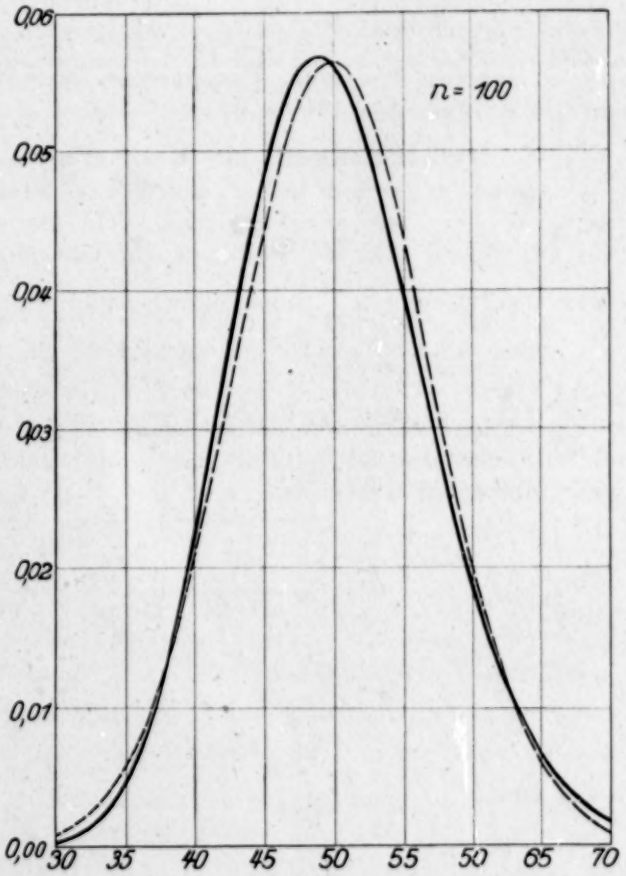


Abb. 2

Werte z auf der Abszissenachse aufgetragen sind. Es ist also:

$$G_n(z) = \int_{-\infty}^{z-\frac{n}{2}} \gamma_n(v)\, dv \quad \text{oder nach (23):} \quad G_n(z) = \int_{-\infty}^{z-\frac{n}{2}} \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 v^2}\, dv \quad . \quad . \quad (38).$$

Setzt man hierin $Hv = t$ und $H = \frac{1}{\sqrt{n}}$, so erhält man:

$$G_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{2}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{2}} e^{-t^2} dt,$$

welch letztere Formel sich mit Hilfe der Bezeichnung

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \Phi(x), \text{ und weil darnach } \Phi(-x) = -\Phi(x),$$

auch so darstellen läßt:

$$G_n(z) = \frac{1 + \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{2}\right)}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38').$$

Bei $z = \frac{n}{2}$ ist $G_n(z) = \frac{1}{2}$. Das bedeutet, daß die Wahrscheinlichkeit eines negativen Fehlers hier gleich $\frac{1}{2}$ ist, d. h. ebenso groß wie die Wahrscheinlichkeit eines positiven Fehlers, was durch den symmetrischen Charakter des Gaußschen Fehlergesetzes bedingt wird. So nehmen denn auch die Ordinaten $G_n(z)$ auf Abb. 3 bei $z = 10$ und auf Abb. 4 bei $z = 50$ den Wert 0,5 an. Demgegenüber zeigen die Ordinaten $F_n(z)$ auf Abb. 3 bei $z = 10$ und auf Abb. 4 bei $z = 50$ höhere Werte als 0,5 an, und darin kommt eben der asymmetrische Charakter des für $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ tatsächlich maßgebenden Fehlergesetzes zum Ausdruck.

Bezeichnet man die hiernach bestehende Wahrscheinlichkeit eines negativen Fehlers von $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ mit p_n und die eines positiven Fehlers mit q_n, so ist

$$p_n = F_n\left(\frac{n}{2}\right), \qquad q_n = 1 - F_n\left(\frac{n}{2}\right)$$

oder, der Formel (16) zufolge:

$$p_n = 1 - P_{n+1}(n), \qquad q_n = P_{n+1}(n).$$

Aus nachstehender Zahlentafel ersieht man, daß die Differenz $p_n - q_n$ mit wachsendem n immer kleiner wird, aber auch, daß sie noch bei ziemlich großen Werten von n nicht unbeträchtlich ist.

n	1	2	3	4	5	10	15	20	25	100
p_n	0,6826	0,6321	0,6084	0,5940	0,5841	0,5595	0,5486	0,5421	0,5376	0,5188
q_n	0,3174	0,3679	0,3916	0,4060	0,4159	0,4405	0,4514	0,4574	0,4624	0,4812
$p_n - q_n$	0,3652	0,2642	0,2168	0,1880	0,1682	0,1190	0,0972	0,0842	0,0752	0,0376

Für die Wahrscheinlichkeiten p_n und q_n lassen sich leicht gute Annäherungen finden. Wegen (26) hat man:

$$\eta_n(v) = \gamma_n(v)\, e^{2\eta(w)} = \gamma_n(v)\,[1 + 2\eta(w) + 2\{\eta(w)\}^2 + \ldots].$$

Hieraus erhält man, wenn man Formel (30) heranzieht und w durch $\frac{v}{n}$ ersetzt:

$$\eta_n(v) = \gamma_n(v)\left\{1 - \left(\frac{2v}{n} - \frac{4v^3}{3n^3}\right) + \left(\frac{4v^2}{n^2} - \frac{14v^4}{3n^3} + \frac{8v^6}{9n^4} - \frac{1}{6n}\right)\ldots\right\}.$$

Es ist nun:

$$q_n = \int_0^\infty \eta_n(v)\, dv,$$

und es ergibt sich daher mit Benutzung der neuen Bezeichnung $2\int_0^\infty \gamma_n(v)\, v^r\, dv = \sigma_r$:

$$q_n = \left(1 - \frac{1}{6n}\right)\frac{\sigma_0}{2} - \left(\frac{\sigma_1}{n} - \frac{2\sigma_3}{3n^2}\right) + \left(\frac{2\sigma_2}{n^2} - \frac{7\sigma_4}{3n^3} + \frac{4\sigma_6}{9n^4}\right)\ldots$$

Es bestehen aber die bekannten Beziehungen:

$$\sigma_0 = 1,\ \sigma_1 = \frac{1}{H\sqrt{\pi}},\ \sigma_2 = \frac{1}{2H^2},\ \sigma_3 = \frac{1}{H^3\sqrt{\pi}},\ \sigma_4 = \frac{1}{4H^4},\ \sigma_6 = \frac{15}{8H_6}\ldots,$$

oder da $H = \frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{n}{\pi}},\ \sigma_2 = \frac{n}{2},\ \sigma_3 = \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}},\ \sigma_4 = \frac{3n^2}{4},\ \sigma_6 = \frac{15n^3}{8}\ldots,$$

und setzt man diese Werte von $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \ldots$ in den obigen Ausdruck für q_n ein, so erhält man unter Vernachlässigung der Glieder von der Größenordnung $\frac{1}{n\sqrt{n}}, \frac{1}{n^2}$ usw. (also unter Mitberücksichtigung der Glieder von der Größenordnung $\frac{1}{n}$, die sich hier gegeneinander aufheben!):

$$q_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\sqrt{n\pi}}, \quad \text{somit auch} \quad p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{n\pi}}.$$

Die Unterschiede zwischen den Werten von p_n und q_n, die diese Näherungsformeln liefern, und ihren genauen Werten sind schon bei mäßigen Werten von n minimal. So erhält man z. B. bei $n = 5, 15, 25$ für p_n die genauen Werte 0,58412, 0,54858, 0,53763 und auf Grund der Formel $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{n\pi}}$ die Näherungswerte 0,58410, 0,54856, 0,53761.

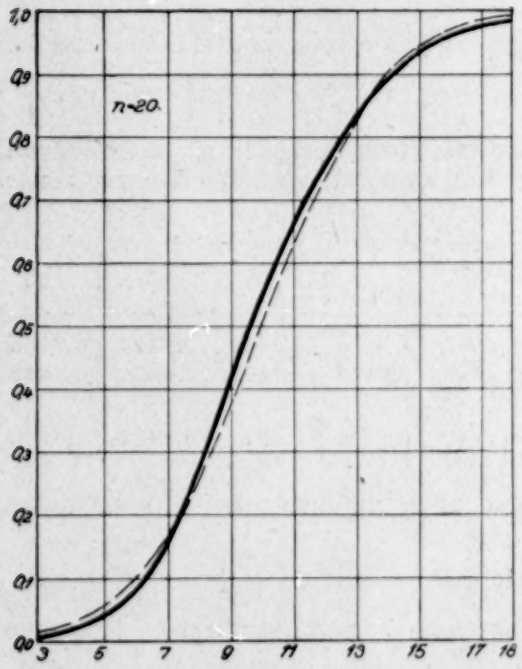


Abb. 3

6. Der durchschnittliche Fehler von $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$. Es sei ϑ_n die mathematische Erwartung von $\left|s - \frac{n}{2}\right|$ oder der (theoretische) durchschnittliche Fehler von $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$. Man hat zunächst:

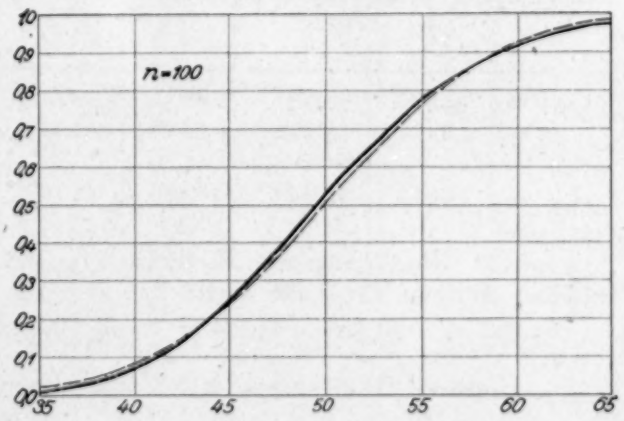


Abb. 4

$$\vartheta_n = -\int_{-\frac{n}{2}}^{0} q_n(v)\, v\, dv + \int_0^\infty q_n(v)\, v\, dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39).$$

Es ist aber

$$\int_{-\frac{n}{2}}^{\infty} \varphi_n(v)\, v\, dv = 0, \quad \text{daher} \quad -\int_{-\frac{n}{2}}^{0} \varphi_n(v)\, v\, dv = \int_{0}^{\infty} \varphi_n(v)\, v\, dv,$$

so daß (39) auch in der Form

$$\vartheta_n = -2\int_{-\frac{n}{2}}^{0} \varphi_n(v)\, v\, dv = 2\int_{0}^{\frac{n}{2}} f_n(s)\left(\frac{n}{2} - s\right) ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39')$$

dargestellt werden kann.

Auf der Grundlage der Formel (9) findet man alsdann:

$$\frac{d}{ds}\{s\, f_n(s)\} = \frac{d}{ds}\left\{\frac{s^{\frac{n}{2}} e^{-s}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right\} = \frac{s^{\frac{n}{2}-1} e^{-s}\left(\frac{n}{2} - s\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = f_n(s)\left(\frac{n}{2} - s\right).$$

Folglich erhält man aus (39'):

$$\vartheta_n = n\, f_n\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39'').$$

Für den praktischen Gebrauch muß dieses Ergebnis in folgender Weise umgeformt werden. Bei n ungerade hat man

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \ldots (n-2)}{2^{\frac{n-1}{2}}}\sqrt{\pi} = \frac{(n-1)!\sqrt{\pi}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\, 2^{n-1}}, \quad \text{somit} \quad \vartheta_n = \frac{(2n)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi}\,(n-1)!} \qquad (40')$$

und bei n gerade:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n-2}{2}\right)! = \frac{2}{n}\left(\frac{n}{2}\right)!, \quad \text{somit} \quad \vartheta_n = \frac{n\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \quad . \quad . \quad (40'').$$

Zur Bestimmung von ϑ_n für $n = 2, 3$ usw. bis 28 kann man sich auch der Pearsonschen Tafel XII bedienen. Aus (39') findet man nämlich, mit Rücksicht auf (9) und (11):

$$\vartheta_n = n\left\{F_n\left(\frac{n}{2}\right) - F_{n+2}\left(\frac{n}{2}\right)\right\} \text{ oder wegen (16): } \vartheta_n = n\{P_{n+3}(n) - P_{n+1}(n)\} \quad (41).$$

Der Ausdruck für ϑ_n, wie ihn Formel (39'') liefert, verwandelt sich mit Hilfe der Formel (22'), in Anbetracht dessen, daß $f_n\left(\frac{n}{2}\right) = \varphi_n(0)$, in

$$\vartheta_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\, e^{-\frac{1}{6n} + \frac{1}{45n(n+2)(n+4)} \cdots}.$$

Hieraus ergeben sich die Näherungsformeln

$$\vartheta_n = \frac{6n-1}{6n}\sqrt{\frac{n}{\pi}}, \qquad \vartheta_n = \frac{6n}{6n+1}\sqrt{\frac{n}{\pi}}, \qquad \vartheta_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \quad . \quad . \quad . \quad (42).$$

Der letzte Ausdruck für ϑ_n entspricht der Annahme, daß für $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ das Gaußsche Fehlergesetz maßgebend ist. Unter dieser Annahme findet man in der Tat:

$$\vartheta_n = -2\int_{-\infty}^{0} \gamma_n(v)\, v\, dv = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0} 2He^{-h^2 v^2}\, v\, dv = \frac{1}{H\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

Nachstehende Zahlentafel enthält für einige Werte von n die Werte von ϑ_n, berechnet 1. nach einer der beiden Formeln (40') oder (40") oder auch nach Formel (41); 2., 3., 4. nach (42). Bemerkenswert ist es, wie sich namentlich die zweite Formel in (42) selbst bei den kleinsten Werten von n bewährt.

n	Genauer Wert von ϑ_n	$\frac{6n-1}{6n}\sqrt{\frac{n}{\pi}}$	$\frac{6n}{6n+1}\sqrt{\frac{n}{\pi}}$	$\sqrt{\frac{n}{\pi}}$
1	0,4839	0,4702	0,4836	0,5642
2	0,7358	0,7314	0,7365	0,7979
3	0,9251	0,9229	0,9258	0,9772
4	1,0827	1,0814	1,0832	1,1284
5	1,2204	1,2195	1,2208	1,2615
10	1,7547	1,7544	1,7547	1,7841
15	2,1610	2,1608	2,1610	2,1850
20	2,5022	2,5021	2,5022	2,5231
25	2,8022	2,8021	2,8022	2,8209
100	5,6325	5,6325	5,6325	5,6419

Der durchschnittliche Fehler ϑ_n läßt sich als (gewogenes) arithmetisches Mittel des entsprechenden positiv genommenen negativen und des entsprechenden positiven durchschnittlichen Fehlers darstellen. Bezeichnet man ersteren mit ϑ_n' und letzteren mit ϑ_n'', so hat man:

$$\vartheta_n' = \frac{-\int_{-\frac{n}{2}}^{0} \varphi_n(v)\, v\, dv}{\int_{-\frac{n}{2}}^{0} \varphi_n(v)\, dv}, \qquad \vartheta_n'' = \frac{\int_{0}^{\infty} \varphi_n(v)\, v\, dv}{\int_{0}^{\infty} \varphi_n(v)\, dv}, \quad \vartheta_n = \frac{p_n \vartheta_n' + q_n \vartheta_n''}{p_n + q_n} = p_n \vartheta_n' + q_n \vartheta_n'' \quad (43).$$

Es ist aber $-p_n \vartheta_n' + q_n \vartheta_n'' = 0$, so daß aus (43)

$$\vartheta_n' = \frac{\vartheta_n}{2 p_n}, \qquad \vartheta_n'' = \frac{\vartheta_n}{2 q_n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

folgt. Die Rechnung ergibt:

n	1	2	3	4	5	10	15	20	25	100
ϑ_n'	0,354	0 582	0,760	0,911	1,045	1,568	1,970	2,308	2,606	5,428
ϑ_n''	0,762	1,000	1,181	1,333	1,467	1,992	2,394	2,732	3,030	5,852
$\vartheta_n'' - \vartheta_n'$	0,408	0,418	0,421	0,422	0,422	0,424	0,424	0,424	0,424	0,424

Das Ergebnis $\vartheta_n'' - \vartheta_n' = 0{,}424$ bei $n = 10$, 15 usw. steht mit den vorhin abgeleiteten Näherungsformeln für p_n und q_n sowie für ϑ_n im Einklang. Man findet nämlich aus (44): $\vartheta_n'' - \vartheta_n' = \frac{(p_n - q_n)\,\vartheta_n}{2 p_n q_n}$ und braucht nur $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{n\pi}}$, $q_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\sqrt{n\pi}}$, daher $p_n - q_n = \frac{2}{3\sqrt{n\pi}}$, $p_n q_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{4}{9n\pi}\right)$, sowie $\vartheta_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}}$ zu setzen, um zunächst $\vartheta_n'' - \vartheta_n' = \frac{4}{3\pi\left(1 - \frac{4}{9n\pi}\right)}$ und als Endresultat (da die Beibehaltung des eingeklammerten Faktors im Nenner offenbar sinnlos wäre): $\vartheta_n'' - \vartheta_n' = \frac{4}{3\pi} = 0{,}424413$ zu bekommen.

7. Folgerungen in bezug auf den Divergenzkoeffizienten. Die Maßgröße, welche in der mathematischen Statistik als Divergenzkoeffizient bezeichnet zu werden pflegt, wird in dem Fall, wo die in Frage kommenden n Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit sind, durch

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon_i^2}{m_i^2}}$$

dargestellt, wobei ε_i, wie im Vorangehenden, die Beobachtungsfehler und m_i die zugehörigen mittleren Fehler sind. Folgen nun die Fehler ε_i dem Gaußschen Fehlergesetz und werden die zugehörigen Präzisionen mit h_i bezeichnet, so bestehen die Beziehungen $m_i = \frac{1}{h_i\sqrt{2}}$. Demgemäß erhält man für den Divergenzkoeffizienten, der mit Q_n bezeichnet werden möge, die Formel:

$$Q_n = \sqrt{\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i^2\,\varepsilon_i^2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß Q_n zwischen α und $\alpha + d\alpha$ enthalten ist, sei mit $\omega_n(\alpha)\,d\alpha$ bezeichnet. Es ist $\alpha = \sqrt{\frac{2s}{n}}$ oder auch $s = \frac{n\alpha^2}{2}$, daher $\frac{ds}{d\alpha} = n\alpha$, und man hat:

$$\omega_n(\alpha)\,d\alpha = f_n(s)\,ds, \quad \omega_n(\alpha) = n\alpha f_n(s).$$

Greift man nunmehr auf (9) zurück, so ergibt sich:

$$\omega_n(\alpha) = \frac{2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\alpha^{n-1}e^{-\frac{n\alpha^2}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45).$$

Hiermit ist das für Q_n maßgebende Verteilungsgesetz gewonnen. Dementsprechend erhält man die mathematische Erwartung oder das (theoretische) arithmetische Mittel von Q_n in der Form:

$$\mathfrak{E}(Q_n) = \frac{2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty \alpha^n e^{-\frac{n\alpha^2}{2}}\,d\alpha.$$

Es ist aber:

$$\int_0^\infty \alpha^n e^{-\frac{n\alpha^2}{2}}\,d\alpha = \frac{1}{n}\int_0^\infty \left(\frac{2s}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-s}\,ds,$$

daher:

$$\mathfrak{E}(Q_n) = \frac{\sqrt{\frac{2}{n}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty s^{\frac{n-1}{2}} e^{-s}\,ds = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\sqrt{\frac{2}{n}} \quad \ldots\ldots \quad (46).$$

Die numerische Auswertung von $\mathfrak{E}(Q_n)$ geschieht am besten in folgender Weise. Auf der Grundlage von (46) hat man auch:

$$\mathfrak{E}(Q_{n+1}) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\sqrt{\frac{2}{n+1}},$$

und diese Formel im Zusammenhang mit Formel (46) ergibt die Rekursionsformel

$$\mathfrak{E}(Q_{n+1}) = \frac{1}{\mathfrak{E}(Q_n)}\sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

Setzt man in (46) $n = 1$, so findet man: $\mathfrak{E}(Q_1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, und von hier aus führt die Rekursionsformel zu den Werten:

$$\mathfrak{E}(Q_2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \mathfrak{E}(Q_3) = 2\sqrt{\frac{2}{3\pi}}, \quad \mathfrak{E}(Q_4) = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ usw.}$$

Zieht man aber die Formeln

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{(n+1)\,\pi}\; e^{-\frac{n+1}{2}+\frac{1}{6(n+1)}\cdots}, \quad \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \sqrt{n\,\pi}\; e^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{6n}\cdots}$$

heran, so verwandelt sich Formel (46) in:

$$\mathfrak{E}(Q_n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{6n(n+1)}\cdots}.$$

Hieraus folgt:

$$\log \text{nat}\, \mathfrak{E}(Q_n) = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \ldots\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{6n^2}\cdots,$$

und man erhält unter Vernachlässigung der Glieder von der Größenordnung $\frac{1}{n^3}$, $\frac{1}{n^4}$ usw. die Näherungsformel:

$$\log \text{nat}\, \mathfrak{E}(Q_n) = -\frac{1}{4n} \quad \text{bezw.} \quad \mathfrak{E}(Q_n) = e^{-\frac{1}{4n}}$$

oder die bequemere Näherungsformel

$$\mathfrak{E}(Q_n) = 1 - \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (47).$$

Daß letztere Formel auch bei kleinen Werten von n gute Annäherungen liefert, ist aus folgender Zusammenstellung zu ersehen, wo unter (46) die genauen, d. h. nach Formel (46) berechneten und unter (47) die approximativen, d. h. nach Formel (47) berechneten Werte von $\mathfrak{E}(Q_n)$ aufgeführt sind.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(46)	·7979	·8862	·9213	·9400	·9515	·9594	·9650	·9693	·9727	·9754
(47)	·7812	·8828	·9201	·9395	·9512	·9592	·9649	·9692	·9726	·9753

Der wahrscheinlichste Wert von Q_n, der mit α' bezeichnet werden möge, bestimmt sich aus dem Ansatz $\omega_n'(\alpha') = 0$. Formel (45) ergibt: $\alpha' = \sqrt{1-\frac{1}{n}}$. Der wahrscheinlichste Wert der Größe Q_n ist hiernach kleiner als deren (theoretisches) arithmetisches Mittel, d. h. als $\mathfrak{E}(Q_n)$. Da $Q_n \gtreqless 1$, je nachdem $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2 \gtreqless \frac{n}{2}$, so sind durch die vorher betrachteten Wahrscheinlichkeiten p_n und q_n zugleich die Wahrscheinlichkeiten gegeben, daß $Q_n < 1$ bezw. $Q_n > 1$.

Beim Operieren mit dem Divergenzkoeffizienten liegen die Dinge in der Praxis meist so, daß zunächst die wahren Fehler (ε_i) unbekannt und daher durch die entsprechenden scheinbaren Fehler ersetzt werden müssen, daß sodann auch die genauen Werte der Präzisionen (h_i) fehlen und daß schließlich, sofern den Gegenstand der Beobachtung statistische Häufigkeitszahlen bilden, die in Frage kommenden Fehler nur näherungsweise dem Gaußschen Fehlergesetz folgen. Diese drei Umstände bringen Komplikationen mit sich, auf die im Rahmen dieses Aufsatzes nicht weiter eingegangen werden kann [1]).

8. Anhang. Geometrische Deutung der Funktion $V_n(r_n^2)$. Die zwecks Ableitung der grundlegenden Formel (9) eingeführte Hilfsgröße $V_n(r_n^2)$ stellt $\frac{1}{2^n}$ des »Rauminhalts« einer »n-dimensionalen Kugel« dar, d. h. eines Gebildes, dessen Oberfläche — ein »rechtwinkliges« Koordinatensystem $t_1, t_2 \ldots t_n$, dessen Anfang im Zentrum der Kugel liegt, vorausgesetzt — durch die Gleichung $t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2 = r_n^2$ bestimmt

[1]) In welcher Weise dem Umstand, daß an Stelle der wahren die scheinbaren Fehler treten, Rechnung zu tragen ist, hat (für den Fall von Beobachtungen gleicher Genauigkeit) Helmert in seiner Abhandlung »Die Genauigkeit der Formel von Peters zur Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers direkter Beobachtungen gleicher Genauigkeit« (Astronomische Nachrichten, Bd. 88, 1876, Nr. 2096) gezeigt. Er beweist hier, daß die Wahrscheinlichkeit für die Quadratsumme von n scheinbaren Fehlern, in ein bestimmtes differentielles Intervall zu fallen, gerade so groß ist, wie die Wahrscheinlichkeit für die Quadratsumme von $n-1$ wahren Fehlern in dasselbe differentielle Intervall zu fallen. Vergl. Czuber, a. a. O., S. 160–162, und Pizzetti, a. a. O., S. 267.

ist. Der Koeffizient $\frac{1}{2^n}$ gibt an, welchen Anteil an der Gesamtzahl aller Koordinaten-Kombinationen die Kombinationen mit lauter positiven Koordinaten haben. Eine »zweidimensionale Kugel« ist ein Kreis und eine »eindimensionale Kugel« ist der Durchmesser eines Kreises.

Bezeichnet man mit $W_n(r_n^2)$ den ganzen Rauminhalt des betreffenden Gebildes, so besteht die Beziehung:

$$W_n(r_n^2) = 2^n V_n(r_n^2) \text{ bezw. bei } r_n = \text{konst.} = r: \quad W_n(r^2) = 2^n V_n(r^2),$$

und man erhält auf Grund der Formeln (3″) und (8):

$$W_n(r^2) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.$$

Es ist

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \quad \Gamma(3) = 2, \quad \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}, \quad \Gamma(4) = 6$$

usw. Daher:

$$W_1(r^2) = 2r, \quad W_2(r^2) = \pi r^2, \quad W_3(r^2) = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad W_4(r^2) = \frac{\pi^2 r^4}{2}, \quad W_5(r^2) = \frac{8\pi^2 r^5}{15} \text{ usw.}$$

Die hierbei in Frage kommende Rekursionsformel ist:

$$W_{n+2}(r^2) = \frac{2\pi r^2}{n+2} W_n(r^2). \qquad [173]$$

Die Dreieckrechentafeln und die hydraulische Energieumwandlungskurve.[1]

Von **OTTO LACMANN** in Kristiania.

Geometrische Grundlage. Ziehen wir durch einen beliebigen, zunächst im Innern eines gleichseitigen Dreiecks gelegenen Punkt P Parallele zu den drei Dreiecksseiten, so entstehen drei neue, in der Abb. 1 schraffierte, gleichseitige Dreiecke, und wir können unmittelbar aus der Abbildung ersehen, daß die Summe der Seiten dieser Dreiecke gleich der Seite des Ausgangsdreiecks ist, woraus folgt, daß auch die Summe der drei in der Abbildung gestrichelt gezeichneten Höhen gleich ist der Höhe des ursprünglichen Dreiecks. Genau dasselbe läßt sich auf dieselbe Weise für Punkte P beweisen, die außerhalb des Ausgangsdreiecks liegen, sofern wir nur den Loten das positive bezw. negative Vorzeichen geben, je nachdem der Punkt P bezüglich der für das betreffende Lot in Betracht kommenden Dreiecksseite auf derselben bezw. entgegengesetzten Seite wie das Dreieck selbst liegt. Der so gewonnene Satz lautet daher in seiner allgemeinen Fassung:

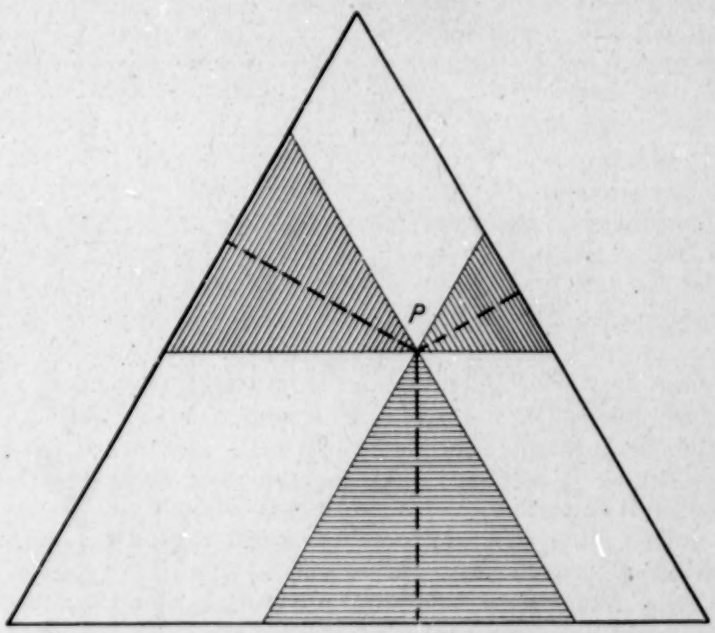


Abb. 1

[1]) Die nachstehenden Ausführungen stützen sich auf den Abschnitt IV A 3 (Rechentafeln mit Dreieckbezugsystem) meiner Doktordissertation über Nomographie. Stuttgart 1921.

Fällen wir von einem beliebigen, in der Ebene eines gleichseitigen Dreiecks gelegenen Punkte auf die Dreieckseiten die Lote, so ist bei Berücksichtigung der Vorzeichen die Summe der Längen dieser Lote gleich der Höhe des Dreiecks[1]).

2. Dreieckrechentafeln mit regelmäßigem Netz. Ein einfaches Beispiel möge dartun, wie man mit Hilfe dieses Satzes ein anschauliches Bild der prozentuellen Zusammensetzung verschiedener Gemische derselben drei Substanzen A, B und C erhalten kann. Besteht dieses Gemisch aus:

u % Substanz A v % Substanz B w % Substanz C,

so ist: $u\,\% + v\,\% + w\,\% = 100\,\%$.

Zeichnen wir nun ein gleichseitiges Dreieck, dessen Höhe gleich 100 passend groß gewählten Längeneinheiten ist, so entspricht jedem Punkt des Dreiecksinnern ein mögliches Gemisch, das durch die in derselben Einheit gemessenen Abstände des Punktes von den Dreieckseiten definiert ist. Um diese Abstände nicht mit einem Maßstabe ausmessen zu müssen, empfiehlt es sich, die von der Firma Carl Schleicher und Schüll in Düren in den Handel gebrachten gedruckten Dreiecksnetze zu benutzen, an deren Rand die den einzelnen Geraden zukommenden Abstände u, v und w von den Seiten des Ausgangsdreiecks angeschrieben werden. In Abb. 2 ist als Beispiel nur der dem Gemisch

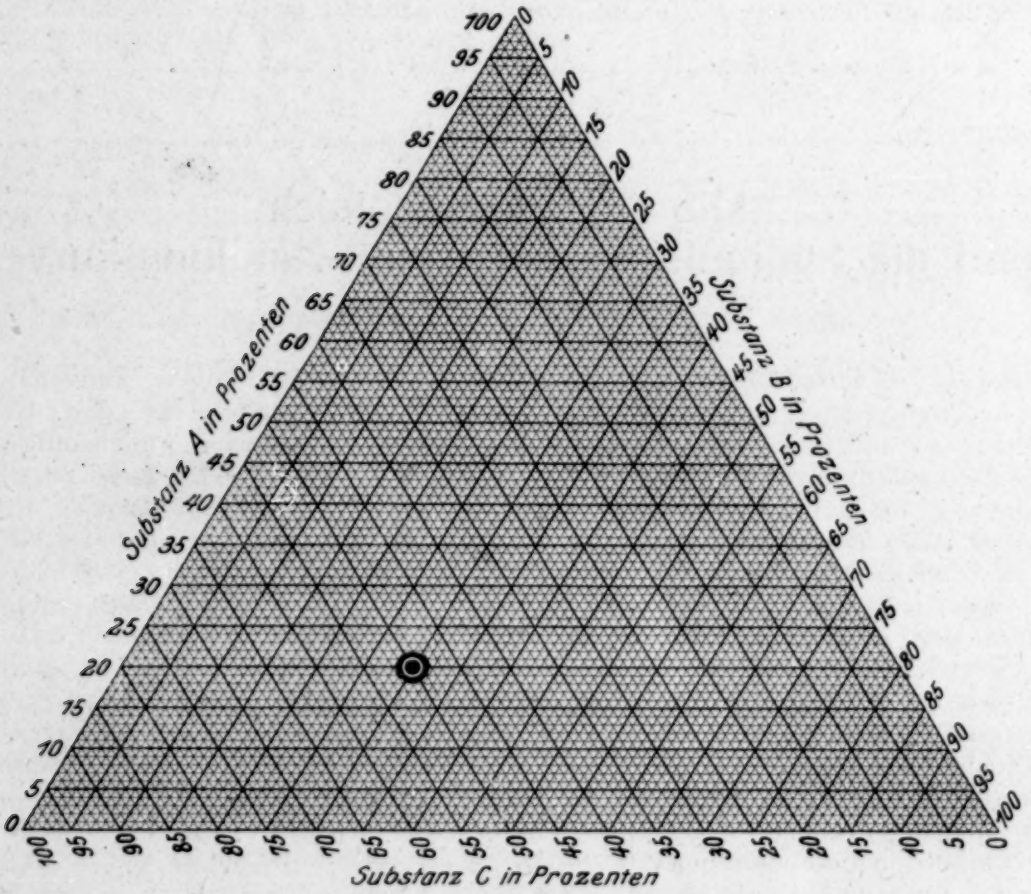


Abb. 2

20 % A-Substanz, 30 % B-Substanz und 50 % C-Substanz entsprechende Punkt in ein solches Netz eingetragen. (s. auch Prof. Dr. Grosse, Graphische Papiere und ihre vielseitige Verwendung, Düren 1917.)

Ausgehend von diesen, zumal von Chemikern verwendeten Dreiecksnetzen sollen hier an Hand verschiedener Beispiele allgemeinere Rechentafeln hergeleitet werden, die auch für weitere Kreise von Interesse sein dürften.

[1]) Ich verdanke obigen Beweis, der sich vor anderen durch seine große Anschaulichkeit auszeichnet, einer freundlichen Mitteilung des Herrn Prof. Dr. von Hammer.

Bei einer stationären Strömung vollkommener Flüssigkeit besteht zwischen der Höhenlage z über einer beliebigen wagerechten Ausgangsebene, dem Drucke p und der Geschwindigkeit v von Flüssigkeitsteilchen die als Bernoullische Gleichung bekannte Beziehung:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = C,$$

worin die hydraulische Höhe C bei Potentialbewegung eine im ganzen Strömungsbereich, sonst eine nur längs einer bestimmten Stromlinie gleichbleibende Größe ist. Die drei Glieder der linken Seite stellen sämtlich Längenwerte dar und werden auch Höhe H, Druckhöhe D und Geschwindigkeitshöhe G genannt. Mit diesen Bezeichnungen lautet obige Gleichung:

$$H + D + G = C.$$

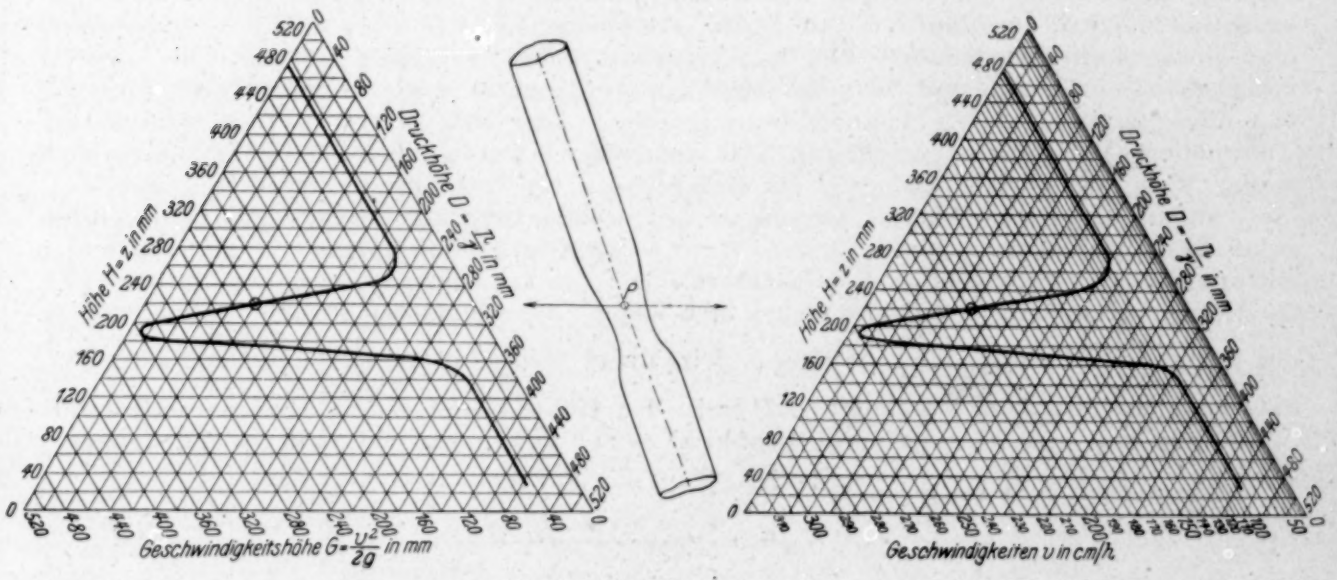


Abb. 3a—c

In Abb. 3a wurde die Rechentafel für diese Beziehung entworfen, dabei wurde $C = 520$ mm angenommen und die der Zahleneinheit entsprechende Längeneinheit in der Zeichnung zu 0,5 mm gewählt. In jedem Punkt der Tafel kann man somit eine bei einer hydraulischen Höhe von 520 mm mögliche Verteilung der kinetischen, potentiellen und Druckenergie ablesen.

3. Hydraulische Energieumwandlungskurve. Wir wollen nun annehmen, daß in dem in Abb. 3b dargestellten Rohrstück sich ein stationärer Strömungsvorgang abspiele, der durch die hydraulische Höhe $C = 520$ mm und die im nicht verengten Teil des Rohres herrschende Wassergeschwindigkeit $v = 0{,}75$ m/s charakterisiert ist. Zeichnen wir nun das betreffende Rohrstück und die entsprechende Dreieckstafel im gleichen Maßstab so nebeneinander, daß die mit $H = 0$ bezifferte Gerade in der Zeichnung des Rohres die bei der Berechnung der Konstanten C beliebig angenommene wagerechte Ausgangsebene darstellt, und sich in beiden Abbildungen natürlich »oben« und »unten« entspricht, so können wir dadurch, daß wir von einem beliebigen Punkte des Rohres wagerecht in die Rechentafel übergehen, daselbst alle in dem betr. Punkte möglichen Kombinationen von Druckhöhe und Geschwindigkeitshöhe ablesen. Ist die Druckhöhe an einer bestimmten Stelle etwa durch Manometerablesung bekannt, und tragen wir den dieser entsprechenden Punkt in der zukommenden Höhe in die Tafel ein, so können wir dieser die Geschwindigkeitshöhe entnehmen; ist aber, wie im vorliegenden Beispiel, die Geschwindigkeit und damit die Geschwindigkeitshöhe bekannt, so erhalten wir mit ihrer Hilfe denselben Tafelpunkt und können die entsprechende Druckhöhe ablesen. Bestimmen wir nun für hinreichend viele Punkte etwa der Rohrachse die entsprechenden Tafelpunkte und verbinden diese durch eine glatt verlaufende Linie, so gestattet diese nicht nur die Energieverteilung in jedem einzelnen Punkt der Rohrachse sofort der Tafel zu entnehmen, sondern sie gibt uns auch eine übersichtliche, zeichnerische Darstellung des Gesetzes,

nach dem sich die Umwandlung der Energie vollzieht, die ein sich längs der Achse bewegendes Massenteilchen besitzt. Ich habe daher diese Linie hydraulische »Energieumwandlungskurve« genannt.

4. Dreieckrechentafeln mit ungleichmäßigem Netz. In obigem Beispiele haben wir eine Dreieckrechentafel mit regelmäßigem Netz erhalten, die insbesondere bei der Bestimmung der Geschwindigkeiten den Nachteil hat, daß wir der Tafel unmittelbar nur die Geschwindigkeitshöhen entnehmen können, aus denen wir alsdann die Geschwindigkeiten selbst errechnen müssen. Diesen Uebelstand könnten wir dadurch vermeiden, daß wir die einzelnen Netzgeraden anstatt mit den Werten der ihnen zukommenden Geschwindigkeitshöhen, mit denen der entsprechenden Geschwindigkeiten selbst beziffern, so daß wir letztere unmittelbar der Tafel entnehmen könnten. Eine solche Anordnung hat aber wieder den Nachteil, daß gleichen Abständen der Netzgeraden verschieden große Sprünge in den beigeschriebenen Geschwindigkeitswerten entsprechen, so daß beispielsweise im Intervall zwischen $G = 40$ mm ($v = 88{,}6$ cm/s) und $G = 60$ mm ($v = 108{,}5$ cm/s) eine Geschwindigkeitszunahme von 19,9 cm/s stattfindet, während im nächsten Intervall zwischen $G = 60$ mm und $G = 80$ mm ($v = 125{,}3$ cm/s) die Geschwindigkeit nur um 16,8 cm/s zunimmt. Wir können diesen Nachteil, der sich besonders beim Einschalten (Interpolieren) bemerkbar macht, dadurch vermeiden, daß wir ein ungleichmäßiges Netz in der Weise entwerfen, daß wir die Netzgeraden für Geschwindigkeitshöhen zeichnen, die runden in gleichmäßigen Abständen aufeinander folgenden Geschwindigkeitswerten zukommen, sie aber anstatt mit den Werten der Geschwindigkeitshöhen mit denen der entsprechenden Geschwindigkeiten beziffern. Dies ist in Abb. 3c geschehen, in der somit die Netzgeraden auf der Dreieckseite eine sogen. unregelmäßige Funktionsskala (Skala der Funktion $\frac{v^2}{2g}$) entwerfen. Während wir daher der Abb. 3a nur entnehmen können, daß beispielsweise dem Achsenpunkt P mit der Höhe $H = 220$ mm eine Druckhöhe $D = 100$ mm und eine Geschwindigkeitshöhe $G = 200$ mm entspricht, aus welch letzterer

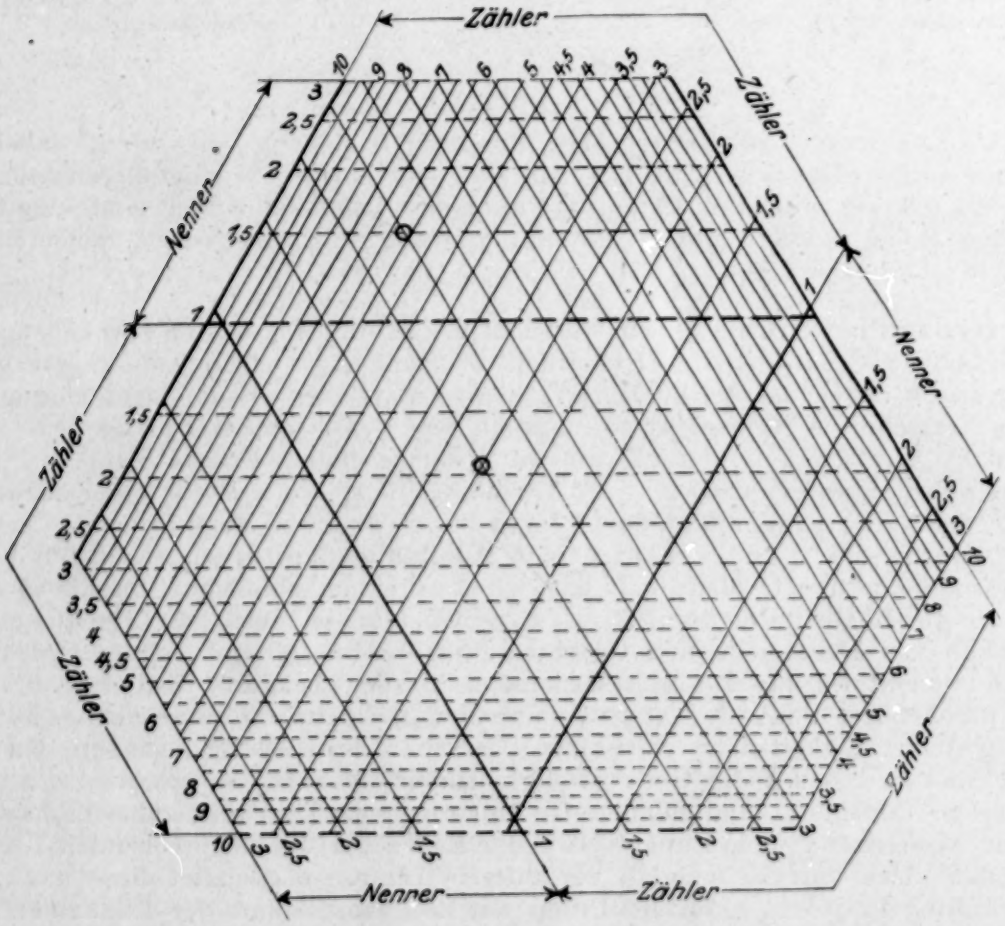


Abb. 4

die Geschwindigkeit erst errechnet werden muß, entnehmen wir der Tafel 3c außer denselben Werten für H und D unmittelbar die zugehörige Geschwindigkeit $v = 198$ cm/s. Um den Uebergang von der Abb. 3b zu den Rechentafeln, sowie das Entwerfen der letzteren zu erleichtern, zeichnet man zweckmäßigerweise alles auf Millimeterpapier.

Dreieckrechentafeln mit ungleichmäßigen Netzen gestatten die rasche Lösung von Gleichungen recht verwickelter Natur. Ich will in Abb. 4 nur noch das Schema einer verhältnismäßig einfachen von mir entworfenen Tafel vorführen, die gestattet, die Kombinationen dreier Zahlen zu finden, deren Produkt gleich einer vierten Zahl C ist. Zeichnen wir (s. Abb. 5a) ein gleichseitiges Dreieck, dessen Höhe gleich dem mit einer beliebigen Einheit gemessenen log C ist, und lesen wir als Abstände eines Punktes P von den Dreieckseiten an einem logarithmischen Maßstab gleicher Einheit die Werte u, v und w ab, so besagt die Tafel, daß

$$\log u + \log v + \log w = \log C$$

und damit, daß $u\,v\,w = C$ ist. (Logarithmische Maßstäbe mit Einheiten von 25 cm und 12,5 cm stellen die Teilungen der meist gebräuchlichen Rechenschieber dar.) Da die Höhe des Dreiecks in Abb. 5a gleich log 10 ist, entspricht dem Punkte P die Ablesung:

$$2{,}5 \cdot 3{,}2 \cdot 1{,}25 = 10.$$

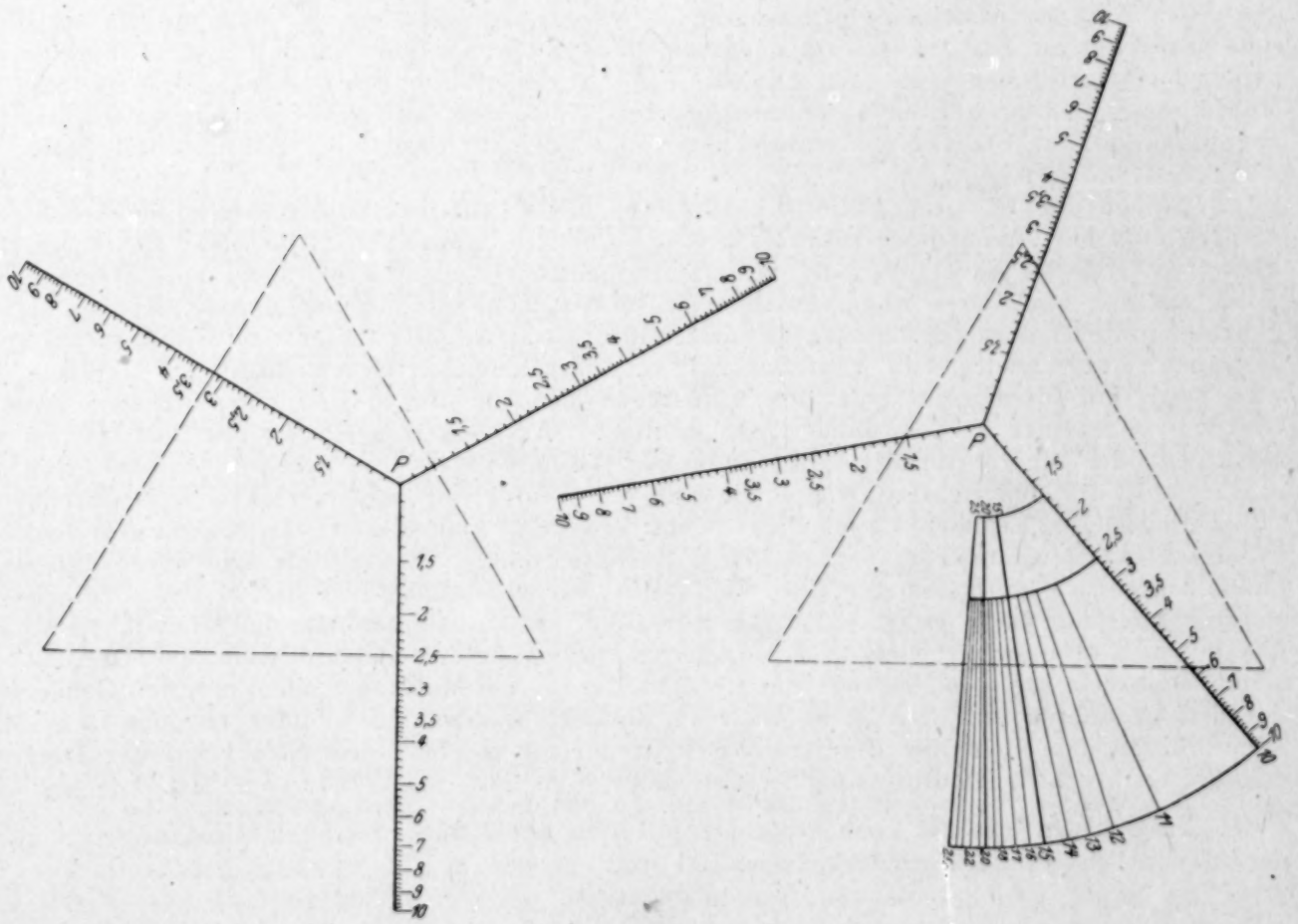


Abb. 5a und 5b

Um die Abstände nicht ausmessen zu müssen, kann man, wie in Abb. 4, wiederum die den Logarithmen von runden in gleichmäßigen Abständen aufeinander folgenden Werten entsprechenden Netzgeraden zeichnen und mit den ihnen zukommenden Numeris in ähnlicher Weise beziffern, wie dies bei den Teilungen des Rechenschiebers der Fall ist. Die Bezifferung dreier durch einen Punkt gehenden Netzgeraden gibt dann die drei Faktoren an, deren Produkt gleich dem Werte C ist, für den die Tafel gezeichnet wurde. So ist das in Abb. 4 dargestellte Schema für $C = 9{,}5$ entworfen, und der im Dreieckinnern gelegene Punkt besagt, daß: $2 \cdot 1{,}9 \cdot 2{,}5 = 9{,}5$. Da, wie in dem die geometrischen Grundlagen der Dreieckrechentafeln behandelnden ersten Abschnitt gezeigt, die Lote auch

das negative Vorzeichen haben dürfen, was bei obiger logarithmischer Darstellung besagt, daß die betreffende Zahl im Nenner eines Bruches vom Werte C steht, dessen Zähler gleich dem Produkt der beiden anderen Zahlen ist, so lesen wir an dem außerhalb des Ausgangsdreiecks gelegenen, durch einen Kreis hervorgehobenen Punkt der Abb. 4 ab, daß auch: $\frac{2{,}5 \cdot 5{,}7}{1{,}5} = 9{,}5$.

5. Dreieckrechentafeln mit beweglichem Netz. Um nun letztere Tafel nicht für jeden Wert C neu zeichnen zu müssen, behalten wir nur die in Abb. 4 mit durchlaufenden Strichen gezeichneten, zu zwei Seiten des Ausgangsdreiecks parallelen Netzgeraden bei und zeichnen die gestrichelten zur dritten Dreieckseite parallelen Netzgeraden auf durchsichtiges Papier. Wir brauchen alsdann nur die mit »1« bezifferte Gerade des Pauspapiers so auf die übrige Rechentafel zu legen, daß sie durch die Punkte der ausgezogenen beiden Seiten des Ausgangsdreiecks hindurchgeht, in denen diese von den mit dem jeweiligen »C« bezifferten Netzgeraden geschnitten werden.

6. Dreieckrechentafeln mit beweglicher Ableseskala. Anstatt das vollständige Dreiecksnetz zu entwerfen, kann es zuweilen vorteilhaft sein, nur das Ausgangsdreieck zu zeichnen und auf Pauspapier die drei von einem Punkt ausgehenden und je einen Winkel von 120^0 miteinander bildenden Funktionsmaßstäbe aufzutragen. Der Gebrauch dieser Vorrichtung ist aus Abb. 5a gleichfalls ersichtlich. Das Pauspapier wird so auf das — in Abb. 5a gestrichelt gezeichnete — Ausgangsdreieck gelegt, daß die Maßstäbe stets senkrecht zu den Dreieckseiten stehen, was sich bei Verwendung von Millimeterpapier leicht erreichen läßt. An den Stellen, an denen sich die Dreieckseiten und die Maßstäbe schneiden, werden zusammengehörige Werte der drei gesuchten Veränderlichen abgelesen, welche die der Rechentafel zugrunde liegende Gleichung erfüllen. (Beispiel: $2{,}5 \cdot 3{,}2 \cdot 1{,}25 = 10$.)

Stehen im letzteren Falle die Maßstäbe nicht auf den Dreieckseiten senkrecht, sondern sind sie gegen diese normale Stellung um α^0 gedreht (s. Abb. 5b), so ist die Höhe des Dreiecks gleich der mit $\cos\alpha$ multiplizierten Summe der durch die Dreieckseiten auf den Maßstäben abgeschnittenen Strecken, oder die Summe dieser Strecken ist gleich der durch $\cos\alpha$ dividierten Dreieckshöhe. Wir können daher unter Beibehaltung desselben Ausgangsdreiecks Gleichungen mit verschiedenen Konstanten »C« auflösen, wenn wir nur dem Blatt mit den Maßstäben die für das jeweilige »C« notwendige Drehung gegenüber der normalen Lage erteilen. Am besten zeichnet man für die notwendigen oder für runde aufeinander folgende Werte von »C« die Strahlen auf das Pauspapier auf, die bei richtiger Lage der Maßstäbe auf einer der Dreieckseiten senkrecht stehen müssen. Letztere Lage wird leicht erhalten, wenn man das Ausgangsdreieck wiederum auf Millimeterpapier entwirft. So entspricht z. B. die Abb. 5b, deren Höhe gleich log 10 ist, durchaus der Abb. 5a, wenn wir den Maßstäben die zu den Dreieckseiten senkrechte Lage geben. Drehen wir aber das Pauspapier mit den Maßstäben so, daß der mit 11 oder 12 oder 13 .... oder 25 bezeichnete Strahl auf einer der Dreieckseiten senkrecht steht, so beträgt das Produkt der an den Maßstäben abzulesenden Größen der drei gesuchten Faktoren nicht mehr 10, sondern je nachdem 11 oder 12 oder 13 .... oder 25. In dem Beispiele der Abb. 5b steht der mit 21 bezifferte Strahl auf der Dreieckseite senkrecht. Die Ablesung besagt daher, daß $5{,}67 \cdot 1{,}53 \cdot 2{,}42 = 21$ ist.

7. Schluß. Es sei noch erwähnt, daß sich unter anderem auch Gleichungen von der in der Praxis öfters wiederkehrenden Form:

$$[f(X)]^p\,[g(Y)]^q\,[h(Z)]^r = C,$$

in der $f(X)$, $g(Y)$ und $h(Z)$ beliebige, in den betrachteten Intervallen stetige Funktionen der drei Veränderlichen X, Y, Z und p, q, r beliebige ganze oder gebrochene, positive oder negative Hochzahlen sind, nach erfolgtem Logarithmieren leicht durch Dreieckrechentafeln darstellen lassen, doch müssen sich alsdann, wie sich leicht einsehen läßt, die den verschiedenen logarithmischen Teilungen zugrunde liegenden Längeneinheiten zueinander und zu der Einheit, mit der die Dreieckshöhe aufgetragen ist, verhalten wie $p : q : r : 1$.

Die hier wiedergegebenen Rechentafeln sollen nur schematische Beispiele darstellen. Für die Praxis bestimmte Rechentafeln entwerfe man nicht zu klein und erhöhe ihre Uebersichtlichkeit durch Verwendung verschieden starker Striche und durch Benutzung von Tuschen verschiedener Farbe.

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Theorie der Plattenbiegung und ihre experimentelle Bestätigung.[1]

Von **A. NÁDAI** in Göttingen.

Die ebene elastische Platte und die dünne, nach einer Umdrehungsfläche gekrümmte elastische Schale sind Konstruktionselemente, die dem Ingenieur in einer Fülle der verschiedenartigsten Fälle hinsichtlich ihrer Randbefestigung und ihrer Belastung in den Anwendungen entgegentreten. Ueber ihre Formänderungen und über die in ihrem Innern wirkenden Spannungen scheint man in der Praxis nur in einer geringen Zahl von Fällen näher unterrichtet zu sein. Man beherrscht ihre Spannungszustände selbst in der Auswahl der der Rechnung gut zugänglichen Fälle nicht in dem Maß, wie die anderer Elemente des Maschinenbaues und der Statik der Baukonstruktionen.

Die vor einem Menschenalter in Angriff genommenen und seither in zahlreichen Veröffentlichungen bekannt gewordenen Arbeiten von C. v. Bach haben diese Lücke durch Näherungsmethoden zu überbrücken versucht und die Verhältnisse auf Grund einer großen Reihe verdienstvoller Versuche geklärt[2]).

Zu einer genaueren Untersuchung der Formänderungen und der Festigkeit der nach Rotationsflächen gekrümmten, auf Biegung beanspruchten Schalen hat die Entwicklung des Großdampfturbinenbaus besonders angeregt. Der Wunsch, die Maschinenleistung der Dampfturbine zu steigern, hat es mit sich gebracht, daß man im Hinblick auf die Betriebsfähigkeit der in den letzten Jahren zu gewaltigen Einheiten angewachsenen Turbinen gezwungen ist, ihrer konstruktiven Durchbildung die weitestgehende Sorgfalt zuzuwenden. So ist beispielsweise die genaue Innehaltung des engen Spielraumes zwischen den Teilen der Leitvorrichtungen oder den Zwischenwänden, welche die einzelnen Druckstufen voneinander trennen und den rasch umlaufenden Radscheiben für die Betriebssicherheit erforderlich. Diese kann gefährdet werden durch die Biegungsschwingungen der rotierenden Scheiben oder die nicht richtig abgeschätzten Verbiegungen der einem seitlichen Druck ausgesetzten Zwischenwände, welche die Ursache zum Streifen der Scheiben an den feststehenden Teilen bilden können. Wir möchten in diesem Zusammenhange an die Schilderung der auf derartige und ähnliche Mängel zurückgeführten, gänzlichen Zerstörung zweier Einheiten von 35000 und einer schweren Beschädigung einer Turbine von 25000 kW in A. Stodolas eben in fünfter Auflage erschienenen »Dampf- und Gasturbinen«[3]) erinnern. Die Förderung der Elastizitätsprobleme der gewölbten Schalen ist im wesentlichen den grundlegenden Arbeiten von A. E. H. Love, E. Meißner, H. Reißner und A. Stodola zu verdanken.

Die Fragen des Eisenbetonbaues mögen andererseits dazu beigetragen haben, daß sich die Ingenieure neuerdings um die praktische Ausgestaltung der Theorie der Biegung ebener Platten bemühen. Die Verhältnisse in den Anwendungen liegen zwar sowohl bei den gewölbten, als auch bei den ebenen Platten zum Teil verwickelter, als man sie in den Ansätzen, die zurzeit ihren Festigkeitsberechnungen zugrunde gelegt werden können, zu berücksichtigen pflegt. Dies dürfte aber weniger an einer Unvollkommenheit der analytischen Hilfsmittel oder der allgemeinen Grundlagen liegen, auf die sich ihre Theorien stützen, als einem Mangel an zuverlässigen Experimenten zuzuschreiben sein, von denen — wenn sie auf die Voraussetzungen der Theorie hinreichend Rücksicht nehmen — die Ergänzung der vorhandenen Lücken in den experimentellen Grundlagen erhofft werden kann.

---

[1]) Erweiterte Wiedergabe des Vortrages auf der Naturforscherversammlung in Leipzig am 21. September 1922.

[2]) Man findet eine Zusammenstellung der unter Leitung von C. von Bach in der Materialprüfungsanstalt, Stuttgart, vorgenommenen Versuche in dem Anhang zu seinen beiden Vorträgen »Das Ingenieurlaboratorium und die Materialprüfungsanstalt der T. Hochsch. Stuttgart«, Konrad Wittwer, Stuttgart 1915.

[3]) A. Stodola, Die Dampf- und Gasturbinen, Berlin 1922, S. 790.

Aber auch die Theorie der Biegung elastisch-isotroper Platten scheint, obwohl ihre mathematischen Grundlagen seit einem Jahrhundert entwickelt und ihre physikalischen durch die zahlreichen Experimente bestätigt sind, welche die Biegungslehre der elastisch-isotropen Stäbe stützen (die mathematische Theorie hätte im vorigen Jahre auf ihr hundertjähriges Bestehen zurückblicken können, wenn ihre Entstehung vom Veröffentlichungsjahr der ersten der Differentialgleichung $\Delta\Delta w = f(x, y)$ gewidmeten Arbeit gezählt wird), von den Ingenieuren noch nicht als das Hilfsmittel anerkannt zu sein, das in erster Linie berufen sein müßte, ihnen in allen Festigkeitsaufgaben über ebene biegungsfeste Wandungen zur Hand zu sein. Ich muß es mir versagen, hier rückblickend näher auf die verschiedenen Gründe einzugehen, die nach meiner Meinung zu dieser Entwicklung den Anlaß gegeben haben. Der Umstand aber, daß es ein universelles Rechnungsverfahren bisher nicht gibt, mit dessen Hilfe die hierher gehörigen Randwertprobleme sich mit einem geringen Maß von Rechenarbeit numerisch lösen ließen, sollte von seiten der Praktiker, wie dies häufiger geschehen ist, nicht als Grund dafür angeführt werden, daß sich der Ingenieur mit unzulänglicher begründeten Hilfsmitteln begnügen muß. Ich glaube, daß ein Fortschritt bereits dadurch zustande kommt, daß man in den Anwendungen von den verschiedenen Verfahren, die sich im Laufe der Zeit entwickelt haben, nicht das gleiche und nicht zu viel verlangt, sondern sich der Grenzen zwischen den verschiedenen Arten der Randwertprobleme stärker bewußt wird. Von diesem Standpunkt aus gesehen und mit Rücksicht auf den Fragenkreis, dessen Beantwortung die Festigkeitsprobleme des Ingenieurs verlangen, lassen sich vielleicht drei Gruppen von Plattenproblemen unterscheiden.

Zu den ersten rechne ich die analytisch gelösten Randwertaufgaben der elastischen Platte, die wir den Klassikern der Elastizitätstheorie bis vielleicht einschließlich St. Venant, M. Lévy, Love und Michell zu verdanken haben, ferner die mit analytischen Mitteln noch lösbar erscheinenden. Ich glaube, daß die Möglichkeit der Erschließung neuer Lösungen mit analytischen Mitteln und neuer, für die Anwendungen brauchbarerer Formen für die alten noch nicht erschöpft ist. Ich habe hier die durch einfache Kurven begrenzten Platten mit einfachen Grenzbedingungen im Sinne, ferner die Formänderungs- und Spannungszustände rechteckiger oder unbegrenzter Platten mit den Symmetrieeigenschaften der doppelt-periodischen Funktionen, die Lösungen, die durch Ueberlagerung der aus Singularitäten entspringenden Teillösungen aufgebaut werden können. So selbstverständlich dies für den Ingenieur ist, es scheint in vielen ausgezeichneten neueren Arbeiten nicht beachtet worden zu sein, daß mit der Angabe der Form der elastischen Fläche nur ein Teil der praktischen Aufgabe erledigt ist, für die Anwendungen haben mit Ausnahme der sogleich zu erwähnenden Aufgaben ihre zweiten und dritten Differentialquotienten das größere Interesse, und Lösungen, mit deren Hilfe sich die Spannungen nicht berechnen lassen, verlieren an Wert.

Die zweite Gruppe bilden die Eigenwertprobleme elastischer Platten, die Aufgaben der Bestimmung der kritischen Drucke oder Lasten, unter denen ihr Gleichgewicht labil wird, oder die der Frequenzen schwingender Platten. Mit Ausnahme einiger weniger Beispiele liegen die Probleme meist so, daß man bisher nicht in der Lage war, ihre Lösungen aus den Differentialgleichungen ableiten zu können. Bei gewissen Knickungsaufgaben, nämlich den der genau in ihrer Ebene gedrückten Platten, ist übrigens die Form der unendlich wenig ausgebogenen Platte insofern Nebensache, als sie sich in derselben nicht mehr im stabilen Gleichgewichte befindet; nach den Spannungen wird also hier nicht gefragt werden können, alles was zu ermitteln bleibt, ist nur der kleinste kritische Druck. Hier liegt das Anwendungsgebiet des Ansatzes von G. H. Bryan und der Verfahren von W. Ritz, Lord Rayleigh und S. Timoschenko. Nach Beschränkung der Funktionsformen auf eine willkürlich ausgewählte Klasse, die man nach Möglichkeit den Grenzbedingungen anzupassen versucht, wird statt eines dem Biegungsproblem der Platte zugeordneten Variationsproblems mittels der Ansatzfunktionen ein gewöhnliches Maximum-Minimumproblem gelöst.

Zur dritten Gruppe von Plattenaufgaben wären schließlich alle die zu zählen, deren Lösungen weder auf dem analytischen Wege, durch Entwicklung nach Orthogonalfunktionen oder Singularitätenreihen, noch aus einem Variationsprinzip mit Hilfe der genannten Verfahren ohne größeren Aufwand an Rechenarbeit zu beschaffen sind. Erwähnt seien die Aufgaben über die Biegung von Platten mit Rändern, auf denen gemischte Grenzbedingungen, statischer und kinematischer Art vorgeschrieben sind, schwierigere, polygonale Konturen, schließlich die für den Dampfturbinen- und den Eisen-

betonbau gleich wichtigen Fälle der Biegung von Platten veränderlicher Stärke. Sie dürften wohl das Hauptanwendungsgebiet für die Rechnung mit kleinen Differenzen bilden, deren erfolgreiche Anwendbarkeit auf die Probleme der Plattenstatik und der Schalen der vorzeitig verstorbene Schweizer Ingenieur Huldreich Keller, ferner H. Hencky, H. Marcus, Nielsen und H. M. Westergaard gezeigt haben.

1. Freiaufliegender Plattenstreifen. Indem ich zu einigen Sonderproblemen der Plattenstatik übergehe, möchte ich auf einige Beispiele der Anwendung verschiedener Hilfsmittel kurz hinweisen. Einer der einfachsten Grenzfälle der Biegungszustände einer rechteckigen Platte ist der eines freiaufliegenden Plattenstreifens. Die Randbedingungen: w (die Durchbiegung) $= 0$, $\Delta w = 0$ auf den Seiten $x = 0$ und $x = a$ werden durch die entlang der x-Achse bis zu den dritten Ableitungen stetig aneinander stoßenden elastischen Flächen

$$w_n = a_n\left(1+\frac{n\pi y}{a}\right)e^{-\frac{n\pi y}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\quad y\geq 0,\qquad w_n = a_n\left(1-\frac{n\pi y}{a}\right)e^{\frac{n\pi y}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\quad y\leq 0, n=1,2,3\ldots \quad (1)$$

erfüllt. Eine solche, der Differentialgleichung $\Delta\Delta w = 0$ genügende Lösung stellt offenbar einen Plattenstreifen dar, der auf der x-Achse eine nach einer Sinuslinie verteilte Last trägt. Durch Ueberlagerung solcher Lösungen mit $n = 1, 2, 3 \ldots$ ergibt sich also die Plattenfläche für eine willkürliche Verteilung der Belastung, und in der Grenze auch für eine Einzelkraft P, die in einem Punkte $x = \xi$, $y = 0$ wirkt:

$$w = \frac{Pa^2}{2\pi^3 N}\sum_n \frac{e^{-\frac{n\pi y}{a}}}{n^3}\left(1+\frac{n\pi y}{a}\right)\sin\frac{n\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\quad (n=1,2,3,\ldots,\ y\geq 0)\quad .\quad .\quad (2)$$

(N bedeutet den Plattenmodul $= Eh^3/12(1-\nu^2)$, E die Elastizitätsziffer, ν die Poissonsche Zahl, h die Dicke der Platte). Berechnet man von w die zweiten Ableitungen, so findet man sie in der Form

$$2N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varphi - y\frac{\partial\varphi}{\partial y},\qquad 2N\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \varphi + y\frac{\partial\varphi}{\partial y},\qquad 2N\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\quad .\quad .\quad (3),$$

sofern mit φ die Funktion

$$\varphi = N\Delta w = -\frac{P}{2\pi}\sum\frac{e^{-\frac{n\pi y}{a}}}{n}\sin\frac{n\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (4)$$

bezeichnet wird. Nachdem die Biegungsmomente von diesen 3 Ableitungen linear abhängen, ist der Spannungszustand durch die Potentialfunktion φ und ihr Gefälle gegeben. Es kommt uns nur noch darauf an, die Funktion φ anzugeben. Das ist offenbar eine elementare Aufgabe aus der Lehre der ebenen Potentialströmungen, oder der winkeltreuen Abbildungen. Wir haben das Geschwindigkeitspotential φ und seine Ableitungen oder die Geschwindigkeitskomponenten u und v einer Strömung anzugeben, die aus einer Reihe von in regelmäßigen Abständen nach Art der Abb. 1 auf einer Geraden angeordneten Quellen entspringt und in den symmetrisch gelegenen Punkten versickert. Es gehören zusammen komplexe Strömungsfunktion $Z(z) = Z(x+iy)$ und das Potential φ:

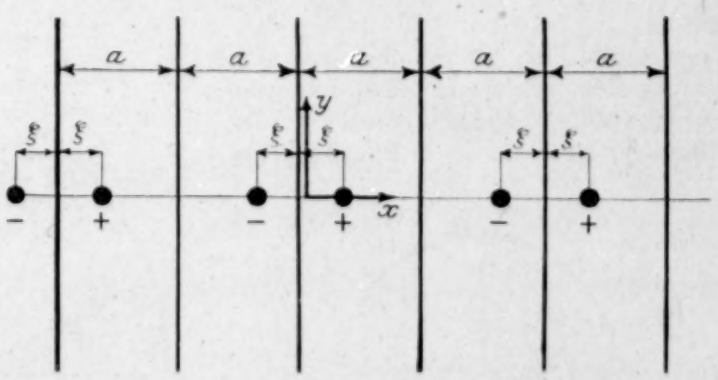


Abb. 1

$$Z = \varphi + i\psi = \frac{P}{2\pi}\ln\frac{\sin\frac{\pi(z-\xi)}{2a}}{\sin\frac{\pi(z+\xi)}{2a}}\quad .\quad (5),\qquad \varphi = \frac{P}{4\pi}\ln\frac{\mathfrak{Cof}\frac{\pi y}{a}-\cos\frac{\pi(x-\xi)}{a}}{\mathfrak{Cof}\frac{\pi y}{a}-\cos\frac{\pi(x+\xi)}{a}}\quad (6),$$

und ihr Hodograph oder Geschwindigkeitsbild liefert die Gefällskomponenten

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x} = u - iv\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (7)$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{P}{4a}\left[\frac{\sin\frac{\pi(x+\xi)}{a}}{\cos\frac{\pi(x+\xi)}{a} - \mathfrak{Cof}\frac{\pi y}{a}} - \frac{\sin\frac{\pi(x-\xi)}{a}}{\cos\frac{\pi(x-\xi)}{a} - \mathfrak{Cof}\frac{\pi y}{a}}\right]$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{P\,\mathfrak{Sin}\frac{\pi y}{a}}{4a}\left[\frac{1}{\cos\frac{\pi(x+\xi)}{a} - \mathfrak{Cof}\frac{\pi y}{a}} - \frac{1}{\cos\frac{\pi(x-\xi)}{a} - \mathfrak{Cof}\frac{\pi y}{a}}\right] \quad \ldots\ldots (8).$$

Will man nicht die expliziten Ausdrücke für φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ zur Berechnung der Spannungsmomente des Plattenstreifens

$$\text{Biegungsmomente} \quad m_x = -\frac{1+\nu}{2}\varphi + \frac{(1-\nu)y}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$m_y = -\frac{1+\nu}{2}\varphi - \frac{(1-\nu)y}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\text{Drillungsmoment} \quad m_{xy} = -\frac{(1-\nu)y}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \ldots\ldots (9)$$

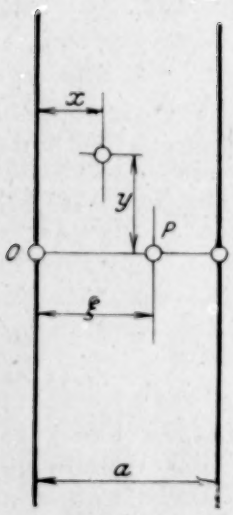


Abb. 2

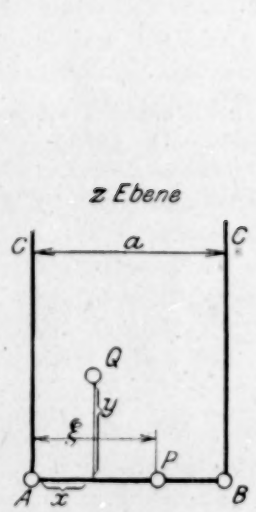


Abb. 3

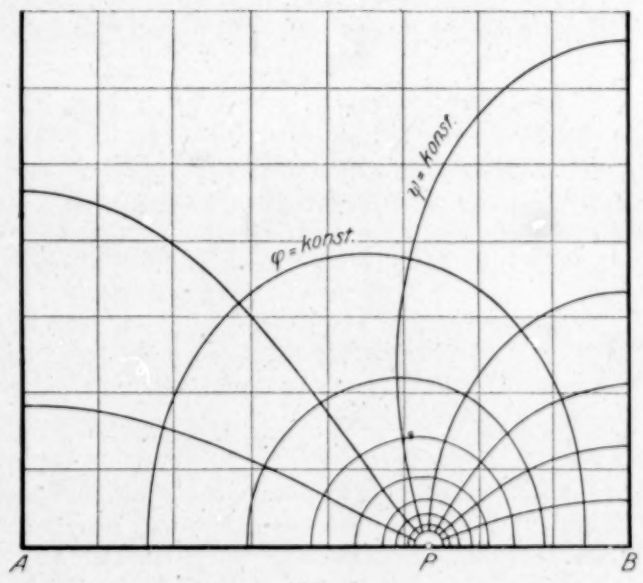


Abb. 3a

verwenden, so kann man sie sich aus zwei winkeltreuen Abbildungen verschaffen. Die Ordinaten der Fläche φ und der zu φ konjugierten

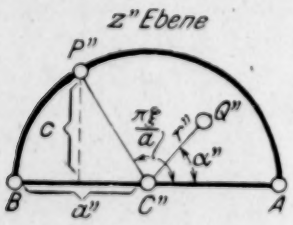


Abb. 4

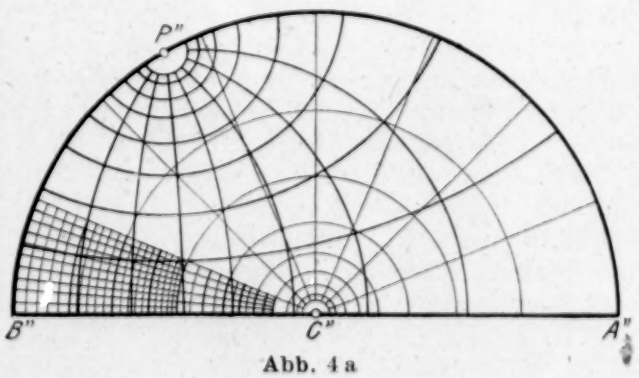


Abb. 4a

Potentialfunktion ψ in einem Punkte x, y des Parallelstreifens Abb. 2 können aus der winkeltreuen Abbildung des Halbstreifens $x > 0$ (Abb. 3 und 3a) auf einen Halbkreis (Abb. 4 und 4a) vom Halbmesser a'' entnommen werden. Den Kurven $\varphi =$ konst. und $\psi =$ konst. entsprechen in letzteren die orthogonalen Kreise

$$(x'' - c\,\operatorname{cotg}\nu)^2 + y''^2 = \frac{c^2}{\sin^2\nu}, \qquad x''^2 + (y'' - c\,\mathfrak{Cotg}\mu)^2 = \frac{c^2}{\mathfrak{Sin}^2\mu} \quad \ldots\ldots (10),$$

wenn man

$$\mu = -\frac{2\pi\varphi}{P} = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots \infty, \qquad \nu = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi\psi}{P} = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots 2\pi, \quad c = a'' \sin\frac{\pi\xi}{a} \qquad (11)$$

setzt. Der Wert von φ (und von ψ) im Punkte x, y (Abb. 3) wird in seinem Bildpunkt r'', α'' innerhalb des Halbkreises (Abb. 4a) gemäß

$$\frac{\pi x}{a} = \alpha'', \quad \frac{\pi y}{a} = \ln\frac{r''}{a''} \qquad (12)$$

entnommen.

Die Abbildung für den Geschwindigkeitsvektor mit den Komponenten u, v ist in großen Zügen leicht angebbar. Es genügt wieder die Hälfte $y > 0$ des Parallelstreifens zu betrachten. In ihr ist die Vertikalkomponente der Geschwindigkeit v überall positiv. Auf den drei Geraden des oberen Halbstreifens CA, AB, BC hat sie den Wert Null. Weiter ist u auf CA und AP negativ, auf dem übrigen Teil der Berandung CB und PB positiv. Der zweimal um einen rechten Winkel gebrochene Linienzug der drei Geraden CA, AB, BC bildet sich also auf die

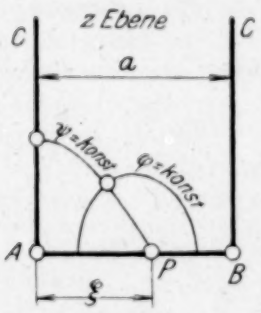


Abb. 5

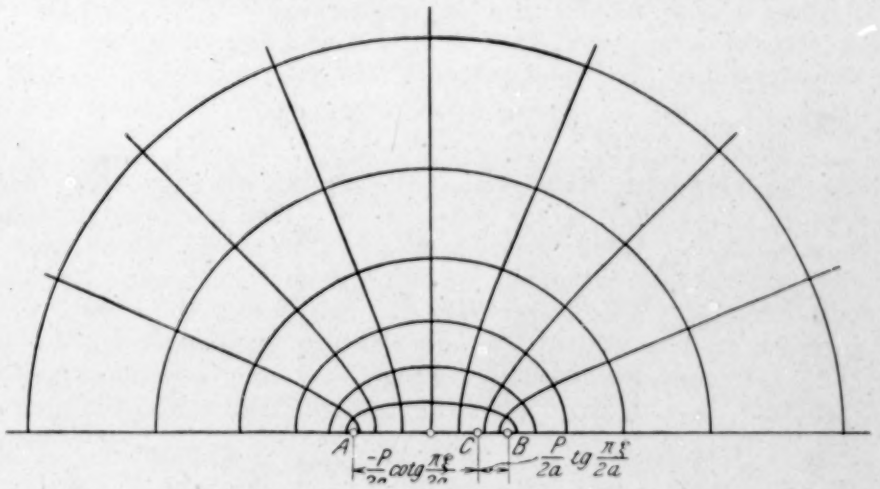


Abb. 6

u-Achse und der von ihnen begrenzte Halbstreifen auf die obere u, v-Halbebene ab. Dem Quellpunkt entspricht dabei der unendlich ferne Punkt und dem unendlich fernen Punkt in der x, y-Ebene der Anfangspunkt C (Abb. 6) in der u, v-Ebene. Die Elimination der Veränderlichen z aus den Gl. (5) und (7) führt zu dem einfachen Ergebnis, daß den Niveau- und den Stromkurven des Parallelstreifens Abb. 3a das System konfokaler Ellipsen und Hyperbeln (Abb. 6)

$$\frac{(u+u_0)^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} = 1, \qquad \frac{(u+u_0)^2}{A'^2} - \frac{v^2}{B'^2} = 1 \qquad (13)$$

mit den Halbachsen

$$A = C\,\mathfrak{Cof}\,\mu, \; B = C\,\mathfrak{Sin}\,\mu, \; A' = C\sin\nu, \; B' = C\cos\nu \qquad (14)$$

entspricht, wo zur Abkürzung

$$u_0 = -C\cos\frac{\pi\xi}{a}, \qquad C = \frac{P}{2a\sin\frac{\pi\xi}{a}} \qquad (15)$$

stehen. Auf der Symmetrieachse $y = 0$, welche den Angriffspunkt $x = \xi$ der Last P enthält, sind die Spannungsmomente gleich

$$m_x = m_y = -\frac{(1+\nu)\varphi}{2} = \frac{(1+\nu)P}{8\pi}\ln\frac{1-\cos\frac{\pi(x+\xi)}{a}}{1-\cos\frac{\pi(x-\xi)}{a}}, \quad m_{xy} = 0 \qquad (16).$$

In der Nähe der Angriffsstelle der Last ist der Verlauf der Spannungsmomente in einem freiaufliegenden Plattenstreifen bis auf eine gleichmäßige Biegungsbeanspruchung $m_x = 0$, $m_y = -\frac{(1-\nu)P}{4\pi}$, $m_{xy} = 0$ derselbe, wie in einer freiaufliegenden kreisförmigen Platte, die man aus dem Streifen mit einem Halbmesser $\frac{2a}{\pi}\sin\frac{\pi\xi}{a}$ herausschneidet.

Mit Hilfe der Lösung für den Parallelstreifen dürften sich die Spannungen in einem beliebigen Punkt einer rechteckigen Platte, die von einer über sie wandernden Last herrühren, unter der Voraussetzung verfolgen lassen, daß auf den Seiten des Rechtecks die Grenzbedingungen $w = 0$, $\Delta w = 0$ erfüllt sind. Das rechteckige Belastungsgitter dieses Spannungszustandes stellt man sich nämlich durch die Ueberlagerung neuer Reihenlasten im Parallelstreifen dar. Es zeigt sich bei näherem Zusehen, daß man mit wenigen Reihen auskommt, sofern man sie senkrecht zu der kürzeren Seite im Rechteck annimmt.

2. Kreisplatte in Einzelpunkten gelagert. Als Gegenstück der auf ihrem Rande in stetiger Weise unterstützten Platte sei ein Biegungsfall einer in diskreten Punkten gelagerten Platte betrachtet. Ein typisches Beispiel, das eine allgemeine Analyse des Spannungszustandes zuläßt, bietet die unter einer Seitenlast ausgebogene und in einzelnen Randpunkten unterstützte kreisförmige Platte. Der Einfachheit halber sei angenommen, daß sie entweder durch einen gleichförmig verteilten Druck oder durch eine Einzellast in ihrer Mitte belastet sei. Die Stützpunkte am Umfang des Kreises $r = a$ mögen die Zentriwinkel $\varphi = \gamma_1, \ldots \gamma_k$ haben, die in ihnen übertragenen Stützreaktionen seien $P_1, \ldots P_k$. Die Bedingung der freien Aufstützung verlangt das Verschwinden der Randmomente (Biegungsmomente) m_r und der Randscherkräfte q_r

$$m_r = -N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right) = 0\,, \qquad q_r = -N\frac{\partial \Delta w}{\partial r} + \frac{\partial m_{rt}}{r\,\partial \varphi} = 0 \text{ für } r = a \qquad (17)$$

mit der Maßgabe, daß letztere Bedingung mit Ausnahme der Umgebung der Stützpunkte $r = a$, $\varphi = \gamma_1, \ldots \gamma_k$ zu gelten habe. Das über den Randkreis genommene Integral der Scherkräfte q_r muß nämlich in der Umgebung eines jeden Stützpunktes um den Betrag der in ihm übertragenen Stützreaktion zunehmen. Im Ausdruck (17) der in einem Zylinderschnitt übertragenen Scherkraft bedeutet m_{rt} das in demselben wirkende Torsionsmoment, dessen in der Umfangsrichtung genommene Ableitung die Ersatzscherkraft.

Die zweite Randbedingung wird für eine konzentrierte Stützkraft P_i, welche im Punkte $r = a$, $\varphi = \gamma_i$ übertragen wird, durch die divergente Reihe von Fejér[1])

$$q_r = -\frac{P_i}{\pi a}\left(\tfrac{1}{2} + \sum_1 \cos n\varphi_i\right) \quad \varphi_i = \varphi - \gamma_i \,. \qquad (18)$$

ausgedrückt. Bezeichnen wir mit P ohne Zeiger die Gesamtlast, welche die Platte aufzunehmen hat und setzen wir die Stützreaktionen gleich

$$P_i = \lambda_i P \qquad (19),$$

so verlangt das Gleichgewicht der Kräfte auf dem Kreis $r = a$

$$\Sigma\lambda_i \cos\gamma_i = 0, \quad \Sigma\lambda_i \sin\gamma_i = 0, \quad \Sigma\lambda_i = 1 \qquad (20).$$

Der Ausdruck für k konzentrierte Randkräfte $P_1, \ldots P_k$, die in den Punkten $r = a$, $\varphi = \gamma_1 \ldots \gamma_k$ angreifen, ist

$$q_r = -\frac{P}{\pi a}\left[\tfrac{1}{2}\sum_1^k \lambda_i + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \cos n\varphi_i\right] \qquad (21)$$

und der von k konzentrierten Kräften, die im Gleichgewicht mit der gleichmäßig über den Umfang des Randkreises $r = a$ verteilten Ringbelastung $P = \Sigma P_i$ stehen

$$q_r = -\frac{P}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \cos n\varphi_i \qquad (22).$$

Die elastische Fläche w'' kann aus zwei Anteilen w' und w,

$$w'' = w' + w \qquad (23),$$

zusammengesetzt werden. w' soll die verbogene Fläche der auf ihrem Umfang gleichmäßig aufliegenden Kreisplatte bedeuten, also eine der Flächen

$$\left.\begin{aligned} w' &= \frac{P}{64\pi N}\left[\frac{(5+\nu)a^2 - 2(3+\nu)r^2}{1+\nu} + \frac{r^4}{a^4}\right] \text{ (gleichförmiger Druck)} \\ w' &= \frac{N}{8\pi N}\left[\frac{3+\nu}{2(1+\nu)}(a^2 - r^2) - r^2 \ln\frac{a}{r}\right] \text{ (Einzelkraft in der Mitte)} \end{aligned}\right\} \qquad (24).$$

Dann rührt der zweite Anteil w von einem System von transversalen Kräften her, das lediglich auf dem Umfang des Kreises $r = a$ verteilt ist. Es ist identisch mit dem Gleichgewichtssystem (22). Die Grenzbedingungen für w lauten somit

$$r = a\;\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{\partial w}{r\,\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) = 0 \quad q_r = -N\frac{\partial \Delta w}{\partial r} + \frac{\partial m_{rt}}{r\,\partial\varphi} = -\frac{P_i}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \cos n\varphi_i \qquad (25).$$

[1]) s. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, S. 455 und 457.

Das ist eine Randwertaufgabe der Differentialgleichung $\Delta\Delta w = 0$, der bekanntlich durch eine Fouriersche Reihe

$$w = a_0 + b_0\varrho^2 + a_1\varrho\cos\varphi + c_1\varrho\sin\varphi + b_1\varrho^3\cos\varphi + d_1\varrho^3\sin\varphi + \sum_2(a_n\varrho^n + b_n\varrho^{n+2})\cos n\varphi + \sum_2(c_n\varrho^n + d_n\varrho^{n+2})\sin n\varphi \quad . \quad (26)$$

genügt werden kann. Es empfiehlt sich, sie in ebensoviel Teillösungen zu zerlegen, als Stützpunkte vorhanden sind. Die Durchführung dieses von Hrn. Prof. L. Prandtl stammenden Vorschlages führt zur elastischen Fläche

$$w_i^* = -\lambda_i\sum_2(\alpha_n\varrho^n + \beta\varrho^{n+2})\cos n\varphi_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27),$$

einer nach Abb. 7 durch eine konzentrierte Randkraft belasteten kreisförmigen Platte. Die Kraft P_i hält mit einem gleichförmigen vermehrt um ein nach einer Cosinuslinie verteiltes System von Randscherkräften das Gleichgewicht. In Gl. (27) ist $\varrho = \frac{r}{a}$, φ_i bedeutet den Winkel $\varphi - \gamma_i$, der vom Angriffspunkt von P_i zu rechnen ist, α_n und β_n sind

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{2(1+\nu)}{1-\nu}\frac{1}{n}\right)\frac{Q}{(n-1)n}, \quad \beta_n = -\frac{Q}{(n+1)n}, \quad Q = \frac{Pa^2}{2\pi(3+\nu)N} \quad . \quad (28).$$

Diese elastische Fläche besitzt die Spannungsmomente

$$\left.\begin{array}{l}\text{Biegungs-}\\ \text{momente}\end{array}\right\}\begin{array}{l} m_r = \frac{P_i}{2\pi(3+\nu)}\left[(1-\nu)(1-\varrho^2)\sum\varrho^{n-2}\cos n\varphi + 2(1+\nu)(1-\varrho^2)\sum\frac{\varrho^{n-2}}{n}\cos n\varphi\right]\\ m_t = \frac{-P_i}{2\pi(3+\nu)}\left[(1-\nu)(1-\varrho^2)\sum\varrho^{n-2}\cos n\varphi + 2(1+\nu)(1+\varrho^2)\sum\frac{\varrho^{n-2}}{n}\cos n\varphi\right]\end{array}\Bigg\} \quad (29).$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Drillungs-}\\ \text{moment}\end{array}\right\} m_{rt} = \frac{-P_i}{2\pi(3+\nu)}\left[(1-\nu)(1-\varrho^2)\sum\varrho^{n-2}\sin n\varphi + 2(1+\nu)\sum\frac{\varrho^{n-2}}{n}\sin n\varphi\right]$$

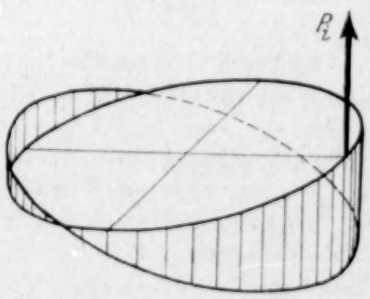


Abb. 7

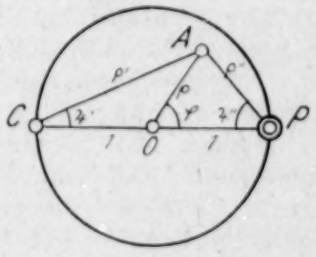


Abb. 8

Wir konnten hier den überflüssig gewordenen Zeiger i bei φ_i fortlassen. Die in den Ausdrücken vorkommenden Summen sind für $0 < \varphi < 2\pi$ der reelle, bezw. der imaginäre Teil der nachfolgenden Reihen

$$\sum_2\varrho^{n-2}e^{ni\varphi} = \frac{1}{\varrho^2}\sum_2\zeta^n = \frac{\zeta^2}{\varrho^2(1-\zeta^2)} = \frac{e_i(2\varphi-\psi'')}{\varrho''}$$

$$\sum_2\frac{\varrho^{n-2}}{n}e^{ni\varphi} = \frac{1}{\varrho^2}\sum_2\frac{\zeta^n}{n} = -\frac{1}{\varrho^2}[\zeta + \ln(1-\zeta)] = -\frac{e^{i\varphi}}{\varrho} - \frac{\ln\varrho'' - i\psi''}{\varrho^2} \quad (30)$$

der komplexen Veränderlichen

$$\zeta = \varrho e^{i\varphi},\ \zeta' = \varrho' e^{i\varphi'} = 1+\zeta,\ \zeta'' = \varrho'' e^{i\varphi''} = 1-\zeta\ (i = \sqrt{-1}),\ \psi' = \varphi',\ \psi'' = 2\pi - \varphi'' \quad (31).$$

Die Bedeutung der Strecken $\varrho\,\varrho'\,\varrho''$ und der Winkel $\varphi\,\varphi'\,\varphi''\,\psi'\,\psi''$ ist aus der Abb. 8 zu ersehen. P ist die Stelle der konzentrierten Stützkraft. Außer P wirken auf dem Kreis $\varrho = 1$ eine gleichförmig verteilte Ringlast $= P$ und die nach der Cosinuslinie verteilten Randscherkräfte. Die Spannungsmomente sind auf der Geraden $\varphi = 0$ (OP), bezw. $\varphi = \pi$ (OC) (das obere Zeichen gilt für $\varphi = 0$, das untere für $\varphi = \pi$)

$$\left.\begin{array}{l} m_r = \frac{P_i}{2\pi(3+\nu)}\left[(1-\nu)(1\pm\varrho) - 2(1+\nu)\frac{1-\varrho^2}{\varrho^2}(\varrho \pm \ln(1\mp\varrho))\right]\\ m_t = \frac{P_i}{2\pi(3+\nu)}\left[-(1-\nu)(1\pm\varrho) + 2(1+\nu)\frac{1+\varrho^2}{\varrho^2}(\varrho \pm \ln(1\mp\varrho))\right],\ m_{rt} = 0\end{array}\right\} \quad (32),$$

auf der Geraden $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$m_r = \frac{P_i}{2\pi(3+\nu)}\left[-(1-\nu)\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2} - (1+\nu)\frac{1-\varrho^2}{\varrho^2}\ln(1+\varrho^2)\right]$$
$$m_t = \frac{P_i}{2\pi(3+\nu)}\left[(1-\nu)\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2} + (1+\nu)\frac{1-\varrho^2}{\varrho^2}\ln(1+\varrho^2)\right] \quad \ldots \quad (33),$$
$$m_{rt} = \frac{P_i}{2\pi(3+\nu)}\left[(1-\nu)\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2} + 2(1+\nu)\frac{\operatorname{arctg}\varrho - \varrho}{\varrho^2}\right]$$

schließlich auf dem Umfang des Kreises $\varrho = 1$,

$$m_r = 0,\ m_t = \frac{2(1+\nu)P_i}{\pi(3+\nu)}\left[\cos\varphi + \ln 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\right],\ m_{rt} = \frac{(1+\nu)P_i}{\pi(3+\nu)}\left[\sin\varphi - \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right] \quad . \quad (34).$$

Wenn die kreisförmige Platte in zwei oder in mehr Punkten unterstützt ist, sind ebensoviel Lösungen w_i^* (Gl. (27)), als Stützpunkte vorhanden sind, anzusetzen. Jede ist mit der Stärke der Auflagerkraft zu nehmen. Bei drei Stützpunkten reichen die Gl. (20) zur Angabe der Reaktionen aus, in den statisch unbestimmten Fällen mit mehr als drei Stützpunkten entsprechen jedem Wertsystem der λ_i, das den 3 Gl. (20) genügt, mögliche Deformationszustände. Die noch fehlenden Bestimmungsgleichungen liefern die Angaben über die Verschiebungen der Stützpunkte.

Wenn die Platte in den Endpunkten eines Durchmessers unterstützt ist, ist ihre Durchbiegung $w'' = w' + w_I$ . . . . . (35),

unter w' eine der Flächen (24) verstanden und wo $(n = 2, 4, 6, \ldots)$

$$w_0 = 0{,}065\,\frac{Pa^2}{N},\quad w_I = w_0 - \frac{Pa^2}{2\pi(3+\nu)N}\sum_2\left[\frac{1}{(n-1)n} + \frac{2(1+\nu)}{1-\nu}\frac{1}{(n-1)n^2} - \frac{\varrho^2}{n(n+1)}\right]\varrho^n\cos n\varphi \quad (36).$$

Für drei symmetrisch gelegene Auflagerpunkte, die ein gleichseitiges Dreieck bilden, ist $(n = 3, 6, 9, \ldots)$

$$w_I = w_0 - \frac{Pa^2}{2\pi(3+\nu)N}\sum\left\{\frac{1}{(n-1)n} + \frac{2(1+\nu)}{1-\nu}\frac{1}{(n-1)n^2} - \frac{\varrho^2}{n(n+1)}\right\}\varrho^n\cos n\varphi,\ w_0 = 0{,}0153\,\frac{Pa^2}{N} \quad (37).$$

Wenn der Kreis in den Ecken eines eingeschriebenen Rechtecks aufruht, haben zwei Stützpunkte, die auf einer Diagonalen ruhen, die nämliche Stützkraft aufzunehmen. Die elastische Fläche ist hier die Summe von w' Gl. (24) und von zwei Biegungszuständen w_I und w_{II} der Gl. (36), die mit der Stärke der Stützreaktionen P_I, bezw. P_{II} zu nehmen sind. Nimmt man $P_I = P_{II} = P^*$ an, so wird durch $w^* = w_I + w_{II}$ die Deformation einer Kreisscheibe unter einer Ringlast beschrieben, die durch vier gleich große Auflagerkräfte P^* abgefangen wird; setzt man hingegen $P_I = P^{**}$, $P_{II} = P^{**}$, so hebt sich die Ringlast fort, und es verbleibt die Torsionsbeanspruchung einer Kreisscheibe durch vier gleiche Randeinzelkräfte P^{**}.

Spannungsmomente einer in 2 Punkten unterstützten Kreisplatte unter einer auf den Umfang verteilten Ringlast.

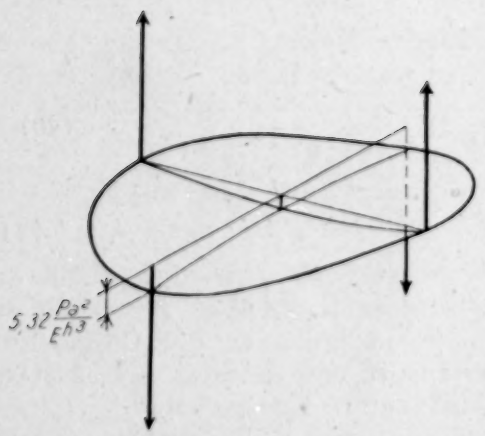


Abb. 9

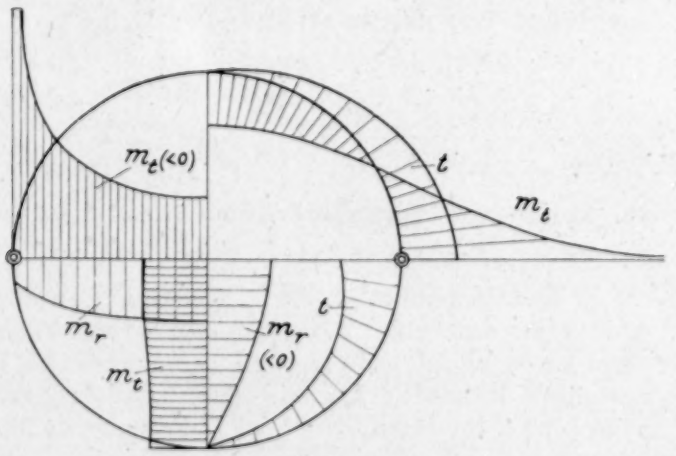


Abb. 10

3. Endliche Durchbiegungen. Die Erweiterung der Theorie der Plattenbiegung auf die Formänderungszustände von elastischen Platten, deren Durchbiegungen nicht mehr klein im Verhältnis zu ihrer Dicke sind, leitet in das Gebiet nichtlinearer Differentialgleichungen über. So führt die Aufgabe einer durch einen

gleichförmigen Druck belasteten kreisförmigen Platte großer Ausbiegung auf das simultane System von Gleichungen

$$\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u}\frac{d}{du}(u\,\Psi)\right) = -\Phi\frac{d\Phi}{du} - \frac{1-\nu}{2}\frac{\Phi^2}{u} \quad (38), \qquad \frac{d}{du}\left(\frac{1}{u}\frac{d}{du}(u\,\Phi)\right) = \Phi\, s_r' + \frac{1}{u}\int_0^u p^* u\,du \quad (39).$$

Als abhängige Veränderliche werden hier die zur Radialverschiebung ϱ eines Punktes der Mittelfläche und die zur Neigung φ ihres Meridianschnittes proportionalen Größen Ψ und Φ, als unabhängige Veränderliche $u = \frac{r}{a}$, das Verhältnis des Abstandes r vom Mittelpunkt zum Halbmesser a benutzt. Die in der zweiten Gleichung enthaltene Größe s_r' ist der Radialspannung der Mittelfläche σ_r', p^* dem auf der Platte lastenden Druck p proportional. Hat man Φ und Ψ, so liefern die vier Differentialausdrücke

$$\left.\begin{aligned} s_r' &= \frac{d\Psi}{du} + \frac{\Phi^2}{2} + \nu\frac{\Psi}{u} \\ s_t' &= \nu\left(\frac{d\Psi}{du} + \frac{\Phi^2}{2}\right) + \frac{\Psi}{u} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (40) \qquad \left.\begin{aligned} s_r'' &= -\sqrt{3}\left(\frac{d\Phi}{du} + \nu\frac{\Phi}{u}\right) \\ s_t'' &= -\sqrt{3}\left(\nu\frac{d\Phi}{du} + \frac{\Phi}{u}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (41)$$

den Spannungsverlauf. Den Uebergang von den Größen s zu den spezifischen Spannungen σ vermittelt

$$\sigma = \frac{E h^2}{12(1-\nu^2)a^2}\, s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42).$$

σ_r', σ_t' sind die Spannungen in der Mittelfläche und σ_r'', σ_t'' die Spannungen, die in der Oberflächenschicht $z = \frac{h}{2}$ der Platte zu σ_r', σ_t' hinzuzufügen sind. Φ und Ψ sind mit der Neigung des Meridianschnittes φ und mit der Radialverschiebung ϱ durch

$$\Phi = 2\sqrt{3}\,\frac{a}{h}\,\varphi, \quad \Psi = \frac{12a^2}{h^2}\,\frac{\varrho}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

verbunden. Die Durchbiegung w ist das Integral von Φ

$$w = \frac{h}{2\sqrt{3}}\int \Phi\, du + \text{konst.} \quad (44) \qquad \text{und} \qquad p^* = 24\sqrt{3}(1-\nu^2)\frac{p\,a^4}{E h^4} \quad (45).$$

Den wichtigsten Anknüpfungspunkt für die Möglichkeit einer Integration oder der Auffindung von Näherungslösungen bietet die Linearität der linken Seiten der Gl. (38), (39) und der Umstand, daß jede linke Seite nur von der einen Funktion abhängt. K. Federhofer[1]) hat dieses System von Gleichungen in angenäherter Weise integriert, indem er für die Radialspannung s_r' und für Φ zwei einfache Funktionen ansetzte. Die 2. Gleichung wird, wenn man in ihr s_r' als bekannt ansieht, eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, die Federhofer nach dem Vorgang von Ritz durch eine ihr äquivalente Variationsaufgabe ersetzt, die er zur Bestimmung der Beiwerte heranzieht.

Nun lassen sich Lösungspaare Φ und Ψ angeben, welche den beiden Gleichungen und vorgeschriebenen Grenzbedingungen streng genügen, wenn man die Belastungsfunktion oder Fläche p^* als eine unbekannte und zu bestimmende Funktion der unabhängigen Veränderlichen u betrachtet Die Lösungen des Plattenproblems für unendlich kleine Durchbiegungen bieten einen willkommenen Anhaltspunkt, wie die Ausdrücke für Φ zu wählen sind. Der Vorgang soll am Beispiel der eingespannten Platte mit einem in radialer Richtung unnachgiebigen Rand erläutert werden. Zu der angenommenen Funktion

$$\Phi = c\,(u - u^n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

läßt sich aus der Gleichung (38) nach ihrer Einführung auf der rechten Seite und Integration eine Funktion

$$\Psi = c_1 u + \frac{c_2}{u} - \frac{c^2}{2}\left\{\frac{(3-\nu)u^3}{8} - \frac{2(n+2-\nu)u^{n+2}}{(n+3)(n+1)} + \frac{(2n+1-\nu)u^{2n+1}}{(2n+2)2n}\right\} \quad . \quad (47)$$

angeben, welche ihr genügt. Für eine Platte ohne Bohrung ist $c_2 = 0$ zu setzen, c_1 bestimmt sich aus der Randbedingung $u = 1$, $\Psi = 0$ zu

$$c_1 = \frac{c^2}{8}\left[\frac{3-\nu}{2} - \frac{8(n+2-\nu)}{(n+3)(n+1)} + \frac{2n+1-\nu}{(n+1)n}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48).$$

---

[1]) Ueber die Berechnung der dünnen Kreisplatte mit großer Ausbiegung. Der Eisenbau. 9. Jahrg., S. 152. 1918.

Den Spannungszustand bestimmen die vier Funktionen

$$s_r' = (1+\nu)\,c_1 - (1-\nu^2)\,\frac{c^2}{8}\left[\frac{u^2}{2} - \frac{8\,u^{n+1}}{(n+3)(n+1)} + \frac{u^{2n}}{(n+1)\,n}\right] \qquad s_t' = \frac{d}{du}(u\,s_r') \qquad (49)$$

$$s_r'' = -\sqrt{3}\,c\,[1+\nu-(n+\nu)\,u^{n-1}], \qquad s_t'' = -\sqrt{3}\,c\,[1+\nu-(n\nu+1)\,u^{n-1}] \qquad (50)$$

und die Belastungsfunktion, für die Φ und Ψ Lösungen des in Frage stehenden Plattenproblems sind, ist $\frac{1}{u}\int_0^u p^* u\,du = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{u}\frac{d}{du}(u\,\Phi)\right) - \Phi\,s_r' = F(u)$,

$$p^* = \frac{1}{u}\frac{d}{du}(u\,F(u)) \qquad (51).$$

Durch Variation der Konstanten c und des Exponenten n bietet sich die Möglichkeit, die p^*-Kurve abzuändern und innerhalb einer für den vorliegenden Zweck hinreichenden Genauigkeit mit ihr die gleichförmige Druckverteilung $p^* =$ konst. anzunähern. Die Abweichungen der Ordinaten der Belastungsfunktion p^* von ihrer mittleren Ordinate $\bar{p}^*$ lassen eine Fehlerschätzung zu. Wenn man n festhält und den Beiwert c negativ werden läßt, nimmt das Integral der Fehlerquadrate $\int_0^1 [p^* - \bar{p}^*]^2\,du$ mit den wachsenden Absolutwerten von c zuerst zu, erreicht ein relatives Maximum, nimmt wieder bis zu einem relativen Minimum ab, um dann schließlich monoton anzuwachsen. Der Vergleich der größten Schwankung mit dem Mittelwert $\bar{p}^* = \int_0^1 p^*\,du$ zeigt, daß es praktisch zulässig ist, die aus dem relativen Minimum bestimmte Belastungskurve statt ihres Mittelwertes zu benutzen. Wir haben uns damit begnügt, statt des Integrals die Summe der Fehlerquadrate in den sechs Punkten $u = 0,\ ^1/_5,\ ^2/_5,\ ^3/_5,\ ^4/_5,\ 1$ des Intervalls der Veränderlichen u zu einem Minimum zu machen. Man hat dazu c aus einer Gleichung $Ac^4 + Bc^2 + C = 0$ zu ermitteln, dem einen Wurzelpaar entspricht das relative Maximum, dem andern das relative Minimum. Daß sich für den Beiwert c keine eindeutige Bestimmung ergibt, braucht hier nicht als störend empfunden zu werden, die zu irgend einem willkürlich angenommenen oder bestimmten Wert von c aufgetragene Belastungskurve p^* zeigt an, mit was für einem Belastungszustand man es zu tun hat.

Belastungsflächen eingespannter Kreisplatten ($n = 5$).

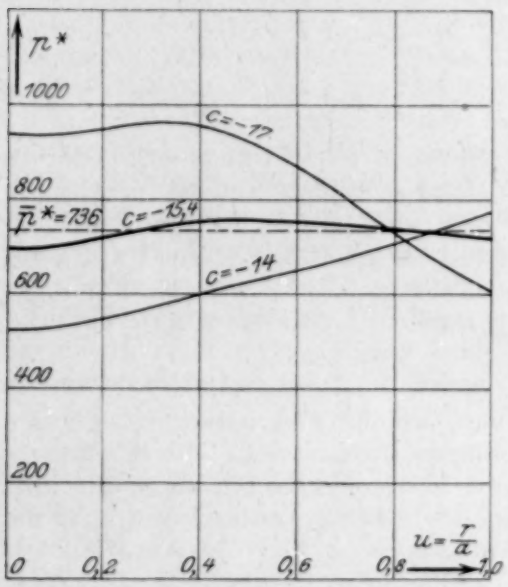


Abb. 11

In der Abb. 11 sind drei mit der Poissonschen Zahl $\nu = ^1/_4$ zum Exponenten $n = 5$ ermittelte Druckkurven gezeichnet (mit $c = -14$, $-15{,}4$ und -17). Der zugehörige Ansatz

$$\Phi = c\,(u - u^5) \qquad (52)$$

ergab

$$s_r' = \frac{c^2}{256}\,(73 - 15\,u^2 + 5\,u^6 - u^{10}) \qquad (53)$$

und die Belastungsfläche

$$p^* = -96\,cu^2 + \frac{c^3}{8}\left[\frac{73}{48} - \frac{15}{8}\,u^2 - \frac{73}{16}\,u^4 + 5\,u^6 - \frac{9}{4}\,u^{10} + \frac{u^{14}}{2}\right] \qquad (54).$$

Sie verläuft außer für $c = 0$ zu ihrer mittleren Ordinate

$$\bar{p}^* = -32c - 0{,}0658\,c^3 \qquad (55)$$

am nächsten, wenn c gleich $c = -15{,}4$ ist.

Die mittlere Ordinate ist dann gleich $\bar{p}^* = 736$, welcher Zahl ein Druck $\frac{pa^4}{Eh^4} = 18{,}9$ entspricht. Aus (52) folgt die elastische Fläche

$$w = \frac{h}{2\sqrt{3}}\int \Phi\,du + c_0 = \frac{hc}{4\sqrt{3}}\left(u - \frac{u^6}{3}\right) + c_0 \qquad (56)$$

oder wegen der Grenzbedingungen $u = 1$, $w = 0$,

$$c_0 = -\frac{hc}{6\sqrt{3}},$$

$$w = -\frac{hc}{12\sqrt{3}}(2 - 3u + u^6) = 0{,}75\,(2 - 3u + u^6)h \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

mit einem Biegungspfeil der Platte $f = -\frac{hc}{6\sqrt{3}} = 1{,}49\,h$, der anderthalbmal so groß wie ihre Dicke ist.

Zur Fehlerabschätzung an Hand der Belastungsfunktion darf bemerkt werden, daß hier auf einen sehr nahen Anschluß an ihren gegebenen Verlauf mit einem so einfachen Ansatz nicht gerechnet werden kann; man überzeugt sich an Hand einfacher Beispiele aus der Plattenstatik, daß man ihn innerhalb eng gezogener Grenzen nicht zu verlangen braucht, wenn man die Beiwerte aus einem Minimalprinzip bestimmt. Die Biegungsspannungen und die Streckspannungen der Mittelfläche

$$\left.\begin{aligned} s_r' &= \frac{c^2}{256}\left[\frac{73}{3} - 15\,u^2 + 5\,u^6 - u^{10}\right] \\ s_t' &= \frac{c^2}{256}\left[\frac{73}{3} - 45\,u^2 + 35\,u^6 - 11\,u^{10}\right] \end{aligned}\right\} \quad (58)$$

$$s_r'' = \frac{\sqrt{3}\,c}{4}\,[5 - 21\,u^4],\quad s_t'' = \frac{\sqrt{3}\,c}{4}[5 - 9\,u^4] \quad (59)$$

sind aus der Abb. 12 zu ersehen.

Spannungsverteilung einer eingespannten Kreisplatte ($n = 5$, $f = 1{,}49$ h).

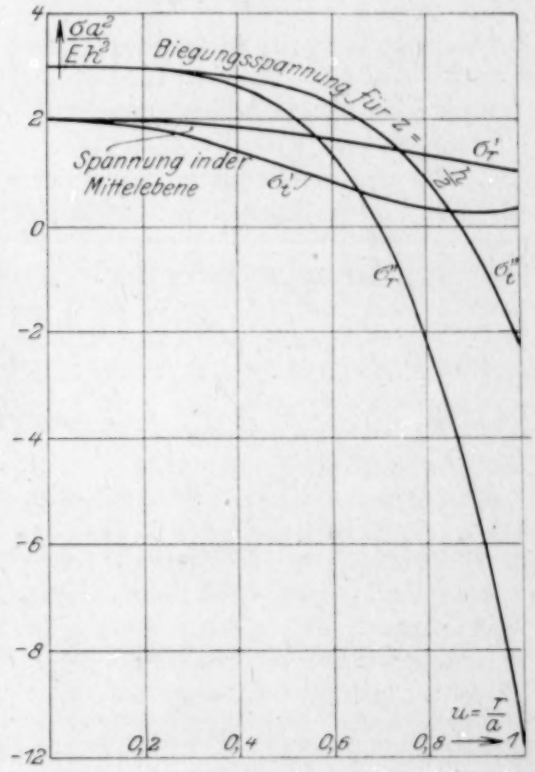


Abb. 12

Wir haben die Rechnung für $n = 4$ und $n = 7$ ebenfalls durchgeführt, die Abb. 13 und 14 geben in den Abweichungen der zugehörigen Belastungskurven von ihrem Mittelwert eine Vorstellung von der erzielten Genauigkeit. Die Abb. 15 und 16 zeigen den Verlauf des Druckes und der spez. Spannungen mit zunehmendem Biegungspfeil; die schrägen Geraden entsprechen der Theorie für unendlich kleine Durchbiegungen. Der

Belastungsflächen eingespannter Kreisplatten ($n = 4$).

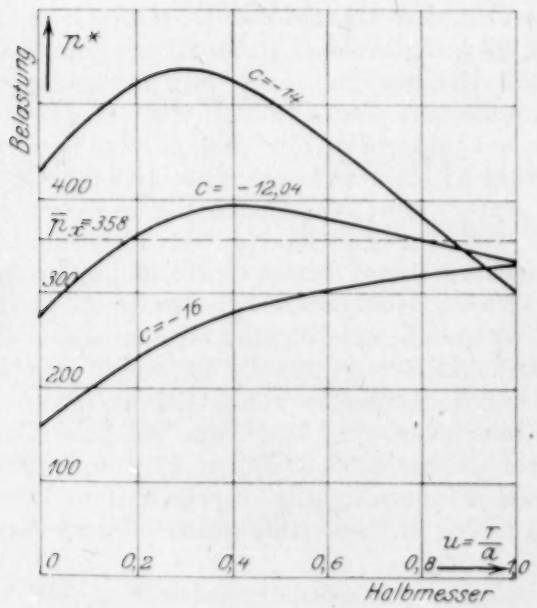


Abb. 13

Belastungsflächen eingespannter Kreisplatten ($n = 7$).

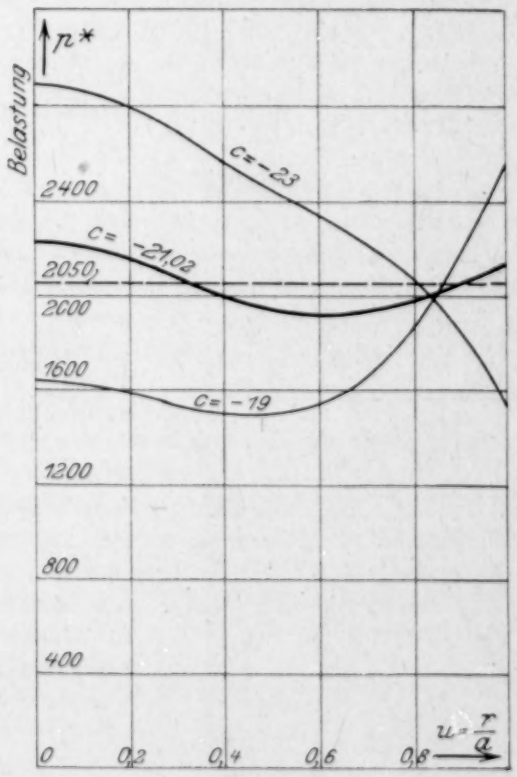


Abb. 14

Eingespannte Kreisplatte großer Ausbiegung.

Belastung. Spannung in der Mitte ($u=0$) und auf dem Rande ($u=1$).

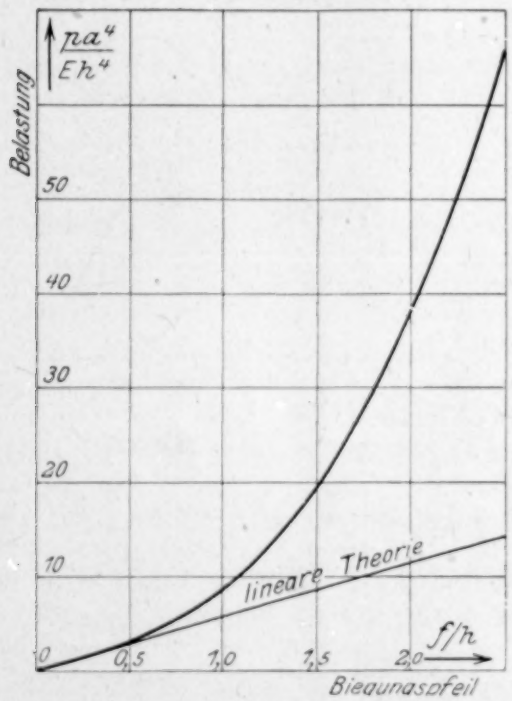


Abb. 15

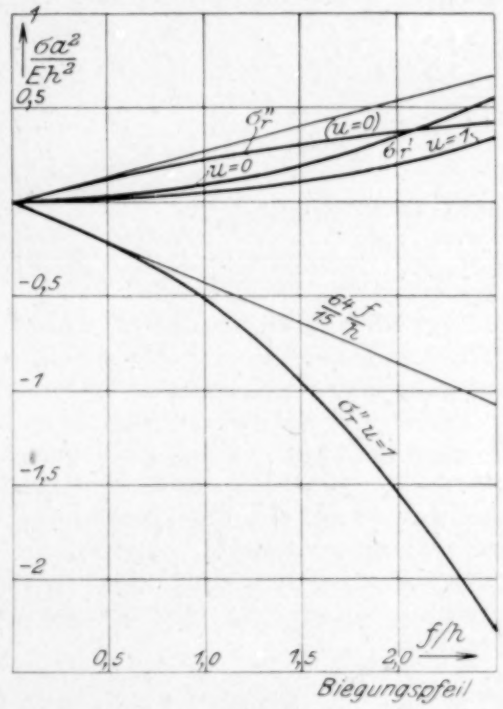


Abb. 16

Zusammenhang des Biegungspfeiles f in der Mitte der Platte mit dem Druck p kann etwa bis zur zweiundeinhalbfachen Dicke durch die Funktion

$$\frac{pa^4}{Eh^4} = 5{,}69\,\frac{f}{h} + 3{,}32\left(\frac{f}{h}\right)^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

wiedergegeben werden. Die Platte wird am stärksten auf dem Rand verbogen und beansprucht, die mit der zunehmenden Wölbung in einem Randring sich mehr und mehr verschärfende Biegung bringt die Zunahme des Exponenten n im Ansatz (46) zum Ausdruck.

Freiaufliegende kreisförmige Platten großer Ausbiegung.

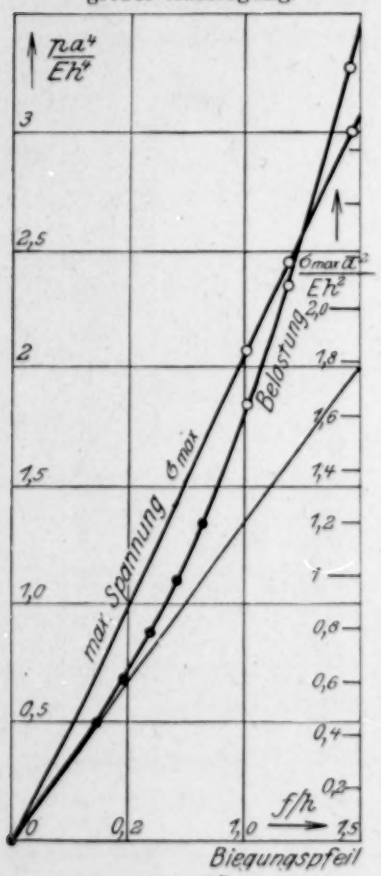


Abb. 17

In ähnlicher Weise läßt sich die Biegung einer frei aufliegenden Platte durch den Ansatz

$$\Phi = c\left(u - \frac{1+\nu}{n+\nu}u^n\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

behandeln (Abb. 17). Sie gibt Anlaß zur Entstehung von Druckspannungen in tangentialer Richtung in der Mittelfläche entlang des Randes.

4. Versuche mit Glasplatten. Die Grundlagen der Theorie der Biegung dünner Platten und Schalen bedürfen nach zwei Richtungen einer experimentellen Nachprüfung. Soweit es sich um die elastisch-isotropen Körper und die aus einem Haufwerk von regellos orientierten Kristalliten aufgebauten Körper handelt, deren Teilchen unter den in Betracht gezogenen Spannungszuständen gut zusammenhalten und keine merklichen Schiebungen entlang ihren Grenzflächen oder in ihrem Innern erfahren, sind die allgemeinen Grundlagen ihrer mathematischen Theorie erfüllt. Sie werden durch die zahlreichen Versuche gestützt, die man mit stabförmigen Körpern aus diesen Stoffen gemacht hat. Unter Elastizitätsversuchen, die den Vergleich mit der Theorie an plattenförmigen Körpern anstrebten, sind mir nur die mit kreisförmigen Flußeisenplatten gemachten Versuche von A. Föppl[1]) bekannt. Die zahlreichen Versuche von

[1]) Mitteil. aus dem mech.-techn. Laboratorium der Techn. Hochschule München, 1900.

C. v. Bach lassen sich zu einer Ueberprüfung der Plattentheorie nicht heranziehen, weil bei ihnen die Einhaltung genauer definierter Randbedingungen nicht beabsichtigt war. An den in der Mitte und exzentrisch durch eine Einzelkraft belasteten, frei aufliegenden Platten von A. Föppl zeigte sich eine gute Uebereinstimmung der theoretisch verlangten mit der beobachteten Gestalt der durchgebogenen Platte, die absoluten Werte des aus den Biegungsversuchen abgeleiteten Elastizitätsmoduls standen aber nicht in ganz befriedigender Uebereinstimmung mit dem aus anderen Versuchen bestimmten Wert. Zu erwähnen wäre ferner die Bestimmung der Frequenz transversal schwingender quadratischer Platten von Walter Ritz[1]), über deren Zahlen die Beobachtungen von Strehlke vorliegen.

Während also das Elementargesetz in den elastisch-isotropen Körpern als bestätigt gelten darf, bleibt bei den Platten aus solchen Stoffen das Verhalten auf dem Rande noch zu beachten. Die in der Theorie gemachte und in der Mehrzahl der in den Anwendungen vorkommenden Biegungsfälle von Platten und Schalen zutreffende Voraussetzung kleiner Durchbiegungen im Vergleich zu ihrer Dicke hat zur Folge, daß die Ungenauigkeiten in der Herstellung ihrer Auflagerflächen oder die Verschiebungen, welche die Ränder wegen der elastischen Nachgiebigkeit der Unterlage erleiden, die Grenzbedingungen beeinflussen dürften. Die praktisch wichtige Frage, wie groß die zu erwartenden Abweichungen sind und bis zu welchem Grade die der Rechnung zugrunde gelegten Grenzbedingungen frei aufliegender und eingespannter Plattenränder in den praktischen Konstruktionen als erfüllt betrachtet werden können, ist nicht hinreichend geklärt. So entziehen sich die Bewegungen der Ränder der frei aufliegenden Platten während ihrer Belastung einer genaueren Kenntnis. Die in der Rechnung gemachte Voraussetzung stetiger Auflage dürfte — wie man schon aus den alten Versuchen von Bach weiß — bei Platten mit ausspringenden Ecken kaum erfüllt sein, wenn nicht besondere Vorkehrungen getroffen sind, um das Abheben der Ecken zu verhindern. Es ist wahrscheinlich, daß man ihren Formänderungs- und Spannungszuständen eher näher kommen wird, wenn man den entgegengesetzten Grenzfall, nämlich den der Punktstützung — beispielsweise bei rechteckigen Platten in den Seitenmitten — der Rechnung zugrunde legt. Hr. Professor L. Prandtl hat es mir in dankenswerter Weise ermöglicht, mit von der Jubiläumsstiftung der deutschen Industrie zu diesem Zweck freundlichst gewährten Mitteln einige Versuche mit kreisförmigen Platten machen zu können. Aus dem eben Gesagten ergibt sich für die mit Platten anzustellenden Elastizitätsversuche die Forderung der scharfen Einhaltung der Grenzbedingungen. Von den zahlreichen Lösungen der Plattengleichung dürften sich zu einem Elastizitätsversuch besonders solche eignen, die zu einem statisch bestimmten System der Auflagerreaktionen gehören. Für diesen Zweck kommen der Belastungsfall einer rechteckigen Platte durch vier in ihren Ecken angreifende Einzelkräfte in Betracht, die gleich, jedoch paarweise entgegengesetzt gerichtet sind, an dem ich vor einigen Jahren Versuche anstellte, und beispielsweise die hier erwähnten Formänderungszustände in zwei oder höchstens in drei Punkten unterstützter kreisförmiger Platten. Einige Biegungsversuche, die ich mit in dieser Art unterstützten kreisförmigen Platten aus Glas machte, ergaben eine recht gute Uebereinstimmung der von der Rechnung verlangten Form der verbogenen Platte mit der beobachteten. Als Belastung wurde die Einzelkraft in der Mitte gewählt. Die Durchbiegungen der Platte konnten mittels eines zugespitzten Fühlstiftes an jeder Stelle der Platte beobachtet werden. Der Elastizitätsmodul des Glases wurde, ähnlich wie dies bei den Versuchen von A. Föppl geschehen war, aus Biegungsversuchen mit schmalen Streifen (es wurden drei Streifen unter einer Einzelkraft in der Mitte und drei Streifen in reiner Biegung untersucht) ermittelt:

Biegung von Streifen unter Einzelkraft . .	723000	723000	731000	Mittel	726000
reine Biegung	730000	728000	733000	»	730000

Mittel aus Streifenversuchen: 728000 kg/cm².

Die kreisförmigen Platten wurden entweder in zwei auf einem Durchmesser oder in drei in einem gleichseitigen Dreieck gelegenen Randpunkten auf Stahlspitzen (um die Platte gegen das Kippen im Falle der Zweipunktstützung zu sichern, wurde statt der einen Spitze eine kurze Schneide benutzt) gelagert und in der Mitte belastet. Mit Hilfe der Formeln für den Biegungspfeil der in zwei bezw. in drei Punkten gestützten Kreisplatte wurden aus den Plattenversuchen die folgenden Werte für den Elastizitätsmodul ermittelt:

---

[1]) Annalen der Physik, Bd. 28, S. 737, 1909.

	Platte 1	2	3		
Platte liegt in zwei Punkten auf	728000	733000	718000	Mittel	726000
» » » drei » »	713000	730000	718000	»	720000

Mittel aus Plattenversuchen: 723000 kg/cm².

Die Uebereinstimmung der aus den Biegungsversuchen mit den Streifen und mit den kreisförmigen Platten nach der Kirchhoffschen Plattentheorie berechneten Durchbiegungen fällt sehr befriedigend aus. Zum Vergleich ist nachzutragen, daß hier für die Poissonsche Zahl $\nu = 1/4$, der aus sonstigen Elastizitätsversuchen mit Glas bekannte Wert angenommen wurde. Die Formeln für den Biegungspfeil hätten ohne weiteres gestattet, auch die Querdehnungszahl neben dem Elastizitätsmodul als eine unbekannte Materialkonstante anzusehen und zu ermitteln. Wegen der Uebereinstimmung der obigen Zahlen wurde von der genaueren Ausgleichung abgesehen. Es darf noch erwähnt werden, daß sich die von den Punktbelastungen hervorgerufenen Störungen im Spannungszustand bei den Glasplatten wegen der kleinen Werte der Schubspannungen nicht bemerkbar machten, während ich bei meinen früheren Versuchen mit in ihren Ecken durch Einzelkräfte belasteten quadratischen Platten ihren Einfluß deutlich feststellen konnte. Als ich die Versuche mit auf ihrem Umfang abgestützten Platten wiederholte (Abb. 18), konnte die Linearität zwischen den Durchbiegungen und der Kraft unter kleinen Belastungen nicht beobachtet werden, zum Zeichen daß sich die Platten erst allmählich an ihre Unterlage anlegten. Aus der Neigung der mit der steigenden Belastung schließlich sich einstellenden mittleren Geraden ergaben sich jedoch mit Benutzung der Formel für den Biegungspfeil der frei aufliegenden Platte die Werte des Elastizitätsmoduls

Versuche mit freiaufliegenden kreisförmigen Glasplatten.

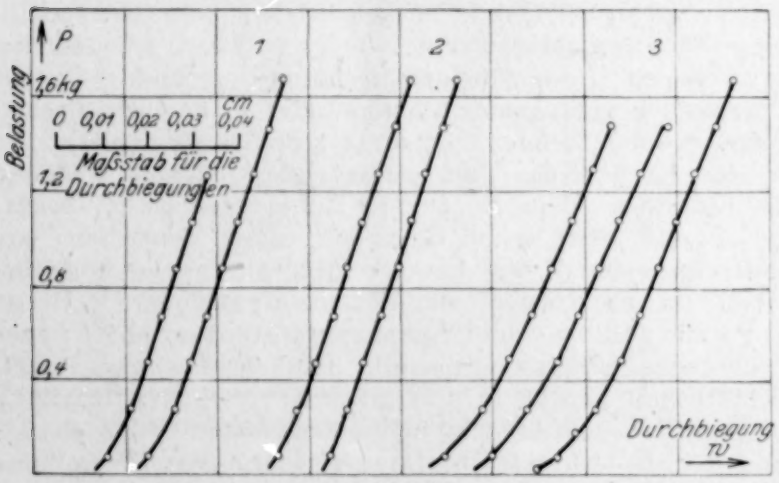


Abb. 18

Platte	1	2	3
	728000	732000	706000 kg/cm²,

die mit Ausnahme des letzten Wertes ebenfalls nahe zum obigen Mittelwert liegen. (Die Platte 3 war, wie durch Abklopfen auf ihrer Unterlage sich zeigte, am wenigsten eben.) Bei Eisen oder Stahl hätte sich vermutlich der Einfluß einer ungleichmäßigen Auflage auf dem Rand auf den Biegungspfeil wegen des größeren Elastizitätsmoduls stärker bemerkbar gemacht.

5. Versuche mit Stahlblechplatten. In einer zweiten Versuchsreihe wurden die Durchbiegungen von dünnen, unbearbeiteten Stahlblechplatten, die einem hydraulischen Druck ausgesetzt waren, gemessen. Sie hatten eine Dicke von 4 mm. Die Versuchsanordnung zeigt die Abb. 19. In ihr konnten sowohl eingespannte, als freiaufliegende Kreisplatten belastet werden. Die Einzelheiten der Randbefestigung sind aus den Abb. 20 und 21 zu ersehen. Der Elastizitätsmodul des Stahlblechs wurde an zwei Streifen mittels Biegungsversuches zu

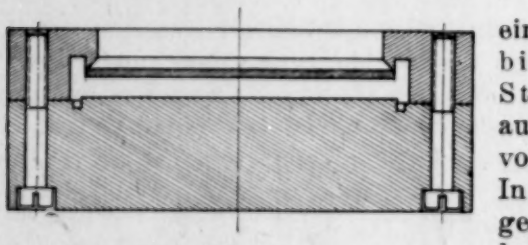


Abb. 19

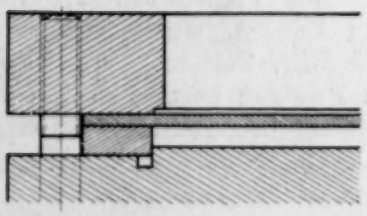


Abb 20

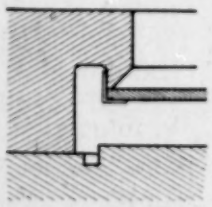


Abb 21

$$E = 2080000,\quad 2140000 \text{ kg/cm}^2$$

und mit Martensschen Spiegelgeräten aus Zugversuchen gleich

$$E = 2090000,\quad 2110000 \text{ kg/cm}^2$$

im Mittel gleich $E = 2110000$ kg/cm² er-

mittelt. Die eingespannten Platten hatten einen äußeren Durchmesser von 25 cm und einen Halbmesser des Einspannungskreises von $a = 10{,}77$ cm. Die Platte 14 war im Anlieferungszustand eben, die Platten 11 und 12 waren um einige Zehntel Millimeter krumm und wurden nicht gerichtet. Die Abb. 22 zeigt die mit ihnen vorgenommenen Biegungsversuche, als Abszissen sind die Durchbiegungen in der Mitte (f), als Ordinaten die Drucke in at aufgetragen. Die einzelnen Kurven sind in wagerechter Richtung verschoben gezeichnet. Die Zahl unter dem Anfangspunkt jeder Kurve bedeutet die aus den vorangehenden Versuchen zurückgebliebene bleibende Durchbiegung in Schätzungseinheiten der Beobachtungsskale. (100 S. E. bedeuten 0,02 cm.) Mit Benutzung des aus den Biegungsversuchen mit den Streifen und den Zugversuchen bestimmten Wertes des Elastizitätsmoduls und einer Poissonschen Zahl $\nu = 0{,}3$ mußte der Zunahme des Druckes p um 1 at nach der für unendlich kleine Durchbiegungen gültigen Formel des Biegungspfeiles

Biegungsversuche mit eingespannten Kreisplatten aus Stahl.

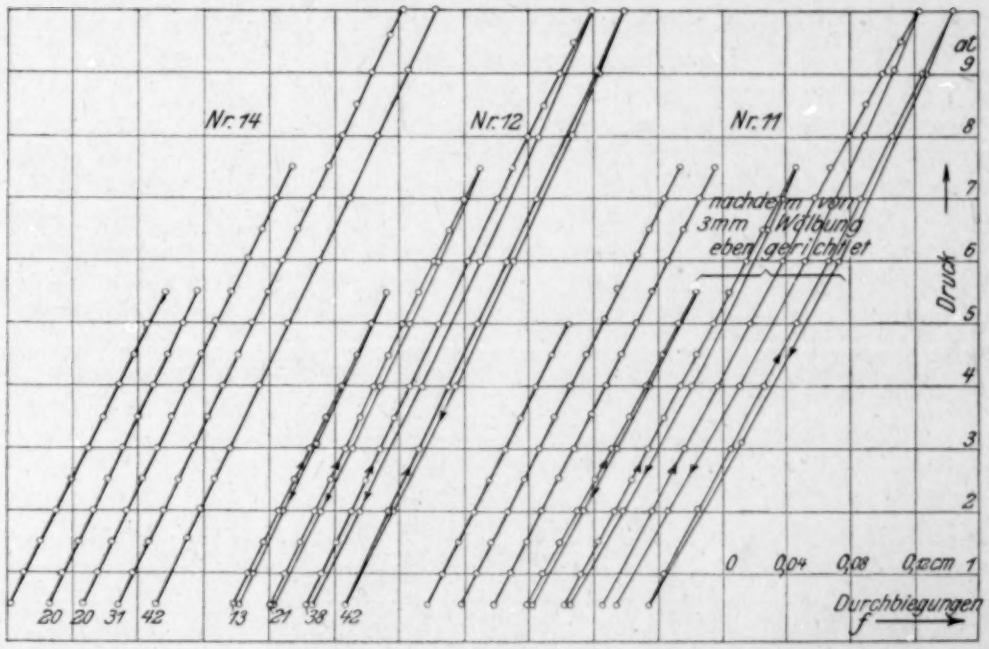


Abb. 22

$$f = \frac{3\,(1-\nu^2)}{16}\,\frac{pa^4}{Eh^3} = 0{,}171\,\frac{pa^4}{Eh^3}$$

der auf ihrem Umfang $r = a$ eingespannten Kreisplatte von der Dicke h eine Zunahme der Durchbiegung in der Mitte um

Platte	14	11	12	
$h =$	0,398	0,402	0,405	cm
$a =$	10,77	10,77	10,77	»
$f =$	0,0174	0,0168	0,0165	»

entsprechen. Die beobachteten Werte waren

Platte 14: Versuch		Platte 11: Versuch		Platte 12: Versuch	
1	0,0190	1	0,0192	1	0,0189
2	0,0184	2	0,0194	2	0,0183
3	0,0184	3	0,0195	3	0,0183
4	0,0182			4	0,0184
5	0,0183				

durchwegs größer, im Mittel um 6,1, 12,0, 15,3 vH. Man wird kaum fehlgehen, wenn man diesen Unterschied einer wohl kaum zu vermeidenden Unvollkommenheit des eingespannten Randes zuschreibt. Die radialen Dehnungen der Platte können längs des Randkreises $r = a$ nicht plötzlich aufhören und ein Stück der Platte jenseits des Einspannungskreises muß zur Deformation herangezogen werden. Die Wirkung dieses mit Gleiten verbundenen radialen Nachgebens ist dieselbe wie eine Vergrößerung des »Einspannungshalbmessers« a. Gelegentlich von Stabilitätsversuchen mit flachen Stäben hat Prandtl ähnliche Beobachtungen gemacht, bei denen eine durch die Reibungskräfte während des Gleitens in den Einspannungsbacken hervorgerufene Hystereris in den Last-Durchbiegungskurven zutage trat. Eine Versuchsreihe mit einer eingespannten Platte nach der Ueberschreitung der Fließgrenze zeigt die Abb. 23. Die anfängliche Neigung der Kurven bei der Last Null nimmt, wie man sieht, nach jeder Laststeigerung zu. Einer Zunahme des Druckes um 1 at bei der Last Null entsprachen die Durchbiegungen:

Versuch	4	5	6	7	8	9	10	11
vor dem Versuch belastet bis	9	11	13	16	19	22	25	30 at
Durchbiegung	198	196	196	194	191	184	178	$151 \cdot 10^{-2}$ cm.

Biegungsversuche mit einer eingespannten, kreisförmigen Platte aus Stahlblech bei großer Ausbiegung.

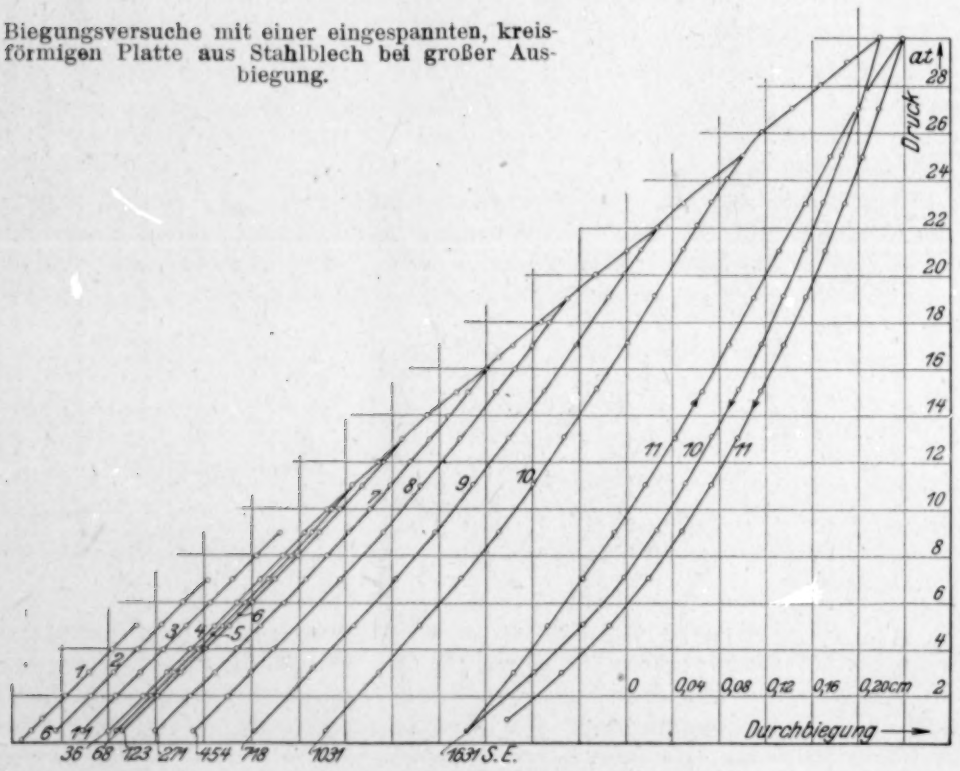


Abb. 23

In diesen Zahlen äußert sich das Steiferwerden der Platte während der Wölbung trotz des durch das starke Fließen einsetzenden Spannungsausgleiches. Die große Hystereresschleife zwischen den Belastungs- und Entlastungskurven am Ende der Versuchsreihe rührt vom starken Fließen, das nach jeder Lastumkehr von neuem einsetzt, her. Nach dem letzten Versuch hatte die Platte eine bleibende Wölbung mit einem mittleren Pfeil von etwa 3,3 mm. Sie wurde hierauf mittels Hämmern, so gut es ging, eben gerichtet.

Ein 8 Monate später mit ihr vorgenommener Elastizitätsversuch ergab für 1 Atm. Druckzunahme bei der ersten **0,0212 cm** und bei der zweiten Belastung **0,0205 cm** Durchbiegung. Die versteifende Wirkung der Wölbung war zwar verschwunden, dafür zeigten sich aber, von den kleinsten Drucken angefangen, sehr beträchtliche bleibende Formänderungen, zum Zeichen der starken Selbstspannungen, die das Richten in ihr hinterlassen hatte.

Einen Elastizitätsversuch mit einer freiaufliegenden Platte (Dicke 0,401 cm, Halbmesser des Auflagerkreises 9,79 cm, Halbmesser der Platte 9,97 cm) zeigt die Abb. 24. Die mit Nr. 6 versehene Kurve wurde erhalten, nachdem zwischen die Platte und ihre Unterlage drei Beilagen von $^1/_{10}$ mm Dicke in drei annähernd ein gleichseitiges Dreieck bildenden Punkten geschoben wurden. Sie verläuft etwas flacher als die früher aufgenommenen Kurven und weist eine Zunahme von 0,0457 cm auf. Die Kurven 7 und 8 beziehen sich schließlich auf zwei Biegungsversuche, während welchen durch zwei Beilagen von 0,67 mm Stärke eine Stützung der Platte in zwei auf einem Durchmesser gelegenen Punkten erzwungen wurde. Die Erklärung für den Knick in den Kurven liegt auf der Hand; unter der Last, die ihm entspricht, erreichte der Plattenrand in neuen Stellen zwischen den beiden ersten Stützpunkten die Unterlage und ruhte, von diesem Druck angefangen, vermutlich in vier Punkten auf. Wenn man nicht dicke Platten mit einer sorgfältig bearbeiteten Auflagerfläche verwendet, wird man eine exakte Erfüllung der Randbedingung innerhalb der Fehlergrenzen der Versuchsreihe der in statisch bestimmter Art unterstützten Platten kaum erwarten können. Die Durchbiegung der freiaufliegenden Platte hätte für die unendlich kleinen Wölbungen mit einer Poissonschen Zahl von $\nu = 0{,}3$

$$f = \frac{3\,(5+\nu)\,(1-\nu)}{16}\,\frac{p a^4}{E h^3} = 0{,}696\,\frac{p\,a^4}{E\,h^3}$$

betragen und eine Zunahme von

$$0{,}0471 \text{ cm/at}$$

bei der Last Null aufweisen müssen. Dieser Betrag weichtum 6,3 vH vom beobachteten Mittel ab. Die im elastischen Bereich der Formänderungen aufgenommenen Kurven 1 bis 5 zeigen in ihrem weiteren Verlauf die von der Theorie der Platten großer Ausbiegung

verlangte Form. Ein genauer Vergleich mit der von der Rechnung geforderten Kurve wird wegen ihrer bereits am Nullpunkt um den eben angegebenen Betrag abweichenden Neigung erschwert.

Wir haben vorhin auf die Wirkung der Eigenspannungen in der nach einer bleibenden Wölbung wieder durch Hämmern eben gerichteten Platte hingewiesen. Während die Gegenwart von Eigenspannungen in einem kompakten Stück eines elastischen Metalles in einem Elastizitätsversuch nicht festgestellt werden kann und sich höchstens in der Verschiebung der Fließgrenze äußern wird, läßt sich leicht einsehen, daß Eigenspannungssysteme, welche die Mittelebene einer dünnen Platte spannen, sich in ihrem Verhalten während eines Biegungsversuches verraten müssen. Wenn die Zugspannungen in ihr überwiegen, verhält sich die Platte steifer und umgekehrt, wenn in ihrer Mittelebene die Druckspannungen vorherrschen, weicher als im natürlichen Zustand. Es ist mir nicht bekannt, ob die Wirkung dieser Eigenspannungen auf die Schwingungen beobachtet ist, welche die Platten infolge ihrer Biegungssteifigkeit vollführen können. Sie müßten sich in einer Hebung bezw. in einer Senkung des Tones äußern (eine unter einer Knickbelastung stehende Platte hat die Schwingungsdauer unendlich).

Versuche mit freiaufliegenden Kreisplatten aus Stahl.

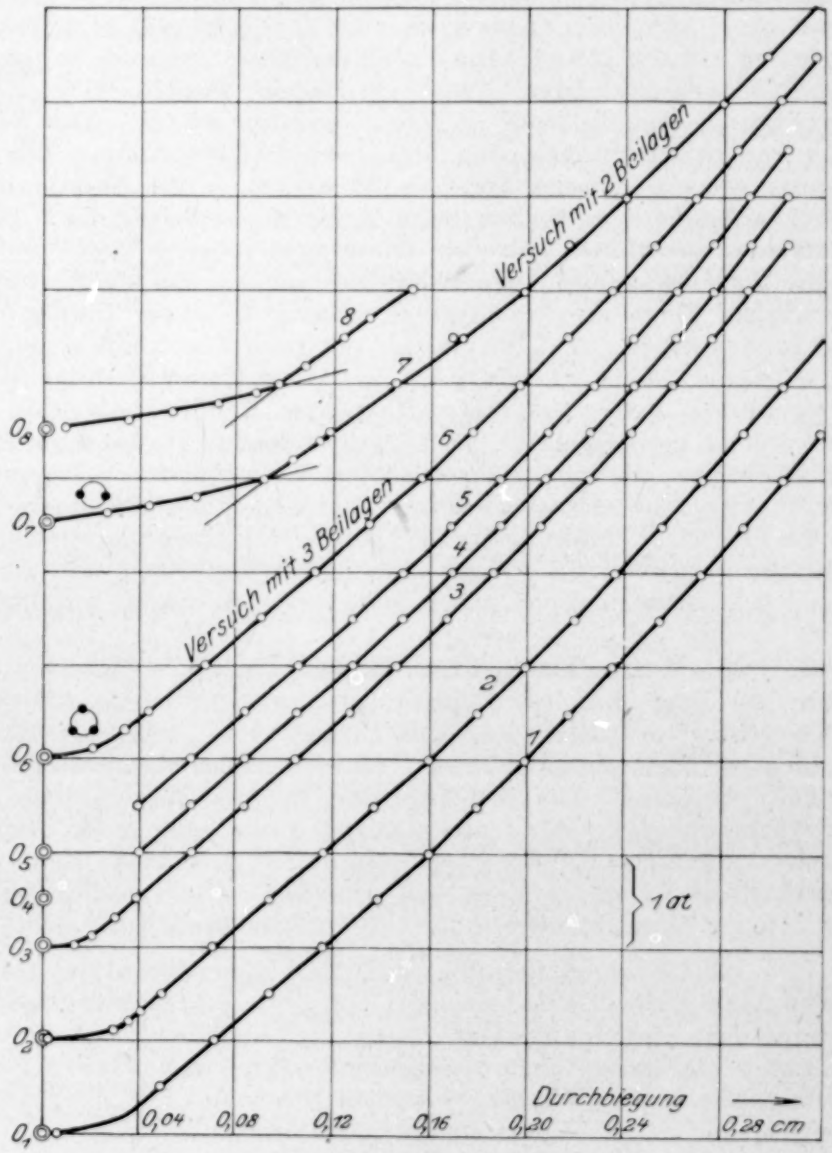


Abb. 24

Wenn eine eingespannte kreisförmige Platte durch einen gleichförmigen Druck p belastet und in ihrer Ebene gleichmäßig durch eine Zugspannung σ angespannt wird, ist ihr Wölbungspfeil in der Mitte nach der Theorie der unendlich kleinen Durchbiegungen gleich

$$w = \frac{p a^4}{4 N}\left[1 + \frac{2 (J_0 (i \alpha a - 1)}{i \alpha^3 a^3 J_1 (i \alpha a)}\right],$$

wo mit a ihr Halbmesser, mit h ihre Dicke, mit $N = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}$ mit $\alpha^2 = \frac{\sigma h}{N}$ und mit J_0 bezw. J_1 die Besselschen Funktionen der Zeiger Null und Eins bezeichnet sind. Den Zahlen entsprechen die Wölbungspfeile

$\alpha a =$	0	1,	2,	3,	4,	5, . . .
$w =$	0,0156	0,0146	0,0122	0,0096	0,0074	0,0057 , . . .

Nachdem die Spannung proportional α^2 ist, nehmen die zu den angeschriebenen Zahlen αa gehörigen Spannungen wie die Quadrate zu. Sie zeigen bereits innerhalb unendlich kleiner Durchbiegungen die starke Abhängigkeit des Durchhanges von einer in ihrer Mittelebene gleichmäßig angespannten und durch einen Druck in der Querrichtung

belasteten Platte von dieser Spannung an. In einer gerichteten Metallplatte oder einer Platte, welche in ihrer Ebene bleibend verzerrt worden ist, verbleiben nach ihrer Entlastung Selbstspannungen. Es ist deshalb wahrscheinlich, daß man für die Elastizitätskonstanten aus Versuchen mit solchen Platten nicht dieselben Werte finden wird, wenn auf die Eigenspannungssysteme keine Rücksicht genommen wird, wie aus Versuchen mit Platten, deren Mittelebene im natürlichen Zustand ungespannt ist. Der störende Einfluß der Eigenspannungen hätte vermieden werden können, wenn die Versuche mit ausgeglühten Metallplatten gemacht worden wären. Die Versuche mit den nicht besonders hergerichteten Stahlplatten lassen die Größenordnung der Abweichung erkennen, die man unter der Anordnung der Abb. 19 bis 21 in der Erfüllung eines eingespannten und eines frei aufliegenden Randes beim Kreis zu erwarten hat. Die Versuche von A. Föppl und die hier erwähnten mit den Glasplatten dürften den Nachweis bestärken, daß, wenn auf die Voraussetzungen der Rechnung in den Versuchen hinreichend geachtet wird, die berechnete Form der verbogenen Platte in guter Uebereinstimmung mit der beobachteten gefunden wird. Die Versuche mit den Stahlplatten zeigen, daß mit den Anordnungen der Abb. 19 bis 21 praktisch auf eine Verwirklichung der Grenzbedingungen eines eingespannten und eines frei aufliegenden Randes (innerhalb der angegebenen Fehlergrenzen) gerechnet werden darf. Das Verhältnis der Dicke zum Durchmesser betrug für sie $^1/_{200}$, für dickere Platten und solche mit bearbeiteten Auflagerflächen dürfte eine kleinere Abweichung zu erwarten sein, für wesentlich dünnere Platten jedoch die Einhaltung oder Verwirklichung genauer definierter Randbedingungen praktisch schwierig werden. Einige Versuche, die ich in dieser Richtung mit 3 mm starken Stahlblechplatten von denselben Abmessungen machte, scheiterten an ihren anfänglichen Unebenheiten.

6. Bemerkung über Betonplatten. Das zweite Gebiet, auf dem ein Bedürfnis für die Vornahme von Versuchen vorliegt, ist das der unvollkommen elastischen Körper, vor allem das des Eisenbetons. Sein elastisches Verhalten, soweit man von einem solchen sprechen kann, unter zusammengesetzter Beanspruchung ist noch gar nicht näher bekannt. Die Klärung der für die Berechnung der Eisenbetonplatten wichtigen Fragen wäre von der Untersuchung einer homogenen und einer durch Eisenstangen nach zwei zueinander senkrechten Richtungen bewehrten Betonplatte unter gleichmäßig verteilt wirkenden Randmomenten zu erhoffen. Die Beschränkung der Versuche auf einen in statischer Hinsicht einwandfrei definierten Spannungszustand wäre wünschenswert.

Es ist wahrscheintich, daß man dem Verhalten der porösen Betonmasse durch die Annahme einer Poissonschen Zahl $\nu = 0$ Rechnung tragen kann. Die amerikanischen Ingenieure scheinen diese Annahme in ihren Berechnungen der in den Vereinigten Staaten viel ausgeführten durchlaufenden Decken zu benutzen[1]). Wenn man von einem Dimensionsfaktor absieht, nehmen die aus der Theorie für die elastischen Platten entnommenen Spannungsmomente die Form

$$m_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad m_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad m_{xy} = \frac{\partial w^2}{\partial x \partial y}$$

an, mit Hilfe von welchen Formeln in der Erfüllung von statischen Grenzbedingungen gegenüber der gewöhnlichen Theorie eine nicht unbeträchtliche Vereinfachung in der Rechnung zu erwarten ist. Trotz der Unfähigkeit der Betonmasse, Zugspannungen von nennenswertem Betrag aufnehmen zu können, würde man die Betonplatte auf Grund dieser Formeln zuerst als eine homogene und elastische Platte rechnen. Für die Bemessung des zur Verstärkung in die Betonmasse zu versenkenden Gerippes der Eiseneinlagen wären die durch die obigen Formeln gegebenen Momentenflächen als maßgebend zu betrachten. Mit Rücksicht auf statische Gesichtspunkte wären die Eiseneinlagen so zu verlegen, daß sie den Hauptbiegungsrichtungen der homogenen Platte folgen würden. Die auf die Oberfläche der Platte zu beziehende Dichtigkeit der auf den Zugseiten anzubringenden Eisenbündel wäre den Hauptbiegungsmomenten proportional zu setzen. 217

Göttingen, Ende September 1922.

---

[1]) Man vergleiche die zusammenfassende Arbeit von H. M. Westergaard und A. Slater: Moments and stresses in slabs. Proc. of the american concrete Institute, 17, 1921, Nr. 32.

KURZE AUSZÜGE

Baumechanik.

Erweiterung der Clapeyronschen Gleichung. Die Berechnung der Stützenmomente des durchlaufenden Trägers wird bekanntlich durch die zuerst (1855) von Bertot, später (1857) von Clapeyron aufgestellten Gleichungen geleistet, die allgemein als die Clapeyronschen Gleichungen bezeichnet werden. Sie bilden eine Beziehung zwischen den drei Stützenmomenten von zwei aufeinander folgenden Oeffnungen und werden aus der Bedingung gewonnen, daß die elastische Linie stetig verläuft, daß also an der Zwischenstütze die Tangente an die elastische Linie für beide Oeffnungen die gleiche ist. E. Schmidt stellt nun Gleichungen auf, die drei beliebige Stützenmomente M_p, M_r, M_q umfassen, indem er von der bei der Berechnung statisch unbestimmter Systeme üblichen Einführung statisch unbestimmter Hauptsysteme Gebrauch macht. (Der Eisenbau 1922, S. 71 bis 77). Das auf vielen Stützen gelagerte Trägerstück p, r, q wird in die zwei Hauptsysteme p, r und r, q zerlegt mit den Stützenmomenten M_p, M_r und M_q. In Hinblick auf die Stetigkeit der Biegungslinie schließt diese an der Stütze r zu beiden Seiten denselben Winkel mit der Trägerlinie ein und aus diesem Ansatz geht die Momentengleichung

$$M_p\,(\mathfrak{M}_{p+1,\,r}\,l_p) + M_r\,[\mathfrak{M}_{r-1,\,r}\,l_r + 2\,(l_r + l_{r+1}) + \mathfrak{M}_{r+1,\,r}\,l_{r+1}] + M_q\,(\mathfrak{M}_{q-1,\,r}\,l_{q-1}) = L_{r,\,q},$$

hervor, die in gewissem Sinne eine Erweiterung der Clapeyronschen Gleichung vorstellt. l_i ist die Länge der Oeffnung zwischen den Stützen $i-1$ und i, $\mathfrak{M}_{i,\,r}$ ist das Moment am statisch unbestimmten Hauptsystem an der Stütze i infolge der Ursache $M_r = 1$. Die Momente $\mathfrak{M}$ können für die einzelnen Trägerteile mit Hilfe der gewöhnlichen Clapeyronschen Gleichung bestimmt werden. Der Ausdruck $L_{p,\,q}$ enthält den Einfluß der Belastung, der Stützensenkungen und der Temperaturwirkung über die Strecke p, q. — Sind aus diesen Gleichungen die Stützenmomente M_p, M_r u. s. f. gefunden, so werden alle übrigen nach irgend einem Verfahren berechnet, wobei wieder jedes Hauptsystem für sich zu betrachten ist. Diese Methode eignet sich besonders dann, wenn bei vielen Stützen nur einige Stützenmomente gesucht werden.

Zur Berechnung des kontinuierlichen Trägers. Die Stützenmomente sind bei gleichförmig verteilter Vollbelastung eines Feldes leicht bestimmbar, vielfach auch in Tabellen zusammengestellt und es sei z. B. ein Stützenmoment mit $m\,p\,l^2$ gegeben, wobei p die gleichförmig verteilte Belastung pro Längeneinheit, l die Feldlänge und m einen Zahlenfaktor bedeuten. J. Vinzenz zeigt, daß man dann die Stützenmomente, die durch Belastung dieses Feldes mit zur Mitte symmetrischen gleichen Lasten entstehen, ein Fall, der in praxi häufig vorkommt, auf einfache Weise finden kann (Der Bauingenieur 1921, S. 695 bis 698 und vergl. auch 1922, S. 285). Man muß nur die folgenden zwei Eigenschaften der Einflußlinie für das Stützenmoment, d. i. einer kubischen Parabel, beachten. Sie ist innerhalb einer Oeffnung flächengleich mit einer gewöhnlichen Parabel, deren Scheitelordinate gleich der Mittelordinate der kubischen ist. Aus dieser Bedingung ist die gewöhnliche Parabel gegeben. Ferner sind die Differenzen der Ordinaten beider Parabeln in gleichen Abständen von der Mitte entgegengesetzt gleich. Daher ist für zwei zur Mitte symmetrische Einzellasten die Summe der beiden Einflußordinaten gleich der Summe der Ordinaten der gewöhnlichen Parabel an derselben Stelle. Das Stützenmoment erhält man damit in der Form $\alpha\,m\,p\,l^2$, mit α als einem Zahlenfaktor. — Die allgemeine Bedingung für die Gleichwertigkeit zweier Belastungen in einer Oeffnung (hinsichtlich der Stützenmomente) ist die, daß beide Lastangriffe die gleichen Neigungswinkel der Biegungslinie an den Stützen ergeben.

Die Knickfestigkeit eines dünnen Stabes mit elastisch eingespannten Enden. Die Frage der Knickfestigkeit von dünnen Stäben wurde in letzter Zeit mehrfach erörtert und es muß zugegeben werden, daß diese Probleme tatsächlich von eigenartigem Reiz sind. H. Zimmermann, dem diese Aufgaben bereits vieles zu verdanken haben, untersucht in einer neueren Arbeit die Knickfestigkeit eines einteiligen geraden Stabes im Sinne der klassischen Theorie, d. i. unter Zugrundelegung des vereinfachten Ausdrucks für die Differentialgleichung der elastischen Linie (Zentralblatt der Bauverwaltung 1922, S. 34 bis 39). Grundsätzlich neue Erkenntnisse können auf diesem Wege nicht gewonnen werden, aber die Darstellung Zimmermanns ist infolge ihrer Einheitlichkeit von Interesse.

Für einen Stab von der Länge s, der an seinen Enden 1 und 2 elastisch gestützt ist, durch eine Kraft S axial belastet wird und an dessen Enden die Biegungsmomente M_1 bzw. M_2 angreifen, ergibt bekanntlich die Näherungstheorie der elastischen Linie für die Neigungswinkel der Biegungslinie in 1 und 2

$$\nu_1 = \psi' M_1 + \psi'' M_2 + \nu_{1,2}$$
$$-\nu_2 = \psi'' M_1 + \psi' M_2 - \nu_{1,2},$$

wobei $\psi' = \frac{1}{S\,s}\left(1 - \frac{\alpha}{tg\,\alpha}\right)$, $\psi'' = \frac{1}{S\,s}\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} - 1\right)$, $\alpha = s\sqrt{\frac{E\,J}{S}}$. E ist der Elastizitätsmodul des Stabmaterials, J das kleinste Trägheitsmoment der Querschnittsfläche, $\nu_{1,2}$ der Winkel, den

die Stabachse nach der Deformation mit der ursprünglichen Stabrichtung einschließt.

Bei elastischer Einspannung eines Stabendes setzt man das hierdurch entstehende Moment proportional dem Ablenkungswinkel v, also gleich $m\,v$, wo m ein Zahlenfaktor ist und das Einspannungsmoment für den Winkel $v = 1$ vorstellt. Bei positivem (z. B. rechts gedrehtem) v tritt ein negatives (also links drehendes) Einspannungsmoment auf. — Für einen an seinen beiden Enden frei drehbar gelagerten Stab ist $v_{1,2} = 0$. Führt man in diesem Fall $Sf - m_1 v_1$ statt M_1 und $Sf + m_2 v_2$ statt M_2 in die obigen Gleichungen ein, wobei f die Exzentrizität der Längskraft, also Sf das durch die Längskraft bewirkte Biegungsmoment am Stabende ist, so erhält man durch Auflösung eine Gleichung für v_1 und eine Gleichung für v_2. (Zunächst sind zwei Fälle zu unterscheiden: der eine, daß f an beiden Stabenden positiv, der andere, daß f an einem Ende positiv, am andern negativ ist). Die Diskussion der so entstehenden Ausdrücke zeigt: ist die Exzentrizität f gleich Null, so werden mit dem Zähler der erhaltenen Brüche die Neigungswinkel v gleich Null, der Stab bleibt gerade, es gibt nur ein Gleichgewicht der gleichförmigen Zusammenpressung. Wird gleichzeitig auch der beide Male gleiche Nenner Null, so sind v_1 und v_2 unbestimmt, d. h. der Stab knickt aus (im Gedankengang der klassischen Theorie). So erhält man als Knickbedingung

$$0 = (1 + \psi' m_1)\,(1 + \psi' m_2) - \psi''^2 m_1, m_2.$$

Aus dieser Gleichung können nun die Knicklasten für verschiedene Einspannungsgrade m berechnet werden. Die sogen. Eulerschen Knickfälle, der an einem Ende starr eingespannte und am andern frei drehbare Stab, der an beiden Enden frei drehbare Stab und der an beiden Stabenden starr eingespannte Stab ergeben sich jetzt als Sonderfälle. Bei vollständiger Einspannung ist $m = \infty$, bei freier Drehbarkeit ist $m = 0$. Die Knicklasten des an einem Ende starr eingespannten, am andern ganz freien Stabes können aus der angeschriebenen allgemeinen Form der Gleichungen für v_1 und v_2 (die noch den Wert $v_{1,2}$ enthalten) genau so bestimmt werden.

Zimmermann betrachtet in seiner Abhandlung in ähnlicher Weise auch den Einfluß von Walzenlagern auf die Größe der Knicklast, was für die Auswertung von Druckversuchen wichtig ist.

Ueber die Bemessung von Druckstäben. Die frühere preußische Staatsbahnverwaltung — und die gegenwärtige Reichsverkehrsverwaltung bekennt sich zu den gleichen Grundsätzen — gibt als Vorschrift an: »Für Druckspannungen sind die gleichen Zahlen anzuwenden wie für die Spannungen der Zugglieder. Außerdem ist für die Druckglieder nach der Eulerschen Formel eine mindestens fünffache Sicherheit gegen Knicken nachzuweisen.« Im unelastischen Bereich wird heute vielfach nach den empirischen Formeln von v. Tetmajer gerechnet, die z. B. bei Flußeisen für ein Verhältnis $l : i \leqq 105$ (freie Stablänge durch Trägheitsradius der Querschnittsfläche) für die Knickspannung den Wert $3{,}14 - 0{,}0114\frac{l}{i}$ t/cm² setzen, während die obigen Bestimmungen für ungefähr $\frac{l}{i} < 65$ einen konstanten Wert vorsehen. F. Bohny berichtet über ausgeführte Versuche und verteidigt an Hand derselben die oft angefochtenen Vorschriften (Der Bauingenieur 1922, S. 135 bis 141). Bei gegliederten Stäben liegt die Aufgabe so, daß man durch sachgemäße Konstruktion möglichst die Wirkung eines einteiligen Stabes zu schaffen sucht. An Versuchen, die von F. Voß im Materialprüfungsamt Lichterfelde ausgeführt wurden (vergl. Der Bauingenieur 1922, S. 8 bis 11) und an Versuchen des Deutschen Eisenbau-Verbandes zeigt Bohny, daß dies bei zweckmäßiger Ausbildung tatsächlich erreichbar ist. Daß aber nur der sogen. gesunde Sinn des erfahrenen Konstrukteurs allein imstande sei, diese Aufgabe zu lösen und daß weiter der Hamburger Stab vom eingestürzten großen Gasbehälter nur Verwirrung in die Knickfrage gebracht habe, kann nicht zugegeben werden. Die seinerzeit an den Einsturz geknüpften Erörterungen (vergl. die Aufsätze in Der Eisenbau 1911) waren entschieden für das Problem von Bedeutung und haben nur aufklärend gewirkt. Bei der Abhängigkeit der Knicklast gegliederter Stäbe von so vielen Variabeln (Profil, Vergitterung, Bindebleche, Vernietung usw.) ist auch die Ausführung von systematischen Versuchen, die sich nicht auf theoretische Erwägungen stützen, unmöglich und es blieben alle Experimente mehr oder weniger dem Zufall überlassen. Und der »gesunde Sinn« des praktischen Konstrukteurs entsteht eben erst durch wiederholtes richtiges Konstruieren auf Grund theoretischer Erkenntnisse.

Die **Berechnung der Spannungen eines durch eine Längskraft beanspruchten Eisenbetonbalkens,** der in seiner Symmetrieachse von der Kraftwirkung ergriffen ist, wird in Deutschland gewöhnlich so vorgenommen, daß man das Biegungsmoment der Längskraft auf den Schwerpunkt der vorhandenen Beton- und Eisenflächen bezieht. Wenn das Biegungsmoment und die Normalkraft gegeben sind, ist also mit dem Hebelarm der Längskraft auch ihr Abstand vom bekannten Schwerpunkt festgelegt. (Die Berücksichtigung einer durch die Längskraft entstehenden Ausbiegung ist infolge der immer großen Querschnittsabmessungen keinesfalls erforderlich). Bei stärkeren Beanspruchungen (dem sogen. Stadium IIb in der Eisenbetonliteratur) ist die Betonzugzone unwirksam und es wird rechnungsmäßig auf der Druckseite eine lineare Spannungsverteilung angenommen. Jetzt ist auch der Schwerpunkt des wirksamen Querschnitts ein anderer. V. Loup berechnet die auftretenden Eisen- und Betonspannungen eines doppelt bewehrten Balkens mit Rechtecksquerschnitt derart, daß er das Biegungsmoment auf diesen noch unbekannten Schwerpunkt bezieht, der erst von der Höhe der sich aus der Rechnung ergebenden Druckzone abhängt

(Le Génie Civil 1922, S. 154 bis 157). Dies kann natürlich nur durch allmähliche Annäherung erfolgen. (Vgl. hierzu auch die Erörterungen zwischen B. Löser und E. Mörsch in Beton u. Eisen 1915 und in Armierter Beton 1919). Loup gibt zur Vereinfachung der Rechnung eine sinnreiche nomographische Darstellung. Es wäre sehr von Vorteil, wenn auch bei uns bei vielen Aufgaben der praktischen Technik die Nomographie die ihr gebührende Beachtung fände.

Bei der **Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke** ist es eine wesentliche Aufgabe, geschickt das Hauptsystem zu finden, um die Ueberzähligen möglichst einfach bestimmen zu können. Doeinck wählt das Hauptsystem mit Hilfe des sogenannten elastischen Pols (Beton und Eisen 1922, S. 33 bis 35 und S. 43 bis 46). Wird irgend ein Punkt eines Stabzugs durch ein Moment beansprucht, so gibt es einen zugeordneten Punkt, den »elastischen Pol«, der keine Lagenänderung erfahren hat. Ebenso kann man auch umgekehrt nach dem Satz von Betti aussagen, daß eine im Pol angreifende Kraft im ursprünglichen Punkt kein Moment, sondern nur eine Verschiebung hervorruft. So erzeugt eine senkrechte Kraft 1 im Pol die senkrechte Komponente der Verschiebung $\delta_{v,v}$, eine wagrechte Kraft 1 die wagrechte Komponente der Verschiebung $\delta_{h,h}$ im Tragwerkpunkt. Für jede durch den Pol gehende Kraft gibt es eine zugeordnete Richtung, in der keine Verschiebung auftritt. Es bestehen nun für den Pol zwei aufeinander senkrechte Achsen, für welche die Werte $\delta_{v,v}$ und $\delta_{h,h}$ zu je einem Maximum werden. Die Verschiebungen für eine Kraft 1 in Richtung dieser sogenannten Hauptachsen und die Winkelverdrehung des Tragwerkspunkts für ein im Pol angreifendes Moment 1 sind »die Grundwerte« des Poles. Durch Lage und Grundwerte ist er eindeutig festgelegt. Die Anwendung ergibt sich in der folgenden Weise.

Bei einem beiderseits eingespannten (dreifach statisch unbestimmten) Bogen wird als (statisch bestimmtes) Hauptsystem der an einem Kämpfer eingespannte Bogen gewählt. Für den anderen Kämpferpunkt wird der Pol bestimmt und im Pol die zur Senkrechten zugeordnete Richtung. Das dort wirkende Moment und die Komponenten der Auflagerkraft in Richtung dieser beiden zugeordneten Achsen sind drei voneinander unabhängige Größen. — Geht eine Kraft durch die Pole zweier Punkte eines Tragwerks, so ruft sie in keinem der beiden Punkte ein Moment hervor. Beim beiderseits eingespannten Bogen kann man also auch so vorgehen, daß man die Pole a', b' der beiden Kämpferpunkte a und b als Kämpfer des Hauptsystems wählt. Und zwar bestimmt man a', indem man den Bogen in b eingespannt, in a frei gelagert annimmt, b' indem man ihn als in a eingespannt und in b frei gelagert betrachtet. Dadurch wird die in die Richtung a', b' fallende Komponente der Auflagerreaktion unabhängig von den Momenten in a und b und somit das Hauptsystem des Bogens der beiderseits eingespannte Balken. Die überzählige Kraft in Richtung $a'\,b'$ ist von den Ueberzähligen des Hauptsystems unabhängig. — Haben zwei Systeme einen gemeinsamen Pol und für diesen gleiche elastische Grundwerte, so sind sie in bezug auf den Pol und die in diesem zugeordneten Punkte gleichwertig. Man kann sonach, wenn man einen Stab eines Stabwerks betrachtet, an Stelle der andern irgend ein Gebilde setzen, wenn es nur inbezug auf den Anschlußpunkt den gleichen Pol und die gleichen Grundwerte hat. Man wählt z. B. einen an einem Ende eingespannten parabelförmigen Träger, der mit seinen Abmessungen so bestimmt werden kann, daß diese Bedingungen erfüllt sind. Doeinck untersucht als ausführliches Beispiel für dieses Verfahren den durchlaufenden Bogenträger.

Die **Berechnung eines symmetrischen Stockwerkrahmens** bei horizontalen, in den Knotenpunkten angreifenden Kräften gibt J. Pirlet (Der Bauingenieur 1922, S. 18 bis 20). Bei n Geschossen ist das System $3n$fach stereostatisch unbestimmt, im untersuchten Sonderfall erniedrigt sich die Anzahl der Unbekannten auf n. In der Mitte jedes Querriegels ist das Biegungsmoment gleich null, es kann also diese Stelle als ein Gelenk angesehen werden. Pirlet bildet jetzt das Hauptsystem, indem er in die Fußpunkte der Ständer Gelenke einlegt, womit eine Kette von Dreigelenkbogen entsteht. Ueberzählige sind die an den Fußpunkten der Ständer angreifenden paarweise gleichen Momente in der Anzahl n. Mit diesem Grundsystem gestaltet sich die Rechnung sehr einfach. Die Koeffizienten der Ueberzähligen in den Elastizitätsgleichungen sind leicht bestimmbar, da im Hauptsystem die Momente eines Geschosses nur mit denen des darunter und darüber liegenden Geschosses zu kombinieren sind. Die Elastizitätsgleichungen werden rekurrente Gleichungen mit je drei Unbekannten (nach Art der Gleichungen Clapeyrons beim kontinuierlichen Träger) und können nach bekannten Methoden aufgelöst werden. 186

J. Ratzersdorfer.

KLEINE MITTEILUNGEN

Ein rechnerisch-zeichnerisches Verfahren für parabolische Ausgleichung. Bekannt sind folgende Tatsachen der linearen Ausgleichung von Beobachtungen: Liegen zwischen zwei Veränderlichen x und y n Beobachtungspaare x_ν, y_ν ($\nu = 1, 2 \ldots n$) vor und wird die eine Veränderliche (x) als fehlerfrei beobachtet angesehen, so ist die die „beste“ lineare Ausgleichung darstellende Gerade

$$y = \alpha + \beta x \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

der zur y-Achse konjugierte Durchmesser der

Zentralellipse des Beobachtungsbildes. Ihre Parameter sind leicht zu berechnen, die Gerade kann aber auch, wie ich an anderer Stelle gezeigt habe, nach einer graphostatischen Methode konstruktiv bestimmt werden [1]). Das Maß der Zuverlässigkeit dieser Geraden (vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitstheorie) als Ausdruck des tatsächlich als bestehend angenommenen linearen Gesetzes kann man durch eine Schar von „Fehlerhyperbeln" kennzeichnen [2]).

Für den Fall, daß zwischen den beiden Veränderlichen x, y ein durch die Gleichung

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

gekennzeichneter parabolischer Zusammenhang besteht oder angenommen wird, hat H. M. Roeser unter der Voraussetzung, daß die fehlerfrei bestimmte Veränderliche x stets um gleiche Intervalle i fortschreitet, ein einfaches Berechnungsverfahren für die Parameter angegeben, das noch durch eine tabellarische Zusammenstellung der bei den Beobachtungszahlen $n = 5$ bis 31 auftretenden Koeffizienten erleichtert wird. Die Tafeln und die angegebenen Schlußformeln ermöglichen die schnelle Berechnung der Parameter sämtlicher parabolischer Funktionen zweiten Grades und der allgemeinen linearen Funktion [3]). H. Schwerdt hat das entsprechende Verfahren auf die allgemeinste parabolische Funktion dritten Grades ausgedehnt und eine Zahlentafel angegeben, die die für die Berechnung der allgemeinsten Parabel zweiter und dritter Ordnung notwendigen Koeffizienten enthält [1]).

In sehr vielen Fällen der Praxis wird es weniger auf eine genaue zahlenmäßige Berechnung der Parameter des Zusammenhanggesetzes als auf dessen möglichst verläßliche bildliche Darstellung ankommen. Auch wird der anschauliche Vergleich, inwieweit eine Gerade und inwieweit eine Parabel zweiter Ordnung als Bild des Zusammenhanges der beiden Veränderlichen zutrifft, sehr erwünscht sein.

Wird der Schwerpunkt S des Beobachtungsbildes als Ursprung des Koordinatensystems gewählt und schreitet die fehlerfrei bestimmte Veränderliche x um konstante Intervalle i fort, so ist

$$\Sigma x = 0, \quad \Sigma y = 0, \quad \Sigma x^3 = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

und die zur Bestimmung der Parameter des Gesetzes (2) dienenden Normalgleichungen lauten

$$\left.\begin{aligned} a_0 n \qquad\qquad + a_2 \Sigma x^2 &= 0 \\ a_1 \Sigma x^2 \qquad\qquad &= \Sigma xy \\ a_0 \Sigma x^2 \qquad + a_2 \Sigma x^4 &= \Sigma x^2 y \end{aligned}\right\} \quad (4).$$

Sie ergeben bei Berücksichtigung der bekannten Summenformeln für Potenzreihen [2])

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= -\frac{15}{4n(n^2-4)}\left\{(n-1)^2(y_1+y_n)+(n-3)^2(y_2+y_{n-1})+(n-5)^2(y_3+y_{n-2})+\ldots\right\} \\ a_1 &= +\frac{6}{n(n^2-1)i}\left\{(n-1)(y_n-y_1)+(n-3)(y_{n-1}-y_2)+(n-5)(y_{n-2}-y_3)+\ldots\right\} \\ a_2 &= +\frac{45}{n(n^2-1)(n^2-4)i^2}\left\{(n-1)^2(y_1+y_n)+(n-3)^2(y^2+y_{n+1})+(n-5)^2(y_3+y_{n-2})+\ldots\right\} \end{aligned}\right\} \quad (5).$$

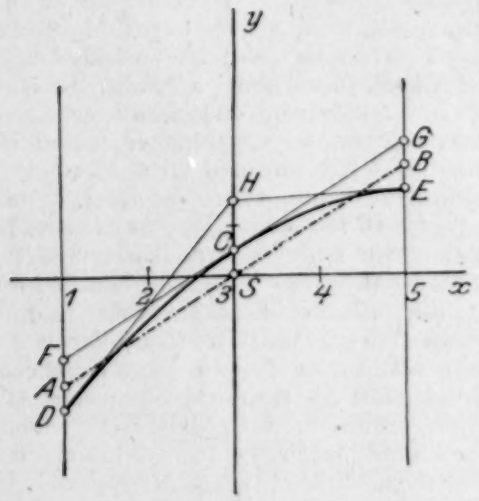


Abb 1

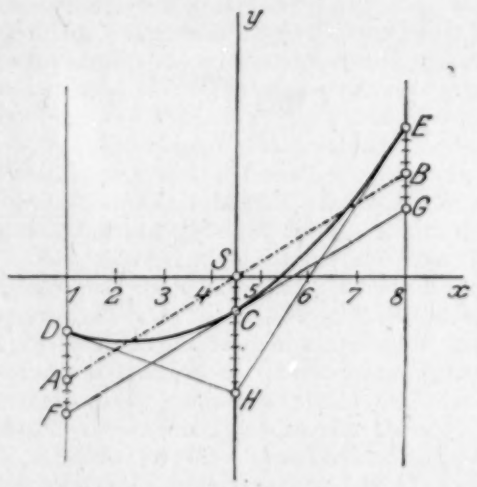


Abb. 2

[1]) A. Basch, Mitteilungen des k. k. Technischen Versuchsamtes Wien, 1. 1912, 2. H. S. 25 bis 30 und 3. H. S. 32 bis 41. Oesterr. Zeitschr. für Vermessungswesen 11, 1913, S. 11 bis 18 und S. 42 bis 46.

[2]) A. Basch, Sitzungsberichte d. Akad. Wien, 123, Abt. IIa, 1914, S. 1659 bis 1678.

[3]) H. M. Roeser, Scientific papers of the Bureau of Standards, Washington, Nr. 388, 1920, S. 363 bis 375.

[1]) H. Schwerdt, Physikal. Zeitschr. 22, 1921, S. 312 bis 315.

[2]) Siehe H. M. Roeser, loc. cit.; H. Schwerdt, loc. cit. Vergl. auch Auerbach und Rothe, Taschenbuch, 3. Jahrg., 94, 96, 64, 1913; O. Th. Bürklen, Formelsammlung, Sammlung Göschen, Nr. 51, 1912, S. 30 und 31. Die daselbst angegebene Summenformel für arithmetische Reihen höherer Ordnung ist auf Potenzreihen ohne weiteres anwendbar.

Hierbei werden die Reihen in den geschlungenen Klammern so lange fortgesetzt, als die veränderlichen Zahlen in den runden Klammern positiv bleiben. Damit ist die gestellte Aufgabe rechnungsmäßig — und zwar sowohl für ungerade als auch für gerade Beobachtungszahlen n — gelöst. Die erste der drei Normalgleichungen (4) gibt schon den Zusammenhang

$$a_2 = -\frac{n}{\Sigma x^2} a_0 = -\frac{a_0}{r_x^2} \quad \ldots\ldots (6),$$

wobei r_x den durch

$$r_x^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} = \frac{1}{12}(n^2-1)\,i^2 \quad \ldots (7)$$

definierten Trägheitsradius des Beobachtungsbildes in bezug auf die y-Achse bedeutet.

Die Gleichung

$$\mathfrak{y} = a_1 x \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

gibt gleichzeitig das vorteilhafteste Gesetz des linearen Zusammenhanges der beiden Veränderlichen. Aus der Ableitung der Gleichung (2) nach x

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x \quad \ldots\ldots (9)$$

ist zu ersehen, daß für $x = 0$, d. h. im Punkte C der Abbildungen, die Tangente FG an die das Gesetz des Zusammenhanges darstellende Parabel DCE zu der das vorteilhafteste lineare Gesetz darstellenden Geraden AB parallel ist.

Durch den Parameter $a_0 = \overrightarrow{SC}$ ist der Punkt C der Parabel bereits gegeben. Mit seiner Hilfe und mit Hilfe der Geraden AB können leicht die Punkte, die zu zwei dem Absolutbetrage c nach gleichen Abszissen gehören, und die Tangenten in ihnen gefunden werden. Als c wird am vorteilhaftesten der äußerste Wert der beobachteten Abszissen x gewählt, also

$$c = \frac{1}{2}(n-1)\,i \quad \ldots\ldots (10).$$

Es ist

$$\mathfrak{y}_{\pm c} = \pm a_1 c \ (11), \quad y_{\pm c} = a_0 \pm a_1 c + a_2 c^2 \ (12).$$

Daher ist

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{EB} = \mathfrak{y}_{\pm c} - y_{\pm c} = -(a_0 + a_2 c^2)$$
$$= \left(\frac{c^2}{r_x^2} - 1\right) a_0 = \frac{n-2}{n+1} \cdot 2a_0 \quad .. \quad (13)$$

und liegt, da n die ganzzahligen Werte von drei (bestimmter Grenzfall) bis Unendlich annehmen kann, im Gebiete von $\frac{1}{2}a_0$ bis $2a_0$. Im Grenzfall $n = \infty$ wird der Ausdruck (13) zu $2a_0$, d. h. Parabel- und Linear-Approximation geben zwischen den Endordinaten die Fläche Null über der x-Achse.

Der Schnittpunkt der im Punkte x, y an die Parabel (2) gelegten Tangente mit der y-Achse besitzt die Ordinate

$$\eta = y - x\frac{dy}{dx} = a_0 - a_2 x^2 = \left(\frac{x^2}{r_x^2} + 1\right) a_0 \ (14),$$

also für $x = \pm c$

$$\eta_{\pm c} = \overrightarrow{SH} = a_0 - a_2 x^2 = \left(\frac{c^2}{r_x^2} + 1\right) a_0$$
$$= \frac{2n-1}{n+1} \cdot 2a_0 \quad \ldots\ldots (15),$$

schwankt daher zwischen $\frac{5}{2}a_0$ und $4\,a_0$.

Schließlich ist

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{CH} = \frac{c^2}{r_x^2} a_0 = \frac{3(n-1)}{n+1} a_0 \quad (16)$$

und schwankt je nach dem Werte von n zwischen $\frac{3}{2}a_0$ und $3\,a_0$. Somit schwanken alle drei Strecken um den gleichen Betrag $\frac{3}{2}a_0$

Der Abb. 1 ist der Fall von $n = 5$ Beobachtungen zugrunde gelegt (das ist die einzige endliche Beobachtungszahl, bei der die drei Strecken zu a_0 in ganzzahligem Verhältnis stehen). Es ist

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{EB} = a_0, \qquad \overrightarrow{SH} = 3\,a_0,$$
$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{CH} = 2\,a_0.$$

Die Abb. 2 entspricht der Beobachtungszahl $n = 8$. Hier ist

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{EB} = \frac{4}{3}a_0, \qquad \overrightarrow{SH} = \frac{10}{3}a_0,$$
$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{CH} = \frac{7}{3}a_0.$$

Ist a_0 positiv, so ist a_2 negativ, die Parabel konkav nach unten (Abb. 1); ist a_0 negativ, so ist a_2 positiv, die Parabel konkav nach oben (Abb. 2).

Zusammenfassung.

Hat man die das vorteilhafteste lineare Gesetz veranschaulichende Gerade gezeichnet und die Ordinate des Parabelpunktes für die Abszisse des Schwerpunktes des Beobachtungsbildes gerechnet (das ist, wenn dieser Schwerpunkt als Ursprung des Koordinatensystems gewählt wurde, der Parameter a_0 der Parabel), so kann man leicht die zwei äußersten Punkte der Parabel mit ihren Tangenten gewinnen und daraus — soweit nötig — beliebige Tangenten der Parabel samt ihren Berührungspunkten nach bekannten geometrischen Methoden erhalten. 193

Wien, im Mai 1922. A. Basch.

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr. EMANUEL **CZUBER,** o. ö. Prof. an der Techn. Hochschule in Wien, Wahrscheinlichskeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. Zweiter Band: Mathematische Statistik, Mathematische Grundlagen der Lebensversicherung. Dritte durchgesehene Aufl. Mit 34 Figuren im Text. B. G. Teubner, Leipzig. Berlin 1921. X + 470 S.

Die vorliegende dritte Auflage des zweiten Bandes ist ein anastatischer Neudruck der zweiten Auflage. Damit liegt die dritte Auflage des ganzen, vielfach bekannten und geschätzten Gesamtwerkes abgeschlossen vor. Auf den sachlichen Inhalt des Buches einzugehen wird hoffentlich bald Gelegenheit sein, sobald der Verfasser in die Lage versetzt ist, bei einer drucktechnisch freien Neuauflage seines Werkes den inzwischen eingetretenen Neuerungen und Veränderungen auf den behandelten Gebieten Rechnung zu tragen. Mises. 211

NACHRICHTEN

Gründung einer deutschen Ingenieurwissenschaftlichen Vereinigung. Im Verfolg der Bestrebungen, von denen an dieser Stelle wiederholt die Rede war[1]), ist anschließend an den Leipziger Naturforschertag am 21. September d. Js. in einer Versammlung von Vertretern der Ingenieurwissenschaften, der Mechanik und der angewandten Mathematik eine Gesellschaft gegründet worden, deren Aufgabe die Pflege und Förderung der Forschung auf allen den Ingenieurwissenschaften zuzuzählenden Teilgebieten der Mathematik und Physik ist. Der Verlauf der, wie wir hoffen, für die Weiterentwicklung der deutschen Technik nicht bedeutungslosen Sitzung war folgender. Herr Prandtl-Göttingen, der zum Vorsitzenden gewählt worden war, legte in wenigen Worten die unmittelbare Veranlassung der Neugründung dar. Es sei notwendig, zu der jährlichen Naturforscherversammlung für die Vorbereitung und Durchführung von Vorträgen auf den bezeichneten Grenzgebieten eine feste Organisation zu schaffen, die mit der Leitung der Naturforschertage und den nahestehenden Gesellschaften über die Tagesordnung usf. verhandeln könne. Dabei bestehe nicht die Absicht, durch Bildung einer neuen Abteilung eine weitere Zersplitterung herbeizuführen, sondern es solle versucht werden, wie bisher, im Rahmen der Abteilungen 1 und 3 (Mathematik bezw. Technische Physik) zu verbleiben. Ueber diesen nächsten Zweck hinaus würde eine Vereinigung zur Förderung der theoretischen Ingenieurwissenschaften eine Lücke ausfüllen, die seit mehreren Jahren von einer großen Zahl wissenschaftlich tätiger Ingenieure lebhaft empfunden wird. Nachdem dann die Herren Scheffers, Hamel und Rothe-Charlottenburg mannigfachen Bedenken gegen die beabsichtigte Neugründung Ausdruck gegeben hatten, wurde auf Antrag von v. Mises-Berlin die Gründung der Gesellschaft mit Stimmenmehrheit beschlossen. Ein weiterer Antrag, Beitrittserklärungen sofort entgegenzunehmen und von jedem Beitretenden einen vorläufigen Gründungsbeitrag von M 50 einzuheben, erledigte sich dadurch, daß 26 von den Anwesenden sich in eine Beitrittsliste eintrugen und den Beitrag leisteten. Lebhafte Aussprache knüpfte sich an den Antrag, die neue Vereinigung in ein organisches enges Verhältnis zum V. d. I. zu bringen (etwa wie die Gesellschaft für Metallkunde), um auf diese Weise die Geschäftsführung zu erleichtern und zu vereinfachen. Entgegen Einwendungen der Herren Hamel und Rothe wurde mit Stimmenmehrheit in diesem Sinne beschlossen. Zur Ausarbeitung eines Satzungsentwurfes und zur Vorbereitung der nächsten Jahresversammlung wurde ein vorläufiger Ausschuß eingesetzt, bestehend aus den Herren Prandtl-Göttingen als Vorsitzender, v. Mises-Berlin als Geschäftsführer, sowie den Herren Emde-Stuttgart, Gehler-Dresden, Hamel-Berlin, Knoblauch-München, Reissner-Berlin, Trefftz-Dresden. Auch über den endgültigen Namen, den die Vereinigung führen wird, soll der Ausschuß zugleich mit dem Satzungsentwurfe einen Vorschlag auf der nächstjährigen Tagung vorlegen.

[1]) Bd. 1, 1921, S. 420; Bd. 2, 1922, S. 322.

Leipziger Naturforschertag September 1922. Die Vertreter der angewandten Mathematik und Mechanik können auch in diesem Jahre auf eine erfolgreiche Tagung, deren wissenschaftlicher Verlauf befriedigend war, zurückblicken. Die Reihe der Fachsitzungen wurde eröffnet durch eine Sitzung der Abteilung 3 (Technische Physik) am 19. September nachmittags. Der Vorsitzende, Herr Prandtl-Göttingen, wies in einer kurzen Ansprache darauf hin, daß vom kommenden Jahr an die Vertreter der ingenieurwissenschaftlich gerichteten Fächer sich in einer besonderen Organisation zusammenschließen werden, dabei aber die bisherige enge Fühlung mit den bestehenden Abteilungen 1 und 3 des Naturforschertages nicht aufgeben wollen. Hr. Berndt-Berlin berichtet über die z. T. von ihm ausgearbeiteten exakten Methoden zur Nachmessung von Schraubengewinden. Die besten Messungen beruhen auf optischen Verfahren, wobei ein von Zeiß hergestelltes Instrument den Meßfehler auf 10 μ herabzusetzen gestattet. Größere Genauigkeit ist nicht zu erreichen, da die Parallelität der Flanken des Gewindes nicht besser ist. Hr. Zeißig-Darmstadt führt ein Zeichengerät vor, das ermöglicht, zwei harmonische Schwingungen beliebiger Amplitude und Frequenz zusammenzusetzen. Hr. Schieferstein-Berlin zeigt an mehreren Beispielen, z. T. unter Vorführung von Apparaten, wie man durch Ausnutzung prinzipieller Eigenschaften der Schwingungsvorgänge den Nutzeffekt hin -und hergehender Massen verbessern kann. Unter anderm wird eine zweipendelige Uhr vorgeführt, bei der das zweite Pendel zur Regulierung des ersten dient und dadurch eine außerordentlich hohe Gleichmäßigkeit des Ganges herbeiführt. Hr. Schmaltz-Offenbach a. M. führt einen handlichen Apparat vor, der dazu bestimmt ist, periodische Erschütterungen oder Schwingungen an Maschinenteilen u. dergl. aufzunehmen und zu registrieren. Der Apparat besteht aus einem Mikrophon, einem Saitengalvanometer und einer photographischen Kamera. Hr. Wolff-Wien berichtet über die von Griffith herrührende Theorie der Zerreißfestigkeit, die einen Zusammenhang zwischen der Oberflächenspannung eines Körpers und seiner Zerreißgrenze herstellt. Der Vortrag, der eine neue Begründung und Erweiterung der Griffithschen Theorie enthält, wird in dieser Zeitschrift demnächst erscheinen. Hr. Schmidt-

München berichtet über Theorie und Versuche betr. Fundamentschwingungen von Maschinen. Die dem Vortrag zugrundeliegende Forschungsarbeit wird in dieser Zeitschrift veröffentlicht werden. Hr. Hundhausen-Dresden gibt an Hand zahlreicher Modelle und zeichnerischer Darstellungen eine Uebersicht über die von Reulaux vor mehreren Jahrzehnten geschaffene Zwanglauflehre, deren weiteren Ausbau er sich zur Aufgabe gemacht hat.

Sitzung der Abteilung 1 am 21. September vormittags. Der Vorsitzende, Hr. v. Mises-Berlin, begrüßt die auf besondere Einladung des vorbereitenden Ausschusses für angewandte Mathematik erschienenen Gäste und dankt der Deutschen Mathematiker-Vereinigung für das der »angewandten Richtung« bisher bewiesene Entgegenkommen, das nach der bevorstehenden Gründung der »Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik« in ein dauernd-freundschaftliches Verhältnis übergehen soll. Hr. Runge-Göttingen eröffnet die Reihe der Vorträge mit einer Mitteilung über ein von ihm gefundenes zeichnerisches Verfahren, das die Bestimmung der Bahnkonstanten von Planeten in einfacher Weise ermöglicht. Das Verfahren beruht auf der Abbildung von Raumvektoren auf die Massenpunkte der Ebene (baryzentrischer Kalkül) und liefert die gesuchten Größen durch einen der Nomographie verwandten Vorgang, wobei sich die Genauigkeit durch Verfeinerung des Maßstabes beliebig steigern läßt. In der Aussprache gibt Hr. Runge auf Wunsch von Hrn. Bauschinger-Leipzig und Oppenheim-Wien nähere Auskunft über die praktisch erzielbaren Genauigkeitsgrenzen. Hr. Reißner-Berlin entwickelt in einem Vortrag die Grundgleichungen dünner elastischer Schalen, macht Angaben über deren Integration und zeigt, wie sich auf diesem Wege praktisch wichtige Probleme der Baumechanik lösen lassen. Der Vortrag soll in dieser Zeitschrift veröffentlicht werden. Großem Interesse begegnet auch der Vortrag von Hrn. Nádai-Göttingen über die exakte Theorie elastischer Platten und ihre Bestätigung durch Versuche. Der Vortragende hat in mehreren eigenen Arbeiten die mathematische Theorie auf diesem Gebiete in mannigfachen Punkten ergänzt und berichtet jetzt zugleich über Versuche mit Glas- und Stahlblechplatten, die er in der Göttinger Versuchsanstalt durchgeführt hat. Der Vortrag erscheint an anderer Stelle dieses Heftes in erweiterter Form.

In der Fortsetzung der Sitzung unter Vorsitz von Hrn. Reißner spricht zunächst Hr. Hopf-Aachen über Ergebnisse von Versuchen im aerodynamischen Laboratorium Aachen, die den Begriff der Rauhigkeit von hydraulischen Leitungen zu klären bestimmt waren. Es hat sich herausgestellt, daß die Charakterisierung der Wandrauhigkeit durch eine einzige Zahl (relative Rauhigkeit nach v. Mises) nur als erste Annäherung gelten kann. Im übrigen scheinen die Versuche zu ergeben, daß die Widerstandszahl, entgegen der heute vielfach gemachten Annahme eines Potenzgesetzes, bei großen Geschwindigkeiten einem konstanten Grenzwert zustrebt. Hr. Waelsch-Brünn legt in anschaulicher Weise die letzten Resultate langjähriger Forschungen auf dem Gebiete der höheren Vektoranalysis dar. Er zeigt, wie man durch genügend weitgehende Abstraktion und Herausschälen des wahren Kerns aller Operationen der geometrischen Analyse schließlich zu einem axiomatisch aufgebauten System von größter Einfachheit gelangen kann, das er die »Analyse der reinen Form« nennt. Ein gewisser Bestandteil dieser Untersuchungen wird demnächst in dieser Zeitschrift erscheinen.

Sitzung der Abteilung 1 am 21. September 1922 nachmittags, unter Vorsitz von Hrn. Blumenthal-Aachen. Hr. Trefftz-Dresden berichtet über einen schönen Fortschritt, den er in der Anwendung der Integralgleichungstheorie auf die für Schwingungsprobleme wichtige Frage der Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen erzielt hat. Danach ist es möglich, die Entwicklungsbedingungen gegenüber den bisherigen so einzuschränken, daß ihr physikalischer Sinn unmittelbar einleuchtet. Hr. Sternberg-Heidelberg macht eine kurze Mitteilung über die Tragweite des Verfahrens asymptotischer Integration auf das von Hrn. Trefftz behandelte Problem der Entwicklung willkürlicher Funktionen. Großes Interesse findet der Vortrag von Hrn. Tietze-Erlangen über Mathematisches zur Vererbungslehre. Der Vortragende zeigt, wie sich mit elementaren mathematischen Hilfsmitteln aus dem bekannten Mendelschen Gesetz der Vererbung exakte Schlüsse auf die Zusammensetzung einer Population nach beliebig viel Generationen ziehen lassen. Der Vortrag wird in dieser Zeitschrift demnächst erscheinen.

Prüfungsordnung für die Mathematiklehrer an höheren Schulen. In der ersten Hauptversammlung des mathematischen Reichsverbandes, die im Vorjahre in Jena stattfand, war auf Antrag von Hrn. Bieberbach-Berlin einstimmig beschlossen worden, innerhalb des Reichsverbandes einen Entwurf für eine neue Prüfungsordnung für die Lehramtsprüfung der Mathematik auszuarbeiten. Zu diesem Zweck wurde ein Ausschuß eingesetzt, dem der Vorsitzende des Reichsverbandes, Hr. Hamel, als Vorsitzender, ferner die Herren Bieberbach, v. Mises, Rothe und Zacharias angehörten. Der Ausschuß hat im Laufe des Jahres vielfach getagt und seine Entwürfe wiederholt einem größeren Kreis von Fachleuten zur Beurteilung und Stellungnahme vorgelegt. Völlige Einigkeit wurde hinsichtlich des Hauptgedankens des neuen Entwurfs erzielt. Dieser besteht darin, daß in Hinkunft nur eine einzige Fakultas

für Mathematik schlechthin bestehen soll, so daß das bisherige besondere Zusatzfach »angewandte Mathematik« wegfällt. Dafür soll die Lehrbefähigung der Mathematik als Hauptfach auf zweierlei verschiedenen Ausbildungs- und Prüfungswegen erworben werden können, von denen der eine der reinen Mathematik, der andere der angewandten Mathematik angehört. Nach einem bestimmten, für beide Richtungen gemeinsamen Minimum an Forderungen gabelt sich die Prüfung je nach Wunsch des Kandidaten nach der reinen oder angewandten Seite. Im letzteren Fall wird Beherrschung der für die Anwendung wichtigsten Teile der Analysis, insbesondere ihrer rechnerischen, zeichnerischen und instrumentellen Verfahren gefordert, Kenntnis der darstellenden Geometrie, der Mechanik (einschließlich graphischer Statik und Kinematik), der Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung; tiefer eindringende Studien auf mindestens einem Anwendungsgebiet, so daß der Kandidat imstande ist, eine angemessene Aufgabe aus diesem Gebiet selbständig zu bearbeiten; endlich Vorlage bescheinigter Zeichnungen und Uebungsblätter aus der Studienzeit.

Heftige Meinungsverschiedenheit bestand innerhalb des Ausschusses hinsichtlich eines Zusatzes zu diesen Forderungen, der von einem Teil der Ausschußmitglieder gewünscht wurde. Der in der Sitzung des Reichsverbandes in Leipzig am 22. September von Hrn. Hamel vertretene Standpunkt der Mehrheit des Ausschusses geht dahin, daß von dem Kandidaten der Mathematik, der seine Prüfung nach der angewandten Richtung zu erstrecken wünscht, außerdem noch der Nachweis einer praktischen Betätigung gefordert wird, beispielsweise bei geodätischen Uebungen im Gelände, in einem elektrotechnischen oder Maschinenlaboratorium od. dergl. Während eine derartige Forderung ursprünglich von fast allen Universitätslehrern als nicht zur Sache gehörig völlig abgelehnt wurde, vertrat in der genannten Sitzung Hr. v. Mises im Namen der Minderheit des vom Reichsverband eingesetzten Ausschusses einen Kompromißvorschlag. Nach diesem soll von jedem Kandidaten der angewandten Richtung verlangt werden, daß er entweder zugleich die Lehrbefähigung für Physik besitzt (bei deren Erlangung er ein genügendes Ausmaß physikalisch-technischer Bildung nachweisen soll) oder den Nachweis praktischer Betätigung auf einem nicht-physikalischen Anwendungsgebiet, z. B. bei geodätischen Uebungen im Gelände, erbringt. Dieser Vorschlag soll vor allem dem Gesichtspunkt Rechnung tragen, daß Betätigung in einem physikalisch-technischen Praktikum keinen Bildungswert für einen Mathematiker besitzt, der nicht zugleich physikalischen Studien obliegt; durch eine sprunghafte Verknüpfung mathematischer Vorlesungen mit praktischer Tätigkeit in einem Maschinenlaboratorium oder dergl. würde lediglich ein gewisser Dilettantismus großgezogen. Nach Erstattung der beiden Referate sprach Hr. Schoenflies-Frankfurt a/M. als Vorsitzender der Deutschen Mathematiker-Vereinigung im Namen dieser Vereinigung sich auf das Entschiedenste für den Kompromißvorschlag aus. Hr. Rothe-Berlin meinte, daß die Gegensätze nicht so schwerwiegende seien, daß ein Ausgleich innerhalb des Ausschusses nicht noch erhofft werden könnte. Angenommen wurde ein von Hrn. Schlesinger-Gießen gestellter Vertagungsantrag, mit dem zugleich der Reichsverband ersucht wird, vor Abschluß seiner Arbeiten mit den nichtpreußischen Hochschulen und Prüfungsämtern in Fühlung zu treten.

S. Finsterwalder. Am 4. Oktober ds. Js. hat Geheimrat S. Finsterwalder, Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule München, sein 60. Lebensjahr vollendet. Bei dem bedeutenden Einfluß, den Finsterwalder auf die Entwicklung verschiedener Zweige der angewandten Mathematik genommen hat, benutzen wir gern den Anlaß, seiner Arbeiten und seiner Verdienste zu gedenken. Unter den Mathematikern unseres Zeitalters ist Finsterwalder einer der ideenreichsten Forscher und eine charakteristische wissenschaftliche Persönlichkeit. Mathematiker und Naturforscher zugleich, findet er in der Beobachtung der Natur unerschöpfliche Anregungen zu mathematischen Fragestellungen und physikalisch-technischen Problemen, die er mit gleicher Meisterschaft bezwingt. Aus dieser glücklichen und seltenen Verbindung verschiedener Begabungen sind die Arbeitsgebiete entstanden, die er sich geschaffen hat, und auf denen er Meister und Lehrer geworden ist, während er selbst keiner Schule und keiner Richtung angehört als seiner eigenen.

Unter den Teilen der angewandten Mathematik, die Finsterwalder gefördert hat, steht die Photogrammetrie oben an; um sie gruppiert sich die Mehrzahl seiner sonstigen Studien. Zur Beschäftigung mit ihr führte den jungen Naturfreund um die Mitte der achziger Jahre die damals auflebende wissenschaftliche Erforschung der Alpen und des sie bedeckenden ewigen Eises. An zahlreichen Aufnahmen alpiner Gletscher hat Finsterwalder die Methoden der Hochgebirgsphotogrammetrie nach allen Seiten hin entwickelt. Von der Konstruktion zweckentsprechender Phototheodolite bis zur Darstellung der Geländeformen in der Karte gibt es keine Einzelheit der Ausführung, die er nicht beherrscht und die er nicht mindestens durch eigene Gedanken bereichert hätte. Besondere Liebe hat er von jeher der Feldarbeit zugewendet, und seit fast 40 Jahren weiht er ihr in unverminderter Leistungsfähigkeit alljährlich einen beträchtlichen Teil seiner Ferien. — Neben die Hochgebirgsphotogrammetrie trat bald die Ballonphotogrammetrie, die Vorläuferin der heutigen Fliegerphotogrammetrie, und auch hier beschäftigte er sich in praktischer und theoretischer Arbeit mit Aufnahme und Ausarbeitung. Beide Zweige

der Photogrammetrie haben die Schwierigkeit gemeinsam, daß die vollständige Orientierung der Aufnahmen höchstens nach umfangreichen Vorarbeiten erreichbar ist. Der Überwindung dieser Schwierigkeit dient eine Anzahl von Arbeiten über flüchtige Photogrammetrie, Ortsbestimmung von Ballonaufnahmen, das Rückwärtseinschneiden im Raum. Daneben finden theoretische Untersuchungen statt über die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie. Auch die prinzipiell einfachere Photogrammetrie mit vollständiger Orientierung wird nicht vernachlässigt, Feldarbeit und Ausarbeitung werden verfeinert und geprüft; die modernen stereophotogrammetrischen und autographischen Methoden, die neuerdings an der Technischen Hochschule München durch einen eigenen Lehrauftrag vertreten sind, in jeder Weise gefördert.

Mit den Gletscheraufnahmen eng verbunden ist das Studium der Gletscher selbst. Hier zeigt sich Finsterwalder als Physiker und Geograph. Eine Reihe von Untersuchungen hat das Studium der stationären Bewegung des Eises, besonders ihrer Vertikalkomponente zum Ziel; die wesentliche Frage aber, der sich alle anderen unterordnen, ist die nach der periodischen Bewegung, den Gletscherschwankungen. Ihr sind die jahrzehntelangen Vermessungen gewidmet. Die Untersuchungen über den Vernagtferner gehören zu den klassischen Werken der Naturwissenschaft. Eine mathematische Theorie der Gletscherschwankungen erklärt mit Glück alle wesentlichen Erscheinungen.

Die zu exakten photogrammetrischen Arbeiten notwendigen geodätischen Grundlagen bringen Finsterwalder in Fühlung mit dem Vermessungswesen, besonders der höheren Geodäsie, der er sich mit der gewohnten Gründlichkeit in Theorie und Praxis hingibt. Eine Reihe von Arbeiten über den Zusammenschluß der trigonometrischen Netze der deutschen Staaten sind eine Frucht dieser Studien. Seit Jahren schätzt das bayrische Landesvermessungsamt seinen Rat und seine Hilfe; es hat sie nicht nur zur Vorbereitung der beabsichtigten Neutriangulation Bayerns in Anspruch genommen, sondern auch während des Krieges zur Ausarbeitung feldmäßiger Methoden der Luftphotogrammetrie. Die Konstruktion eines Apparates zur optisch mechanischen Umformung von Fliegerbildern in die Karte auf Grund des Scheimpflugschen Prinzips verdient besondere Erwähnung.

Andere Arbeiten Finsterwalders liegen auf dem Gebiet der geometrischen Optik. Sie beschäftigen sich meist mit den von optischen Systemen größerer Öffnung erzeugten Bildern und mit der Abweichung von der punktförmigen Abbildung, Unschärfe, Verzerrung, Helligkeitsverteilung des Lichtflecks. Diese Arbeiten fallen in das erste Jahrzehnt seiner Forschertätigkeit und zeichnen sich wie seine sämtlichen Arbeiten durch rechnerisch und zeichnerisch genau durchgeführte, greifbare Ergebnisse aus. Später hat seine tiefgehende Kenntnis der Optik bei der Konstruktion von Apparaten wiederholt ihren Einfluß gezeigt.

Es ist nicht möglich, hier alle die Gebiete aufzuzählen, auf denen Finsterwalders mathematischer Geist und seine Erfindungsgabe Leistungen vollbracht haben. Die Aeronautik führt ihn zur Aerodynamik; seine Tätigkeit als Freiballonführer zu den Problemen der Kugelteilung; die geographischen Arbeiten zu Untersuchungen über die mathematischen Konstanten topographischer Flächen. Auf analytischem Gebiet erfindet er ein Verfahren der harmonischen Analyse. Die Probleme, die nicht praktischen Zwecken dienen, wie das der Flächenteilung mit kürzesten Grenzen, sind bei der Untersuchung praktischer Fragen entstanden. In den geometrischen Untersuchungen fehlt nie die Beziehung zur Mechanik oder ein Ausblick auf andere Anwendungsmöglichkeiten, auf die Aesthetik geometrischer Formen und die Beziehungen zu Kunst und Kunsthandwerk.

Es soll auch nicht versucht werden, hier ein Bild von Finsterwalders bisherigem Lebensgang zu entwerfen; das wenige, was gesagt wurde, genügt um die Geschlossenheit seiner Persönlichkeit zu zeigen: die Forscherarbeit auf dem weiten und vielverzweigten Gebiet der angewandten Mathematik ist ihm nicht Beruf, sie ist der geistige Inhalt seines Lebens. — Seine Lehrtätigkeit, die ihm neben der Ausbildung der Studierenden der Ingenieurwissenschaften in Mathematik und Darstellender Geometrie, in höheren Vorlesungen für Ingenieure und Mathematiker Gelegenheit zum Vortrag über seine eigenen Forschungsgebiete gibt, zeichnet sich durch lebendige Verbindung von Theorie und Praxis aus. Kein Wunder, daß ein so gedankenreicher und lebenspendender Geist großen Einfluß auf seine Umgebung ausübt; daß er mit verwandten Naturen anderer Fachrichtungen jahrzehntelang zu gemeinsamen Ziel zusammenarbeitet; daß er auf jedem seiner Lieblingsgebiete einen Kreis von Schülern um sich gesammelt und einen Einfluß auf die Entwicklung der Wissenschaft gewonnen hat, der weit über seinen unmittelbaren Wirkungskreis hinausgeht und wenigstens in der Vorkriegszeit nicht auf Deutschland beschränkt war. Heute, da die Photogrammetrie nach jahrzehntelangen Schwierigkeiten sich durchgesetzt hat und in Wissenschaft und Technik, in Vermessungswesen und Astronomie den ihr gebührenden Platz einnimmt, sieht er in Deutschland in einer Zeit vielfachen Niederganges die Früchte seiner Arbeit reifen. Lagally. 221

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Massenanziehung in einem Kreisringkörper. Dieses Thema behandelt in Bd. 1, 1921, S. 487 bis 489 ein Aufsatz des Herrn L. Hotopp, der nicht unwidersprochen bleiben kann. Herr Hotopp integriert dort das Integral

$$\eta = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta - n}{\sqrt{1+n^2-2n\cos\vartheta}^3}\, d\vartheta$$

folgendermaßen angenähert: er teilt das Intervall 0 bis 2π in 12 gleiche Stücke $\frac{\pi}{6}$ und ersetzt das Integral durch die Summe

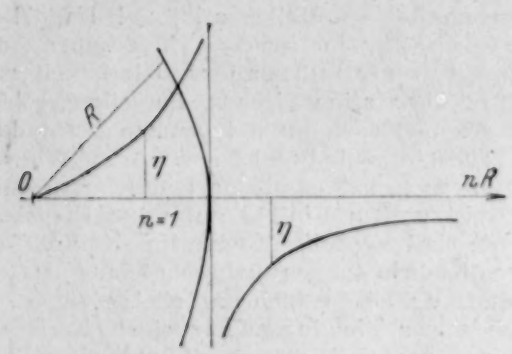
$$\frac{\pi}{6} \sum \frac{\cos\vartheta_\nu - n}{\sqrt{1+n^2-2n\cos\vartheta_\nu}^3}$$

mit

$$\vartheta_\nu = \frac{\pi}{12}, \quad \frac{3\pi}{12}, \quad \frac{5\pi}{12} \quad \text{usw.}$$

Dieses Verfahren mag für Werte von n befriedigen, die von $n=1$ hinreichend entfernt sind, ist aber sicher unzulässig, wenn n dicht bei 1 liegt, weil dort der Integrand sehr groß wird, für $n \to 1$ sogar gegen ∞ geht. In diesem Falle versagt bekanntlich das Verfahren.

Tatsächlich sind auch gerade die interessanten Resultate des Herrn Hotopp falsch. In Wahrheit gibt es bei Fig. 3 weder das Maximum, noch die Nullstelle bei B, noch das Minimum. Vielmehr geht die Kurve bei Annäherung an $n=1$ beiderseits gegen ∞ und sieht also so aus, wie die untenstehende Abbildung[1]) zeigt:



Es ist ja

$$\eta = \frac{\partial}{\partial n} \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1+n^2-2n\cos\vartheta}}.$$

Nun wächst aber bekanntlich das elliptische Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1+n^2-2n\cos\vartheta}}$$

mit $n \to 1$ beiderseits gegen $+\infty$, was ja schon daraus hervorgeht, daß

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \frac{d\vartheta}{2\sin\frac{\vartheta}{2}} = \infty$$

ist.

Mithin muß η die von mir behauptete Gestalt haben. Es ist ja auch ein bekannter Satz der Potentialtheorie, daß bei Annäherung an eine mit Masse belegte Linie sowohl Potential wie Kraft unendlich groß werden.

Die weiteren Schlüsse des Herrn Hotopp sind natürlich entsprechend unrichtig. 167

Hamel.

[1]) In der Abbildung ist die Bezeichnung $n=1$ etwas mehr nach rechts gerückt zu denken.

Erwiderung. Den von Hrn. Professor G. Hamel zu meiner Arbeit über »Massenanziehung in einem Kreisringträger« erhobenen mathematischen Einwand, daß die auf dem Wege endlicher Teilung gewonnene angenäherte geometrische Entwicklung der in Gl. (5) meiner Arbeit enthaltenen Integralfunktion bei stetiger Verteilung der Massen eine andere Form und insbesondere die betreffende Linie unter Fortfall der Maximal- und Minimalpunkte im Abstande $n=1$ von der Ringmitte asymptotische Annäherung an eine den Elementarring tangierende Gerade zeigt, muß ich gelten lassen. Schade nur, daß die Mathematik einen anderweit gangbaren Weg zur wirklichen einfachen Auswertung jener Funktion über die Erkenntnis des bezeichneten asymptotischen Verhaltens hinaus nicht bietet. Die Anziehung des Elementarringes auf jeden seiner eigenen Massenpunkte, d. i. seine Festigkeit, soweit diese aus der Massenanziehung entspringt, würde sich dabei nur in endlicher Größe ergeben können.

Meine Beschäftigung mit dem mir sonst ferner liegenden Gegenstande geschah übrigens nur aus bestimmtem Anlaß und in erster Linie mit dem Ziele, den Gleichgewichtszustand eines Massenpunktes im Zentrum eines Kreisringkörpers lediglich unter der Wirkung der Massenanziehung festzustellen. In dieser Beziehung wird das Ergebnis, die Feststellung des labilen Gleichgewichtszustandes, durch den Einwand des Herrn G. Hamel nicht berührt.

Hotopp. 167a

(Redaktionsschluß 31. Oktober 1922.)

Verantwortlich für die Schriftleitung Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43.
Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.

409

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

Bd. 2 **Ende Dezember 1922** **Heft 6**

Inhalt:

	Seite
Hauptaufsätze. M. Lagally: Berechnung der Kräfte und Momente, die strömende Flüssigkeiten auf ihre Begrenzung ausüben	409
E. König: Potentialströmung durch Gitter . .	422
E. Stübler: Ueber hyperboloidische Verzahnung	429
A. Basch: Ueber die Genauigkeitssteigerung durch Hinzutreten einer neuen Beobachtung .	447
Zusammenfassende Berichte. A. Galle: Neuere Integraphen	458
Kurze Auszüge. Festigkeitslehre	467
Kleine Mitteilungen. Hak: Bemerkungen über eine besondere Art von Rechentafeln — Skrobanek: Gleichgewichtsform eines elastisch dehnbaren Fadens (elastische Kettenlinie)	469
Buchbesprechungen. Weber: Die Lehre der Drehungsfestigkeit — Welter: Elastizität und Festigkeit von Spezialstählen bei hohen Temperaturen — Geitler: Elektromagnetische Schwingungen und Wellen — Kowalewski: Die Klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen — Lietzmann: Erkenntnislehre im mathematischen Unterricht der Oberklassen — v. Mises: Fluglehre — Schiller: Untersuchungen über laminare und turbulente Strömung	475
Nachrichten	478
Zuschriften an den Herausgeber	479

HAUPTAUFSÄTZE

Berechnung der Kräfte und Momente, die strömende Flüssigkeiten auf ihre Begrenzung ausüben.[1]

Von **M. LAGALLY** in Dresden.

Seit Dirichlet kennt man den paradoxen Satz, daß eine Kugel in einer vollkommenen, stetig strömenden Flüssigkeit keine Kraft erfährt, also selbst ohne Widerstand in der Flüssigkeit bewegt werden kann; daß sich ein Körper von beliebiger Gestalt ebenso verhält, ist öfter behauptet als bewiesen worden. Der Widerspruch zwischen dem Satz und den in der Natur beobachteten Tatsachen löst sich durch die Erkenntnis, daß die beim Dirichletschen Paradoxon vorausgesetzte, besonders einfache Strömung in der Natur überhaupt nicht vorkommt; daß sich vielmehr hinter dem eingetauchten Körper stets Wirbel ausbilden, deren Existenz für das Auftreten eines Widerstandes von grundlegender Bedeutung ist. Einer der glänzendsten Erfolge dieser Erkenntnis ist die Prandtlsche Tragflächentheorie. Nachdem es schon vorher gelungen war, durch eine geistreiche Umgehung der wesentlichen Schwierigkeit wenigstens den Tragflächen-Auftrieb mathematisch zu erfassen, konnte Prandtl den Widerstand des Tragflügels auf eine »Induktions«-Wirkung des Systems der abgelösten Wirbel zurückführen, das dem Zweck der Theorie entsprechend in einfacher Form eingeführt ist.

Die folgende Untersuchung, auf keine bestimmte praktische Anwendung zugeschnitten, aber trotzdem aus der Erkenntnis der Bedeutung hervorgegangen, welche die in der Flüssigkeit enthaltenen Wirbel für den Strömungsdruck besitzen, beschränkt die Allgemeinheit des Wirbelsystems nicht durch die Bedingungen eines bestimmten Problems, sondern nur durch die Grenzen, welche die mathematischen Schwierigkeiten ziehen. Es ergab sich dabei die Notwendigkeit, aus Gründen der mathematischen Analyse außer dem Auftreten von Wirbeln noch eine weitere physikalisch mögliche Erscheinung zuzulassen, obgleich sie für die Anwendungen bisher noch keine Bedeutung gewonnen zu haben scheint, nämlich das Auftreten von Quellen in der Strömung.

Die in einer Flüssigkeit vorhandenen Quellen und Wirbel sind maßgebend für die in der Flüssigkeit herrschende Bewegung; ihre Verteilung bestimmt die Bewegung auch

[1] Mit der Berechnung der Kräfte allein beschäftigt sich, unter etwas engeren Voraussetzungen, meine Untersuchung »Ueber den Druck einer strömenden Flüssigkeit auf eine geschlossene Fläche«. Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wissensch. 1921, S. 209 u. f.

analytisch. Ein besonders einfacher Ausdruck läßt sich für die Geschwindigkeit als Funktion der Quellen- und Wirbelverteilung angeben, wenn die Flüssigkeit unbegrenzt ist. Weniger einfach liegen die Verhältnisse, wenn die Flüssigkeit begrenzt ist, d. h. entweder das Innere eines Hohlraumes erfüllt oder durch eingetauchte Körper in ihrer Ausbreitung beschränkt ist; dann übt auch die Gestalt der Grenzfläche einen Einfluß aus, der nur durch Lösung einer Randwertaufgabe bestimmt werden kann.

Die Geschwindigkeit an irgend einer Stelle im Innern oder an der Grenze einer Flüssigkeit ist nun aber maßgebend für den dort herrschenden Druck. Infolgedessen ergibt sich der gesamte Druck einer strömenden Flüssigkeit auf ihre Begrenzung durch Summierung der lokalen Drucke längs der Begrenzung; und in ähnlicher Weise das Moment des Strömungsdruckes. Mithin erscheint auch der Strömungsdruck und sein Moment als Funktion der Verteilung der in der Flüssigkeit enthaltenen Quellen und Wirbel; von ihnen sind die analytischen Ausdrücke für diese beiden Größen in erster Linie abhändig und nur mittelbar von der Gestalt der Grenze; sie lassen bei Abwesenheit von Quellen und Wirbeln die volle Gültigkeit des verallgemeinerten Dirichletschen Satzes erkennen, und umschließen bei Anwesenheit von Wirbeln die bisherigen Theorien über Fälle des Strömungsdrucks.

1. Ziel und Voraussetzungen der Untersuchung. In der Prandtlschen Tragflügeltheorie[1]) lassen sich die Auftriebs- und Widerstandskräfte, welche die Tragfläche erfährt, angeben, sobald die Verteilung der vom Flugzeug abgelösten freien und der die Tragfläche ersetzenden gebundenen Wirbel bekannt ist. Die Gestalt der Tragfläche spielt eine untergeordnete Rolle und braucht ebenso wie das Tragflächenprofil in der ebenen Theorie gar nicht näher bekannt zu sein.

Damit tritt eine Eigenschaft der Strömungen einer idealen Flüssigkeit und der dabei auftretenden Kräfte zutage, die, wie gezeigt werden soll, erheblich allgemeiner ist: Wenn eine stationäre Strömung das Innere einer geschlossenen Fläche erfüllt, so hängt der von der Flüssigkeit auf die Fläche ausgeübte Druck und sein Moment ausschließlich von der Verteilung der Quellen und Wirbel in der Flüssigkeit und von der an ihrem Ort herrschenden Geschwindigkeit ab; von der Gestalt der Begrenzung nicht unmittelbar, sondern nur insofern, als die Verteilung der Geschwindigkeit durch die Begrenzung bedingt ist. Aehnliches gilt, wenn die Flüssigkeit den Außenraum erfüllt, jedoch muß in diesem Fall auch die analytische Fortsetzung der Strömung in den Innenraum bekannt sein.

Die folgende Untersuchung ist von größerer Allgemeinheit, als die Anwendung auf die Tragflügel-Theorie erfordern würde. Die Flüssigkeit soll den Innenraum J oder Außenraum A einer geschlossenen Fläche F erfüllen. Im ersten Fall kann die Fläche ein- oder mehrfach zusammenhängend sein; im letzteren kann sie außerdem in mehrere getrennte Flächen zerfallen. Die Strömung soll stationär sein und — mit gewissen, noch näher zu bestimmenden Einschränkungen — beliebig verteilte Quellen- und Wirbelfelder besitzen, die durch Grenzübergang in diskrete, punkt-, linien- oder flächenförmig verteilte Singularitäten von unendlicher Dichte ausarten können. Zunächst aber sollen sie mit Rücksicht auf die Stetigkeitsbedingungen, die für die Sicherstellung einiger Umformungen von Raum- und Flächenintegralen erforderlich sind, kontinuierlich ausgebreitet angenommen werden.

Die Strömung braucht also kein Geschwindigkeitspotential zu besitzen; die Existenz eines solchen wird wenigstens nicht für die ganze Strömung vorausgesetzt, mithin auch die Gleichheit der Strömungsenergie für alle Stromfäden (der Konstanten in der Bernoullischen Gleichung) für das Innere der Flüssigkeit nicht gefordert[2]). Jedoch soll die Strömung an der Begrenzungsfläche selbst den Charakter einer Potentialströmung haben; mindestens soll das Heranziehen der Singularitäten an die Begrenzung nur unter der Bedingung gestattet sein, daß wenigstens an der Begrenzungsfläche selbst die Gültigkeit der Bernoullischen Gleichung

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{v^2}{2} = \text{konst.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

(p Druck, v Geschwindigkeit, ϱ Dichte) für einen festen Wert der Konstanten gesichert ist. Damit ist u. a an der Begrenzungsfläche das Umfließen scharfer Kanten mit großer Geschwindigkeit unter Entstehung negativen Druckes ausgeschlossen. Die physikalische Bedeutung obiger Forderung ergibt sich folgendermaßen: Der Gradient der linken Seite

[1]) L. Prandtl, Tragflügeltheorie, I. u. II. Mitteilung, Göttinger Nachrichten 1918 u. 1919.
[2]) Im Gegensatz zu Prandtl.

von (1) ist Null: $\frac{1}{\varrho}\nabla p + {}^1/_2 \nabla v^2 = 0$. Vergleicht man diese Gleichung mit der Eulerschen Gleichung für die stationäre Strömung bei Abwesenheit von Raumkräften [1])

$$\mathfrak{v} \cdot \nabla \mathfrak{v} + \frac{1}{\varrho}\nabla p = 0\ ^{2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

so folgt $\nabla v^2 = 2\,\mathfrak{v} \cdot \dot{\nabla}\mathfrak{v}$. Nach einer bekannten vektoranalytischen Umformung ist $\nabla v^2 = 2\,\mathfrak{v} \cdot \nabla \mathfrak{v} + 2\,\mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}$, also

$$\mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Außer für wirbelfreie Strömungen gilt somit die Bernoullische Gleichung mit einer für alle Stromlinien gleichen Konstanten auch dann, wenn die Wirbellinien mit den Stromlinien zusammenfallen. Das trifft gerade die an den Hinterkanten der Tragflächen auftretende Erscheinung; die Wirbellinien der sich dort ablösenden Wirbelschicht verlassen die Tragfläche in Richtung der Stromlinien.

2. Zusammenstellung einiger Umformungen. Für die folgende Untersuchung werden mehrere Umwandlungen von Flächenintegralen in Raumintegrale, und von Kurvenintegralen in Flächenintegrale verwendet, die ich, um den Gang der Untersuchung nicht durch formale Ueberlegungen unterbrechen zu müssen, eingangs zusammenstelle.

Es sei $\mathfrak{n}$ der Einheitsvektor in Richtung der positiven Normalen der Fläche F, diese soll bei berandeten Flächenstücken mit dem Umlaufssinn eine Rechtsschraube bilden, bei geschlossenen Flächen nach innen gehen; $d\omega$ das Oberflächenelement; $d\mathfrak{o} = \mathfrak{n} d\omega$ das orientierte Flächenelement; $d\tau$ das Raumelement; $\mathfrak{r}$ der Ortsvektor für einen Punkt der Fläche F; $\mathfrak{r}$ oder $\mathfrak{s}$ der Ortsvektor für einen Punkt des Randes C. Ferner sei φ ein Skalar, $\mathfrak{v}$ ein Vektor, Φ ein Tensor, welche gewissen Stetigkeitsbedingungen genügen, die für die Gültigkeit des Gaußschen Integralsatzes hinreichen. Dann gelten folgende Gleichungen:

a) $\int_J \nabla \cdot \mathfrak{v}\, d\tau = -\int_F \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o}$ (Gaußscher Integralsatz),

b) $\int_J \nabla \varphi\, d\tau = -\int_F \varphi\, d\mathfrak{o}$ [3]); also $\int_F d\mathfrak{o} = 0$ für geschlossene Flächen,

c) $\int_J \nabla \cdot \Phi\, d\tau = -\int_F d\mathfrak{o} \cdot \Phi$ [4]),

d) $\int_J \nabla \times \mathfrak{v}\, d\tau = -\int_F d\mathfrak{o} \times \mathfrak{v}$ [5]); also $\int_F d\mathfrak{o} \times \mathfrak{r} = 0$ für geschlossene Flächen,

e) $\int_J \mathfrak{r} \times \nabla \cdot \Phi\, d\tau = -\int_F \mathfrak{r} \times (d\mathfrak{o} \cdot \Phi)$ für symmetrische Tensoren Φ; der Beweis ergibt sich, indem man in c) den Tensor Φ durch $\mathfrak{r} \times \Phi$ ersetzt.

f) $\int_F (\nabla \times \mathfrak{v}) \cdot d\mathfrak{o} = \int_C \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{s}$ (Stokesscher Integralsatz),

g) $\int_F d\mathfrak{o} \times \nabla \varphi = \int_C \varphi\, d\mathfrak{s}$ [6]),

h) $\int_F d\mathfrak{o} \cdot \nabla \times \Phi = \int_C d\mathfrak{s} \cdot \Phi$ [7]).

---

[1]) Die Prandtlsche Theorie führt Raumkräfte ein und kommt gerade dadurch zum Ziel.

[2]) Bezeichnung der Vektoren nach Gibbs: $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ skalares Produkt, $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ Vektorprodukt, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ Gibbssche Dyade (dyadisches Produkt); $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}$; ∇ vor einem Skalar: Gradient; $\nabla \cdot$ vor einem Vektor: Divergenz (div); $\nabla \times$ vor einem Vektor: Rotation (curl).

[3]) Gibbs-Wilson, Vector Analysis, S. 256. — [4]) ebenda S. 409. — [5]) ebenda S. 257. — [6]) ebenda S. 255; zuerst bei A. Föppl »Einführung in die Maxwellsche Theorie«.

[7]) Nach dem Stokesschen Integralsatz; die Gleichung h) ergibt sich aus f) in derselben Weise wie c) aus a). Gibbs S. 409.

Ferner sei hier noch eine vektoranalytische Umformung angegeben. Die Identität

$$\nabla v^2 = 2\,\mathfrak{v}\cdot\nabla\mathfrak{v} + 2\,\mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}$$

wurde bereits erwähnt; fügt man hierzu noch den Ausdruck für die Divergenz einer Dyade $\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}$

$$\nabla\cdot(\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}) = \mathfrak{v}\cdot\nabla\mathfrak{v} + \mathfrak{v}\nabla\cdot\mathfrak{v},$$

so folgt

i) $\frac{1}{2}\nabla v^2 = \nabla\cdot(\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}) - \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{v} + \mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}$.

3. Die „innere Aufgabe". Wenn die Flüssigkeit das Innere von F erfüllt, ergeben sich für die Kraft $\mathfrak{P}$ und ihr Moment $\mathfrak{M}$ folgende Ausdrücke, die nach der Bernoullischen Gleichung (1) die untenstehende Umformung zulassen:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{P} &= -\int_F p\,d\mathfrak{o} \qquad = \frac{\varrho}{2}\int_F v^2\,d\mathfrak{o} \qquad + c\int_F d\mathfrak{o}\\ \mathfrak{M} &= -\int_F \mathfrak{r}\times p\,d\mathfrak{o} = \frac{\varrho}{2}\int_F \mathfrak{r}\times v^2\,d\mathfrak{o} + c\int_F \mathfrak{r}\times d\mathfrak{o}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ (4);$$

hier ist c eine Konstante. Die beiden letzten Integrale verschwinden nach (b) und (d); die beiden ersten Summanden lassen sich denselben Gleichungen zufolge in Raumintegrale überführen:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{P} &= -\frac{\varrho}{2}\int_J \nabla v^2\,d\tau\\ \mathfrak{M} &= \frac{\varrho}{2}\int_J \nabla\times(v^2\,\mathfrak{r})\,d\tau = -\frac{\varrho}{2}\int_J \mathfrak{r}\times\nabla v^2\,d\tau\ ^{1}).\end{aligned}\right\}$$

Zufolge der Identität i) wird

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{P} &= -\varrho\int_J \nabla\cdot(\mathfrak{v}\,\mathfrak{v})\,d\tau + \varrho\int_J \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho\int_J \mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}\,d\tau,\\ \mathfrak{M} &= -\varrho\int_J \mathfrak{r}\times\nabla\cdot(\mathfrak{v}\,\mathfrak{v})\,d\tau + \varrho\int_J \mathfrak{r}\times\mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho\int_J \mathfrak{r}\times[\mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}]\,d\tau.\end{aligned}\right\}$$

Die in den beiden ersten Summanden auftretenden Integrale können nach c) und e) in Flächenintegrale zurückverwandelt werden:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{P} &= \varrho\int_F \mathfrak{v}\,\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o} + \varrho\int_J \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho\int_J \mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}\,d\tau,\\ \mathfrak{M} &= \varrho\int_F \mathfrak{r}\times\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o} + \varrho\int_J \mathfrak{r}\times\mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho\int_J \mathfrak{r}\times[\mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}]\,d\tau\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ (5).$$

An der Fläche F ist die Geschwindigkeit tangential; also $\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o} = 0$. Mit dieser Bemerkung ist die »innere Aufgabe« gelöst; für Kraft und Moment ergeben sich die endgültigen Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{P} &= \varrho\int_J \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho\int_J \mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}\,d\tau\ ^{2}),\\ \mathfrak{M} &= \varrho\int_J \mathfrak{r}\times\mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho\int_J \mathfrak{r}\times[\mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}]\,d\tau\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ (6).$$

---

1) $\nabla\times(v^2\,\mathfrak{r}) = \nabla\, v^2\times\mathfrak{r} + v^2\nabla\times\mathfrak{r}$; der 2. Summand ist Null.

2) Nach Abschluß der Arbeit kommt mir eine Abhandlung von Munk zu Gesicht, in der die erste der Gleichungen (6) ebenfalls abgeleitet ist. Some new aerodynamical relations. National advisory Committer for Aeronautics. Report Nr. 114, Part III, The forces acting on bodies moving in a perfect fluid. Ferner ist inzwischen eine Abhandlung von H. Liebmann erschienen: Die Lagallysche Formel für den Flüssigkeitsdruck, Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wissensch. 1922 S. 127 u. f., die auch die 2. der Gleichungen (6) enthält; außerdem die Angabe der Zusatzglieder (7) unter der vereinfachenden Annahme, daß die Größe A_2 der Gleichung (8) konstant, also Null ist. Liebmann vermeidet die Verwendung der Dyaden.

Diese hängen nur von der Verteilung der Quellen und Wirbel und von den in den Punkten des Quellen- und Wirbelfeldes bestehenden Geschwindigkeiten ab. Allerdings darf, wie schon erwähnt, nicht übersehen werden, daß diese Geschwindigkeiten selbst durch die Gestalt der Oberfläche wesentlich beeinflußt werden.

4. Die „äußere Aufgabe". Die Berechnung von Kraft und Moment, welche eine ins Unendliche reichende Strömung auf einen eingetauchten Körper ausübt, kann auf die »innere Aufgabe« zurückgeführt werden. Zu diesem Zweck betrachtet man von der den ganzen Außenraum A erfüllenden Flüssigkeit, die von innen durch die Fläche F begrenzt ist, zunächst nur den Teil, der das zwischen F und einer Kugel K von großem Radius liegende Gebiet A' erfüllt, und läßt dann den Radius ins Unendliche wachsen. Damit zerfällt in (5) die Kraft $\mathfrak{P}$ in 2 Komponenten $\mathfrak{P}_F$ und $\mathfrak{P}_K$, die an der Fläche F bezw. an der Kugel K angreifen, entsprechendes gilt für $\mathfrak{M}$. Ebenso zerfallen die auf der rechten Seite stehenden Flächenintegrale in je 2 Teile, die über F bezw. K zu erstrecken sind. Da die Kugel K von der Flüssigkeit durchströmt wird, während an F die Richtung der Geschwindigkeit tangential ist, verschwinden die über K genommenen Teile der Flächenintegrale nicht. Zur Ableitung von (5) ist ferner die Gültigkeit der Bernoullischen Gleichung an der ganzen Begrenzung, also auch an K vorausgesetzt. Die Strömung muß also im Unendlichen singularitätenfrei sein, und der Radius der Kugel K von vornherein so groß gewählt werden, daß die Kugel die ganzen Quellen- und Wirbelfelder umschließt; nur Wirbellinien von der Art der an einer Tragfläche abgelösten Wirbel, die zugleich Stromlinien sind, können auch im Unendlichen zugelassen werden, da sie die Bernoullische Gleichung nicht stören. Mit Rücksicht auf die analytische Behandlung, für die die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials im Unendlichen erwünscht ist, sollen jedoch diese Wirbellinien innerhalb der Kugel geschlossen gedacht werden und das Schlußstück gleichzeitig mit der Kugel ins Unendliche rücken.

Somit geht also (5) (6) über in

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{P}_F &= -\mathfrak{P}_K + \varrho \int_K \mathfrak{v}\,\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o} + \varrho \int_{A'} \mathfrak{v}\,\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho \int_{A'} \mathfrak{v} \times \operatorname{curl}\mathfrak{v}\,d\tau,\\ \mathfrak{M}_F &= -\mathfrak{M}_K + \varrho \int_K \mathfrak{r}\times\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o} + \varrho \int_{A'} \mathfrak{r}\times\mathfrak{v}\,\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho \int_{A'} \mathfrak{r}\times[\mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}]\,d\tau\end{aligned}\right\} \quad (7).$$

Nach (4) ist

$$\mathfrak{P}_K = \frac{\varrho}{2}\int_K v^2\,d\mathfrak{o}; \qquad \mathfrak{M}_K = \frac{\varrho}{2}\int_K \mathfrak{r}\times\mathfrak{v}^2\,d\mathfrak{o};$$

mithin ist

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{P}_F &= \varrho \int_K (\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o} - {}^1/_2 v^2\,d\mathfrak{o}) + \varrho \int_{A'} \mathfrak{v}\,\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho \int_{A'} \mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}\,d\tau,\\ \mathfrak{M}_F &= \varrho \int_K \mathfrak{r}\times(\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o} - {}^1/_2 v^2 d\mathfrak{o}) + \varrho \int_{A'} \mathfrak{r}\times\mathfrak{v}\,\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho \int_{A'} \mathfrak{r}\times[\mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}]\,d\tau\end{aligned}\right\} \quad (7').$$

5. Die Zusatzglieder bei der „äußeren Aufgabe". Von der Lösung der inneren Aufgabe unterscheiden sich die Gleichungen (7') durch das Auftreten zweier Zusatzglieder, die jetzt zu berechnen sind. Nach den getroffenen Vereinbarungen besitzt die Strömung im Unendlichen höchstens eine endliche Geschwindigkeit (in ihrer Richtung soll die positive X-Achse angenommen werden) und ein Geschwindigkeitspotential φ, das in eine nach fallenden Potenzen des Absolutwertes r des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ fortschreitende Reihe entwickelt werden kann:

$$\varphi = v_\infty x + \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \ldots \ldots \quad (8).$$

Von den auf der rechten Seite auftretenden Kugelfunktionen hat die erste $\frac{A_1}{r}$ einen konstanten Zähler. Die folgenden können aus der fundamentalen Lösung $\frac{1}{r}$ der Laplaceschen Gleichung durch einen Differentiationsprozeß abgeleitet werden. Bezeichnet man mit $\frac{\partial}{\partial s_1}, \frac{\partial}{\partial s_2} \ldots \frac{\partial}{\partial s_k}$ die Differentiationen nach k verschiedenen Richtungen

und mit $\mathfrak{G}_k$ eine Konstante, so läßt sich die allgemeinste harmonische Kugelfunktion (— k)ter Ordnung in der Form darstellen:

$$\frac{A_k}{r_k} = \mathfrak{G}_k \frac{\partial^k}{\partial s_1 \, \partial s_2 \ldots \partial s_k} \frac{1}{r}$$

oder auch

$$\frac{A_k}{r_k} = \mathfrak{G}_k (\mathfrak{e}_1 \cdot \nabla)\,(\mathfrak{e}_2 \cdot \nabla) \ldots (\mathfrak{e}_k \cdot \nabla) \frac{1}{r},$$

wenn $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2 \ldots \mathfrak{e}_k$ die Einheitsvektoren in diesen Richtungen bedeuten. Diese Darstellung ist hydrodynamisch wichtig, da die (— k)te Kugelfunktion das Feld einer Quelle k. Ordnung im Anfangspunkt ergibt[1]).

Für unseren Zweck wurden nur Glieder bis zur Ordnung — 2 gebraucht; dann ist

$$\varphi = v_\infty x + \frac{A}{r} + (\mathfrak{G} \cdot \nabla) \frac{1}{r} + \ldots \qquad (9),$$

wo A eine skalare, $\mathfrak{G}$ eine vektorielle Konstante bedeutet. Dann ist die Geschwindigkeit bis auf die Glieder zur Ordnung — 3:

$$\mathfrak{v} = \nabla \varphi = i v_\infty + A \nabla \frac{1}{r} + (\mathfrak{G} \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{r} + \ldots \qquad (9').$$

Führt man für die Kugel den Einheitsvektor in Richtung der inneren Normalen ein,

$$\mathfrak{n} = -\frac{\mathfrak{r}}{r},$$

so ist

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathfrak{r}}{r^3} = \frac{\mathfrak{n}}{r^2},$$

$$(\mathfrak{G} \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{r} = \frac{-\mathfrak{G} + 3\,\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{n}\,\mathfrak{n}}{r^3}.$$

Damit ergeben sich die Fundamentalreihen für das Geschwindigkeitspotential und die Geschwindigkeit:

$$\varphi = v_\infty x + \frac{A}{r} + \frac{\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{n}}{r^2} + \ldots \qquad (10),$$

$$\mathfrak{v} = i v_\infty + \frac{A\,\mathfrak{n}}{r^2} + \frac{-\mathfrak{G} + 3\,\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{n}\,\mathfrak{n}}{r^3} + \ldots \qquad (10').$$

Mit Hilfe dieser Reihen lassen sich die in (7) aufgetretenen Zusatzintegrale berechnen. Hierzu ist noch notwendig, in das orientierte Flächenelement $d\,\mathfrak{o}$ den zugehörigen räumlichen Zentriwinkel $d\,\varepsilon$ einzuführen; es ist

$$d\,\omega = r^2\,d\,\varepsilon; \quad \text{also } d\,\mathfrak{o} = \mathfrak{n}\,r^2\,d\,\varepsilon.$$

Dann ergeben sich die über die Kugelfläche zu integrierenden Differentiale durch eine einfache Zwischenrechnung:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{v}\,\mathfrak{v} \cdot d\,\mathfrak{o} - {}^1\!/_2\, v^2\,d\,\mathfrak{o} &= \Big[(i\,i \cdot \mathfrak{n} - {}^1\!/_2\,\mathfrak{n})\,v_\infty{}^2 r^2 + i\,A\,v_\infty \\ &\qquad + (2\,i\,\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{n} - \mathfrak{G}\,i \cdot \mathfrak{n} + i \cdot \mathfrak{G}\,\mathfrak{n})\,\frac{v_\infty}{r} + \ldots\Big]\,d\,\varepsilon, \\ \mathfrak{r} \times (\mathfrak{v}\,\mathfrak{v} \cdot d\,\mathfrak{o} - {}^1\!/_2\, v^2\,d\,\mathfrak{o}) &= -\,[\mathfrak{n} \times i\,i \cdot \mathfrak{n}\,v_\infty{}^2 r^3 + \mathfrak{n} \times i\,A\,v_\infty\,r \\ &\qquad + (2\,\mathfrak{n} \times i\,\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{n} - \mathfrak{n} \times \mathfrak{G}\,i \cdot \mathfrak{n})\,v_\infty + \ldots]\,d\,\varepsilon. \end{aligned}\right\} \qquad (11).$$

Bei der Integration dieser Reihen über die Kugel verschwinden für $r \to \infty$ sämtliche Glieder mit negativen Potenzen von r. Man kann sich also vor dem Grenzübergang auf die Integration derjenigen Glieder beschränken, in denen der Exponent von r positiv oder Null ist. Dabei treten folgende Integrale über die Einheitskugel auf:

$$\int d\,\varepsilon = 4\,\pi,$$

$$\int \mathfrak{n}\,d\,\varepsilon = 0 \quad [\text{nach b})],$$

$$\int i\,i \cdot \mathfrak{n}\,d\,\varepsilon = i\,i \cdot \int \mathfrak{n}\,d\,\varepsilon = 0,$$

$$\int \mathfrak{n} \times i\,d\,\varepsilon = -\,i \times \int \mathfrak{n}\,d\,\varepsilon = 0,$$

[1]) Vergl. z. B. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, S. 127.

$$\int \mathfrak{n} \times \mathfrak{G}\,\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{n}\, d\varepsilon = -\mathfrak{G} \times \int \mathfrak{n} \cos(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n})\, d\varepsilon$$

$$= \mathfrak{G} \times \int \boldsymbol{x}\, d\mathfrak{v} = -\mathfrak{G} \times \int \nabla \boldsymbol{x}\, d\tau \text{ [nach b)]} = -\frac{4}{3}\pi\, \mathfrak{G} \times \mathfrak{i},$$

$$\int \mathfrak{n} \times \mathfrak{i}\,\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{n}\, d\varepsilon = -\frac{4}{3}\pi\, \mathfrak{i} \times \mathfrak{G},$$

$$\int \mathfrak{n} \times \mathfrak{i}\,\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{n}\, d\varepsilon = 0.$$

Damit werden die Grenzwerte der Zusatzintegrale für $r \to \infty$

$$\left.\begin{aligned} \int_{K_\infty} (\mathfrak{v}\,\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} - {}^1/_2 v^2\, d\mathfrak{o}) &= 4\pi\, \mathfrak{i}\, \boldsymbol{A}\mathfrak{v}_\infty, \\ \int_{K_\infty} \mathfrak{r} \times (\mathfrak{v}\,\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} - {}^1/_2\, v^2\, d\mathfrak{o}) &= 4\pi\, \mathfrak{i} \times \mathfrak{G}\, v_\infty \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (12).$$

Diese Ausdrücke sind in (7) einzuführen; dabei kann man sich auch von dem eingeführten Einheitsvektor $\mathfrak{i}$ wieder frei machen, indem man $\mathfrak{i}\, v_\infty = \mathfrak{v}_\infty$ setzt. Dann ergibt sich folgende vorläufige Lösung der äußeren Aufgabe:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_F &= 4\pi\varrho\, A\, \mathfrak{v}_\infty + \varrho \int_A \mathfrak{v}\, \mathrm{div}\, \mathfrak{v}\, d\tau - \varrho \int_A \mathfrak{v} \times \mathrm{curl}\, \mathfrak{v}\, d\tau, \\ \mathfrak{M}_F &= 4\pi\varrho\, \mathfrak{v}_\infty \times \mathfrak{G} + \varrho \int_A \mathfrak{r} \times \mathfrak{v}\, \mathrm{div}\, \mathfrak{v}\, d\tau - \varrho \int_A \mathfrak{r} \times [\mathfrak{v} \times \mathrm{curl}\, \mathfrak{v}]\, d\tau \end{aligned}\right\} \quad . \quad (13).$$

Es hängen also in diesem Fall Druck und Moment außer von den bei der »inneren Aufgabe« vorkommenden Größen noch von der Geschwindigkeit im Unendlichen und von einer skalaren und einer vektoriellen Konstanten ab, welche in den beiden ersten Gliedern der Reihenentwicklung des Geschwindigkeitspotentials oder der Geschwindigkeit im Unendlichen auftreten.

Wenn die Strömung im Außenraum quellen- und wirbelfrei ist, jedoch im Unendlichen eine endliche Geschwindigkeit besitzt, so reduzieren sich Kraft und Moment auf die Zusatzglieder. Es ist jedoch bekannt und kommt auch im folgenden noch zur Sprache, daß in einer singularitätenfreien Strömung die Konstante A verschwindet; von $\mathfrak{G}$ gilt nicht das gleiche. Also übt eine reine Translationsströmung auf einen eingetauchten Körper zwar keine Kraft, aber im allgemeinen ein Drehmoment aus. Es ist leicht einzusehen, daß für veränderliche Richtung von $\mathfrak{v}_\infty$ der Zusammenhang von $\mathfrak{v}_\infty$ und $\mathfrak{G}$ durch eine lineare Vektorfunktion gegeben ist; infolgedessen gibt es für jeden Körper 3 »Anstellrichtungen«, für die auch das Drehmoment verschwindet.

6. Die zur „äußeren Aufgabe" gehörige Randwertaufgabe. Auch die beiden Konstanten A und $\mathfrak{G}$, die in den Zusatzgliedern auftreten, lassen sich durch div $\mathfrak{v}$ und curl $\mathfrak{v}$ ausdrücken. Hierzu hat man die Strömung aus den vorgegebenen Quellen- und Wirbelfeldern synthetisch aufzubauen; dazu ist allerdings notwendig, daß die Verteilung dieser Felder nicht nur im Außenraum A bekannt ist, sondern daß auch die feste Begrenzungsfläche F durch eine Verteilung von Singularitäten ersetzt ist. Diese Forderung kann auf verschiedene Weise befriedigt werden. Z. B. kann man auf F Quellen und Doppelquellen oder auch nur Doppelquellen oder Wirbellinien so verteilen, daß sie zusammen mit den gegebenen Singularitäten und der gegebenen Geschwindigkeit im Unendlichen eine Strömung erzeugen, welche an F tangential ist, und im Innenraum harmonisch ist, ja sogar ruhen kann [1]). Dazu ist allerdings, wenn die Strömung im Außenraum nicht von vornherein bekannt ist, die Lösung einer zweiten Randwertaufgabe erforderlich. Ein anderer Weg besteht darin, die Lösung der zweiten Randwertaufgabe für den Außenraum, die im Außenraum harmonisch ist, in den Innenraum hinein analytisch fortzusetzen; dort liegen ihre Singularitäten als verallgemeinerte Thomsonsche Bilder der gegebenen Singularitäten der Strömung im Außenraum. Wenn allerdings diese Funktion, wie es die Regel sein wird, im Innern verzweigt und mehrwertig ist, führt der

[1]) Z. B. Lamb, Hydrodynamik, S. 72–76, 252–254.

Wunsch, mit nur einer Ueberdeckung des Raumes auszukommen, auf den ersten Weg zurück: eine geeignete Verteilung von Quellen und Wirbeln auf den Uebergangsflächen des Riemannschen Raumes ersetzt die aus den anderen Ueberdeckungen kommende Strömung.

Die erwähnte Verwendung des Prinzips der Thomsonschen Bilder bietet auch eine Möglichkeit, von der indessen weiterhin kein Gebrauch gemacht werden soll, die äußere Aufgabe vollständig auf die innere zurückzuführen [1]). Innen- und Außenraum sind von 2 Strömungen erfüllt, die beide tangential zur Begrenzung verlaufen und dort stetig ineinander übergehen. Es werden sich also Druck und Moment der inneren Strömung von den entsprechenden Größen der äußeren Strömung nur im Vorzeichen unterscheiden. Das ist auch aus der analytischen Behandlung zu erkennen.

Nach (6), (7) ist der Innen- bezw. Außendruck:

$$\mathfrak{P}_{F,\,J} = \varrho \int_J \mathfrak{v}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho \int_J \mathfrak{v} \times \mathrm{curl}\,\mathfrak{v}\,d\tau,$$

$$\mathfrak{P}_{F,\,A} = -\mathfrak{P}_K + \varrho \int_{A'} \mathfrak{v}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho \int_{A'} \mathfrak{v} \times \mathrm{curl}\,\mathfrak{v}\,d\tau.$$

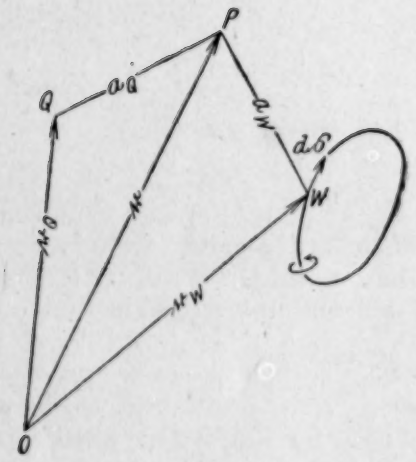


Abb. 1

Der Druck $\mathfrak{P}_K$ kann aber jetzt aufgefaßt werden als Innendruck der die ganze Kugel K, also J + A' erfüllenden, an F stetigen Strömung; also ist

$$\mathfrak{P}_K = \varrho \int_{J+A'} \mathfrak{v}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho \int_{J+A'} \mathfrak{v} \times \mathrm{curl}\,\mathfrak{v}\,d\tau.$$

Aus diesen 3 Gleichungen folgt in der Tat

$\mathfrak{P}_{F,\,J} = -\mathfrak{P}_{F,\,A}$; ebenso ist $\mathfrak{M}_{F,\,J} = -\mathfrak{M}_{F,\,A}$.

7. Synthetischer Aufbau der Strömung; Berechnung von A und $\mathfrak{G}$. Ein synthetischer Ausdruck für die Geschwindigkeit in einem Punkt P des Außenraumes ergibt sich aus der bekannten Formel, welche einen Vektor in einen quellenfreien und einen wirbelfreien Teil zerlegt. Daraus lassen sich dann die Konstanten A und $\mathfrak{G}$ berechnen. Für diese Untersuchung ist zuvor die Bezeichnung der Ortsvektoren zu verschärfen. Es sei (Abb. 1)

$\mathfrak{r}$ der Ortsvektor, welcher vom Anfangspunkt O nach dem Aufpunkt P führt, in welchem die Geschwindigkeit betrachtet wird,

$\mathfrak{r}_Q$ bezw. $\mathfrak{r}_W$ der Ortsvektor nach einem Quellpunkt Q bezw. einem Punkt W einer Wirbellinie,

$d\mathfrak{s} = d\mathfrak{r}_W$ das gerichtete Linienelement einer Wirbellinie,

a_Q bezw. a_W die Entfernung des Aufpunktes P von einem Quellpunkt Q bezw. einem Punkt W einer Wirbellinie.

Ferner soll das Zeichen ∇ der vektoriellen Differentiation, bezogen auf eine Funktion der Koordinaten zweier Punkte, als Index die Bezeichnung desjenigen Punktes erhalten, in dem die Differentiation ausgeführt wird; nur die Differentiation im Aufpunkt P soll mit ∇ ohne Index bezeichnet werden. Dabei ist zu bemerken, daß entsprechende Differentiationen einer Funktion einer Strecke in den beiden Endpunkten sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Also ist z. B.

$$\underset{P}{\nabla}\frac{1}{r} = \nabla\frac{1}{r} = -\underset{O}{\nabla}\frac{1}{r}; \quad \underset{P}{\nabla}\frac{1}{a_Q} = \nabla\frac{1}{a_Q} = -\underset{Q}{\nabla}\frac{1}{a_Q}.$$

Bei gegebenem Quellen- und Wirbelfeld läßt sich die Geschwindigkeit in einem Punkt des Feldes in folgender Weise darstellen:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_\infty - \mathrm{grad}\int_R \frac{\mathrm{div}\,\mathfrak{v}}{4\pi a_Q}\,d\tau + \mathrm{curl}\int_R \frac{\mathrm{curl}\,\mathfrak{v}}{4\pi a_W}\,d\tau \quad \ldots \quad (14),$$

[1]) Vergl. die Behandlung der Aufgabe bei Prandtl; insbes. I. Mitteilung Gleichung (8) S. 13.

wobei die Integrale über den ganzen Raum $R = J + A$ zu erstrecken sind. Diese Darstellung von $\mathfrak{v}$ setzt voraus, daß $\mathfrak{v}$ von der Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_\infty$ abgesehen im Unendlichen wie $\frac{1}{r^2}$ verschwindet. Da dies im Strömungsfeld eines geradlinigen Wirbels nicht der Fall ist, sind ins Unendliche laufende Wirbellinien im allgemeinen von der Betrachtung ausgeschlossen. Nur bei parallelen Wirbelfäden von endlichem Abstand und entgegengesetzt gleicher Zirkulation, wie sie etwa von der rückwärtigen Kante einer Tragfläche ausgehen, ist eine hinreichend starke Abnahme der Geschwindigkeit im Unendlichen gewährleistet, wenn man sie wie in § 4 im Endlichen schließt.

Der Ausdruck (14) für $\mathfrak{v}$ oder das zugehörige Geschwindigkeitspotential ist jetzt zur Bestimmung von A und $\mathfrak{S}$ nach fallenden Potenzen von r zu entwickeln. Der von dem Quellenfeld herrührende wirbelfreie Teil der Strömung

$$\mathfrak{v}_Q = -\operatorname{grad}\int_R \frac{\operatorname{div}\mathfrak{v}}{4\pi a_Q}\,d\tau$$

besitzt ein Geschwindigkeitspotential

$$\varphi_Q = -\int_R \frac{\operatorname{div}\mathfrak{v}}{4\pi a_Q}\,d\tau \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

Für $\frac{1}{a_Q}$ erhält man die Taylorsche Entwicklung

$$\frac{1}{a_Q} = \frac{1}{r} + \left(\mathfrak{r}_Q \cdot \underset{O}{\nabla}\right)\frac{1}{r} + \frac{1}{2!}\left(\mathfrak{r}_Q \cdot \underset{O}{\nabla}\right)^2 \frac{1}{r} + \ldots,$$

wobei der Aufpunkt P festgehalten wird und die Differentiation im Anfangspunkt O auszuführen ist. Hält man statt dessen den Anfangspunkt fest und differentiiert im Aufpunkt, so ergibt sich die Entwicklung von $\frac{1}{a_Q}$ nach Legendreschen Kugelfunktionen in der Form

$$\frac{1}{a_Q} = \frac{1}{r} - (\mathfrak{r}_Q \cdot \nabla)\frac{1}{r} + \frac{1}{2!}(\mathfrak{r}_Q \cdot \nabla)^2 \frac{1}{r} - \ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

Damit wird

$$\varphi_Q = -\frac{1}{r}\int_R \frac{\operatorname{div}\mathfrak{v}}{4\pi}\,d\tau + \int_R \frac{\operatorname{div}\mathfrak{v}}{4\pi}\,\mathfrak{r}_Q \cdot \nabla\frac{1}{r}\,d\tau - \ldots$$

$$= -\frac{1}{4\pi r}\int_R \operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau + \frac{\mathfrak{n}}{4\pi r^2}\cdot\int_R \mathfrak{r}_Q \operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau - \ldots \quad \ldots \quad (17).$$

Der Vergleich mit (9) oder (10) läßt sofort die Beiträge A_Q und $\mathfrak{S}_Q$ erkennen, welche das Quellenfeld zu A und $\mathfrak{S}$ liefert:

$$A_Q = -\frac{1}{4\pi}\int_R \operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau, \qquad \mathfrak{S}_Q = \frac{1}{4\pi}\int_R \mathfrak{r}_Q \operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau$$

Auch der von dem Wirbelfeld herrührende quellenfreie Teil der Strömung

$$\mathfrak{v}_W = \operatorname{curl}\int_R \frac{\operatorname{curl}\mathfrak{v}}{4\pi a_W}\,d\tau$$

besitzt unter den getroffenen Voraussetzungen ein Potential im Unendlichen. Setzt man $d\tau = d\mathfrak{f}\cdot d\mathfrak{s}$, wo $d\mathfrak{f}$ der orientierte Querschnitt einer Wirbelröhre, $d\mathfrak{s}$ das gerichtete Linienelement längs einer Wirbellinie L ist, und berücksichtigt, daß $\operatorname{curl}\mathfrak{v}$ und $d\mathfrak{s}$ parallel sind, so ist

$$\operatorname{curl}\mathfrak{v}\,d\tau = \operatorname{curl}\mathfrak{v}\,d\mathfrak{f}\cdot d\mathfrak{s} = \operatorname{curl}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}\,d\mathfrak{s}.$$

Abb. 2

Wenn man also durch das ganze Wirbelfeld eine (nicht geschlossene) Fläche F' (Abb. 2) legt, welche jede Wirbellinie einmal schneidet, so ist

$$\int_R \frac{\operatorname{curl}\mathfrak{v}}{4\pi a_W}\,d\tau = \frac{1}{4\pi}\int_{F'}\left(\operatorname{curl}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}\int_L \frac{d\mathfrak{s}}{a_W}\right).$$

Das Randintegral läßt sich nach dem Föpplschen Integralsatz (g) in ein Flächenintegral verwandeln über eine beliebige Fläche F″, die die Wirbellinie L zum Rand hat (unter Erweiterung des Sinnes der Bezeichnung a_W):

$$\int_L \frac{d\mathfrak{s}}{a_W} = \int_{F''} d\mathfrak{o} \times \nabla_W \frac{1}{a_W}.$$

Ferner ist nach dem Stokesschen Integralsatz (f)

$$\operatorname{curl} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f} = d\Gamma$$

die Zirkulation um die Wirbelröhre vom Querschnitt $d\mathfrak{f}$.

Nun läßt sich wieder die Differentiation von $\frac{1}{a_W}$ in einem Punkt von F″ unter Aenderung des Vorzeichens durch Differentiation in P ersetzen; dann wird

$$\mathfrak{v}_W = -\nabla \times \frac{1}{4\pi} \int_{F'} d\Gamma \int_{F''} d\mathfrak{o} \times \nabla \frac{1}{a_W} = \frac{1}{4\pi} \int_{F'} d\Gamma \int_{F''} \nabla \times \nabla \times \frac{d\mathfrak{o}}{a_W}.$$

Nach einer bekannten Umformung ist

$$\nabla \times \nabla \times \frac{d\mathfrak{o}}{a_W} = \nabla \nabla \cdot \frac{d\mathfrak{o}}{a_W} - \nabla \cdot \nabla \frac{d\mathfrak{o}}{a_W}.$$

Berücksichtigt man, daß $\frac{1}{a_W}$ außerhalb des Wirbelgebietes der Laplaceschen Gleichung genügt, so folgt

$$\mathfrak{v}_W = \nabla \frac{1}{4\pi} \int_{F'} d\Gamma \int_{F''} \nabla \frac{1}{a_W} \cdot d\mathfrak{o} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19).$$

Damit ist der von dem Wirbelfeld herrührende Teil der Geschwindigkeit als Gradient eines Geschwindigkeitspotentials

$$\varphi_W = \frac{1}{4\pi} \int_{F'} d\Gamma \int_{F''} \nabla \frac{1}{a_W} \cdot d\mathfrak{o} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

dargestellt, das einer zusammengesetzten räumlichen Verteilung von Doppelquellen entspricht. Entwickelt man wie in (16) $\frac{1}{a_W}$ nach Potenzen von $\frac{1}{r}$, so beginnt die Reihe für φ_W mit einem Glied 2. Ordnung:

$$\varphi_W = \frac{1}{4\pi} \int_{F'} d\Gamma \int_{F''} d\mathfrak{o} \cdot \nabla \frac{1}{r} + \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20').$$

Weitere Glieder sind für unseren Zweck nicht notwendig; denn der Vergleich mit (9) läßt bereits die Beiträge A_W und $\mathfrak{S}_W$ erkennen, die das Wirbelfeld zu A und $\mathfrak{S}$ liefert:

$$A_W = 0, \quad \mathfrak{S}_W = \frac{1}{4\pi} \int_{F'} d\Gamma \int_{F''} d\mathfrak{o} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21).$$

Um den letzteren Ausdruck umzuformen, so daß er wieder in der Gestalt eines Raumintegrals erscheint, bemerkt man, daß die Fläche $\mathfrak{F}'' = \int_{F''} d\mathfrak{o}$ zusammen mit dem Kegel, der ihre Berandung C mit dem Anfangspunkt verbindet, eine geschlossene Fläche bildet, die die orientierte Oberfläche Null besitzt. Also ist, wenn man auf dem Kegel die Normalenrichtung umkehrt, $\mathfrak{F}''$ der orientierten Oberfläche des Kegels gleich:

$$\int_{F''} d\mathfrak{o} = {}^1/_2 \int_C \mathfrak{r}_W \times d\mathfrak{s}.$$

Führt man jetzt wieder $\operatorname{curl} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f}$ für $d\Gamma$ ein und berücksichtigt den Parallelismus von $d\mathfrak{s}$ und $\operatorname{curl} \mathfrak{v}$, so folgt für $\mathfrak{S}_W$ der Wert:

$$\mathfrak{S}_W = \frac{1}{8\pi} \int_{F'} \operatorname{curl} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f} \int_C \mathfrak{r}_W \times d\mathfrak{s} = \frac{1}{8\pi} \int_R \mathfrak{r}_W \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}\, d\tau \quad \ldots \quad (21').$$

Durch Zusammenfassung von (18) und (21), (21′) ergeben sich folgende synthetische Werte von A und $\mathfrak{G}$:

$$A = -\frac{1}{4\pi}\int_R \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau, \quad \mathfrak{G} = \frac{1}{4\pi}\int_R \mathfrak{r}_Q \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau + \frac{1}{8\pi}\int_R \mathfrak{r}_W \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}\, d\tau \quad . \quad (22).$$

Da in den weiteren Entwicklungen der Aufpunkt P zunächst nicht mehr vorkommt, sind Verwechslungen nicht zu befürchten, wenn von nun an unter Weglassung der Indices $\mathfrak{r}$ für $\mathfrak{r}_Q$ und $\mathfrak{r}_W$ gesetzt wird.

8. Lösung der äußeren Aufgabe. Mit A und $\mathfrak{G}$ sind auch die Zusatzglieder in (13) bestimmt, nämlich

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\varrho A \mathfrak{v}_\infty &= -\varrho \mathfrak{v}_\infty \int_R \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau \\ 4\pi\varrho \mathfrak{v}_\infty \times \mathfrak{G} &= \varrho \mathfrak{v}_\infty \times \int_R \mathfrak{r} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau + {}^1/_2 \varrho \mathfrak{v}_\infty \times \int_R \mathfrak{r} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}\, d\tau \end{aligned}\right\} \quad . \quad (23).$$

Der 2. Summand des letzteren Ausdruckes läßt noch eine Umformung zu, die in formaler Hinsicht von Wichtigkeit ist. Mit Hilfe des Entwicklungssatzes bestätigt man folgende Identität:

$$\mathfrak{v}_\infty \times [\mathfrak{r} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}] - 2\,\mathfrak{r} \times [\mathfrak{v}_\infty \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}] = \mathfrak{r}\,(\mathfrak{v}_\infty \cdot \operatorname{curl} \mathfrak{v}) + \operatorname{curl} \mathfrak{v}\,(\mathfrak{v}_\infty \cdot \mathfrak{r}) - 2\,\mathfrak{v}_\infty\,(\mathfrak{r} \cdot \operatorname{curl} \mathfrak{v}).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit dem Raumelement $d\tau = d\mathfrak{f} \cdot d\mathfrak{s}$ einer Wirbelröhre von der Zirkulation $\gamma = \operatorname{curl} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f}$, so läßt sich die rechte Seite in die Form eines vollständigen Differentials einer einwertigen Funktion bringen:

$$\begin{aligned} &[\mathfrak{r}\,(\mathfrak{v}_\infty \cdot \operatorname{curl} \mathfrak{v}) + \operatorname{curl} \mathfrak{v}\,(\mathfrak{v}_\infty \cdot \mathfrak{r}) - 2\,\mathfrak{v}_\infty\,(\mathfrak{r} \cdot \operatorname{curl} \mathfrak{v})]\, d\mathfrak{f} \cdot d\mathfrak{s} \\ &\quad = [\mathfrak{r}\,(\mathfrak{v}_\infty \cdot d\mathfrak{s}) + d\mathfrak{s}\,(\mathfrak{v}_\infty \cdot \mathfrak{r}) - 2\,\mathfrak{v}_\infty\,(\mathfrak{r} \cdot d\mathfrak{s})]\, d\mathfrak{f} \cdot \operatorname{curl} \mathfrak{v} = \gamma\, d\,[\mathfrak{r}\mathfrak{v}_\infty \cdot \mathfrak{r} - \mathfrak{v}_\infty\, \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}]; \end{aligned}$$

infolgedessen besitzt das Integral über eine geschlossene Wirbelröhre und also auch über den ganzen Raum den Wert Null. Also ist auch

$$\int_R \mathfrak{v}_\infty \times [\mathfrak{r} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}]\, d\tau - 2\int_R \mathfrak{r} \times [\mathfrak{v}_\infty \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}]\, d\tau = 0.$$

Demnach kann das 2. Zusatzglied in folgende endgültige Form gebracht werden:

$$4\pi\varrho \mathfrak{v}_\infty \times \mathfrak{G} = \varrho \mathfrak{v}_\infty \times \int_R \mathfrak{r} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau + \varrho \int_R \mathfrak{r} \times [\mathfrak{v}_\infty \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}]\, d\tau \quad . \quad . \quad (23').$$

Jetzt ergibt sich die Lösung der äußeren Aufgabe in folgender Form:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P} &= -\varrho \int_R \mathfrak{v}_\infty \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau + \varrho \int_A \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau - \varrho \int_A \mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}\, d\tau \\ \mathfrak{M} &= -\varrho \int_R \mathfrak{r} \times \mathfrak{v}_\infty \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau + \varrho \int_A \mathfrak{r} \times \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau \\ &\quad + \varrho \int_R \mathfrak{r} \times [\mathfrak{v}_\infty \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}]\, d\tau - \varrho \int_A \mathfrak{r} \times [\mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}]\, d\tau \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Bemerkenswert ist für die formale Aehnlichkeit der Zusatzglieder mit den der Lösung der inneren Aufgabe entsprechenden Termen; sie geben die Lösung für das Innere der ins Unendliche wachsenden Kugel. Für $\mathfrak{v}_\infty = 0$ verschwinden sie; in diesem Fall unterscheidet sich die Lösung der äußeren Aufgabe nicht von der der inneren.

9. Diskrete Singularitäten. Wenn statt der Quellen- und Wirbelfelder nur diskrete ein- oder mehrfache Quellen und einzelne Wirbelfäden auftreten, so vereinfachen sich die in den Ausdrücken für $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ auftretenden Integrale. Da nämlich überall außer in den singulären Punkten div $\mathfrak{v}$ und curl $\mathfrak{v}$ verschwindet und $\mathfrak{v}$ endlich bleibt, genügt es die Integrale statt über die ganzen Gebiete J, A, R über beliebig kleine Teilgebiete zu nehmen, welche die Singularitäten enthalten. Man wird also die Quellpunkte durch Kugeln, die Wirbellinien durch Röhrenflächen einschließen, deren Radius gegen Null abnehmen soll.

Die Werte von A und $\mathfrak{G}$ ergeben sich, wenn man die Strömung synthetisch aufbaut. Das Geschwindigkeitspotential einer einfachen Quelle Q von der Ergiebigkeit e ist

$$\varphi_Q = \frac{-e}{4\pi r_Q} = \frac{-e}{4\pi}\left[\frac{1}{r} - (\mathfrak{r}_Q \cdot \nabla)\frac{1}{r} + \ldots\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Daraus liest man die Beiträge ab, die die Quelle zu A und $\mathfrak{G}$ liefert:

$$A_Q = -\frac{e}{4\pi}; \qquad \mathfrak{G}_Q = \frac{e}{4\pi}\mathfrak{r}_Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Das Geschwindigkeitspotential einer Doppelquelle D ergibt sich aus dem der einfachen Quelle durch einen Grenzübergang

$$\varphi_D = \frac{m}{4\pi}\mathfrak{t}\cdot\nabla\frac{1}{a_D} = \frac{m}{4\pi}\mathfrak{t}\cdot\nabla\frac{1}{r} + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Hier bedeutet $\mathfrak{t}$ einen Einheitsvektor in Richtung der Symmetrieachse der Strömung und im Sinn der positiven Geschwindigkeit; m das Moment der Doppelquelle, d. h. den Grenzwert des Produkts aus dem Abstand der Einzelquellen und ihrer Ergiebigkeit. Die Reihenentwicklung beginnt mit einem Glied 2. Ordnung; also sind die Beiträge zu A und $\mathfrak{G}$:

$$A_D = 0; \qquad \mathfrak{G}_D = \frac{m}{4\pi}\mathfrak{t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Quellen höherer Ordnung liefern weder zu A noch zu $\mathfrak{G}$ einen Beitrag. Das Geschwindigkeitspotential eines geschlossenen Wirbelfadens von der Zirkulation Γ ist nach (20):

$$\varphi_W = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_F \nabla\frac{1}{a_W}\cdot d\mathfrak{o} = \int_F \frac{\Gamma\, do}{4\pi}\,\mathfrak{n}\cdot\nabla\frac{1}{a_W} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Damit ist der Wirbelfaden durch eine flächenhafte Verteilung von Doppelquellen ersetzt, deren Moment die Flächendichte Γ besitzt und deren Achse in die Normalenrichtung $\mathfrak{n}$ einer Fläche F fällt, deren Begrenzung C in den Wirbelfaden fällt. Die Reihenentwicklung beginnt mit einem Glied 2. Ordnung:

$$\varphi_W = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_F d\mathfrak{o}\cdot\nabla\frac{1}{r} + \ldots = \frac{\Gamma}{4\pi}\mathfrak{F}\cdot\nabla\frac{1}{r} + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29').$$

Also liefert der Wirbelfaden zu A und $\mathfrak{G}$ die Beiträge

$$A_W = 0; \qquad \mathfrak{G}_W = \frac{\Gamma}{4\pi}\mathfrak{F} = \frac{\Gamma}{8\pi}\int_C \mathfrak{r}_W \times d\mathfrak{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Aus (26), (28), (30) lassen sich die synthetischen Werte zusammensetzen, die A und $\mathfrak{G}$ in einem Strömungsfeld annehmen, das im ganzen Raum R nur diskrete Singularitäten enthält:

$$A = -\frac{1}{4\pi}\sum_R e, \qquad \mathfrak{G} = \frac{1}{4\pi}\left[\sum_R e\,\mathfrak{r} + \sum_R m\,\mathfrak{t} + \sum_R \Gamma\,\mathfrak{F}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Zu A ist zu bemerken, daß es, wie übrigens auch in (22), gleichgültig ist, ob die Summation über den ganzen Raum R oder nur über den Außenraum A erstreckt wird, da die Summe der Ergiebigkeiten der im Innenraum J gelegenen Quellen von selbst Null ist. Mit A und $\mathfrak{G}$ sind auch die Zusatzglieder bestimmt.

10. Bestimmung von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$. Beim Auftreten diskreter Singularitäten sind noch folgende in (24) vorkommende Integrale umzuformen:

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \int \mathfrak{v}\,\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau; & J_3 &= \int \mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}\,d\tau;\\ J_2 &= \int \mathfrak{r}\times\mathfrak{v}\,\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau; & J_4 &= \int \mathfrak{r}\times[\mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}]\,d\tau \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

Macht man einen Quellpunkt mit der Ergiebigkeit e zum Mittelpunkt einer Kugel K_0 vom Radius δ, denkt sich dann den ganzen Innenraum von K_0 durch ein kontinuierliches Quellenfeld von konstanter Divergenz erfüllt, dessen Gesamtergiebigkeit e ist, so besitzt diese Quellenverteilung im Außenraum von K_0 dasselbe Feld wie der Quellpunkt. Dann ist nach dem Gaußschen Integralsatz (a)

$$e = -\int \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o} = \int \operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau = {}^4/_3\,\delta^3\pi\,\operatorname{div}\mathfrak{v}.$$

Infolgedessen wird

$$J_1 = \frac{3e}{4\delta^3\pi}\int \mathfrak{v}\, d\tau; \qquad J_2 = \frac{3e}{4\delta^3\pi}\int \mathfrak{r} \times \mathfrak{v}\, d\tau.$$

Um diese beiden Integrale zu berechnen, zerlegt man $\mathfrak{v}$ in eine Summe

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{v}^*,$$

deren erster Summand $\mathfrak{v}_0$ von dem im Innern der Kugel selbst gelegenen Quellenfeld und deren zweiter Summand $\mathfrak{v}^*$ von den übrigen Singularitäten und von $\mathfrak{v}_\infty$ herrührt. Aus Symmetriegründen verschwinden die Teilintegrale für $\mathfrak{v}_0$; also wird

$$J_1 = \frac{3e}{4\delta^3\pi}\int \mathfrak{v}^*\, d\tau; \qquad J_2 = \frac{3e}{4\delta^3\pi}\int \mathfrak{r} \times \mathfrak{v}^*\, d\tau$$

Nun kann man $\mathfrak{v}^*$ im Mittelpunkt von K_0 in eine Reihe entwickeln:

$$\mathfrak{v}^* = \mathfrak{v}_M{}^* + \mathfrak{d} \cdot \nabla\, \mathfrak{v}_M{}^* + \ldots,$$

wo $\mathfrak{d}$ ein Ortsvektor ist, dessen Absolutwert bei der Integration δ nicht übersteigt. Bei gliedweiser Integration erscheinen auch J_1 und J_2 in der Form von Potenzreihen in δ, die mit einem konstanten Glied beginnen. Dieses erste Glied bleibt beim Grenzübergang $\delta \to 0$ allein stehen; also ist (unter Weglassung des Index M beim Grenzübergang)

$$J_1 = \frac{3e}{4\delta^3\pi}\,\mathfrak{v}_M{}^*\int d\tau = e\,\mathfrak{v}^*, \quad J_2 = e\,\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}^* \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Auch für mehrfache Quellen verschwinden J_1 und J_2 nicht; so findet man für eine Doppelquelle[1])

$$J_1' = m\,\mathfrak{t} \cdot \nabla\, \mathfrak{v}^*, \quad J_2' = m\,\mathfrak{r} \times \mathfrak{t} \cdot \nabla\, \mathfrak{v}^* + m\,\mathfrak{t} \times \mathfrak{v}^* \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33').$$

Nicht ganz so einfach gestaltet sich die Berechnung von J_3 und J_4. Ein Wirbelfaden von der Zirkulation Γ wird ersetzt durch eine dünne Wirbelröhre von derselben Zirkulation

$$\int \mathrm{curl}\, \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f} = \Gamma.$$

Dann ist wegen des Parallelismus von $d\mathfrak{s}$ und curl $\mathfrak{v}$

$$J_3 = \int \mathfrak{v} \times \mathrm{curl}\, \mathfrak{v}\, d\tau = \int \mathfrak{v} \times d\mathfrak{s}\, d\Gamma.$$

Setzt man wieder wie oben $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{v}^*$, so entsteht eine Schwierigkeit, die auch bei anderen Untersuchungen über Wirbelbewegung auftritt: Man kann wohl an jeder beliebigen Stelle den Querschnitt der Wirbelröhre kreisförmig wählen und die Wirbelstärke gleichmäßig über die Kreisfläche verteilen; dann verschwindet an diesem Querschnitt das Integral $\int \mathfrak{v}_0\, d\Gamma$ aus Symmetriegründen. Aber man kann eine derartige Verteilung nicht längs der ganzen Röhre erreichen. Trotzdem verschwindet obiges Integral für jeden Querschnitt. Denkt man sich nämlich die Röhre in Teilröhren von gleicher Zirkulation $d\Gamma$ zerlegt, was längs der ganzen Röhre möglich ist, so bringen an jedem Querschnitt 2 beliebig herausgegriffene Teilquerschnitte jeder am Ort des andern entgegengesetzt gleiche Geschwindigkeiten hervor. Mithin ist

$$\int \mathfrak{v}_0 \times d\mathfrak{s}\, d\Gamma = 0.$$

Wenn man jetzt im 2. Summanden $\mathfrak{v}^*$ wie oben an einer Stelle des Querschnittes in eine Reihe entwickelt, so verschwinden beim Grenzübergang in J_3 alle Glieder mit Ausnahme des ersten; also wird

$$J_3 = \Gamma \int \mathfrak{v}^* \times d\mathfrak{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34);$$

eine analoge Betrachtung ergibt

$$J_4 = \Gamma \int \mathfrak{r} \times [\mathfrak{v}^* \times d\mathfrak{s}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34\,\mathrm{a}).$$

Somit erhält man für $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$, wenn die Strömung im ganzen Raum nur diskrete einfache Quellen, Doppelquellen und Wirbellinien enthält, folgende Ausdrücke:

[1]) Vergl. die S. 409 unter (1) zitierte Abhandlung S. 218.

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{P} &= -\varrho \sum_{R} e\,\mathfrak{v}_\infty + \varrho \sum_{A} e\,\mathfrak{v}^* + \varrho \sum_{A} m\,\mathfrak{t}\cdot\nabla\,\mathfrak{v}^* - \varrho \sum_{A} \Gamma \int \mathfrak{v}^* \times d\mathfrak{s} \\ \mathfrak{M} &= -\varrho\,[\sum_{R} e\,\mathfrak{r} + \sum_{R} m\,\mathfrak{t} + \sum_{R} \Gamma\,\mathfrak{F}] \times \mathfrak{v}_\infty \\ &\quad + \varrho\,[\sum_{A} e\,\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}^* + \sum_{A} m\,\mathfrak{t} \times \mathfrak{v}^* + \sum_{A} m\,\mathfrak{r} \times \mathfrak{t}\cdot\nabla\,\mathfrak{v}^* - \sum_{A} \Gamma \int \mathfrak{r} \times [\mathfrak{v}^* \times d\mathfrak{s}]]\end{aligned}\right\} \quad (35).$$

Durch eine ähnliche Umformung wie in (23′) kann man noch $-\Sigma\,\Gamma\,\mathfrak{F} \times \mathfrak{v}_\infty$ durch $\Sigma\,\Gamma \int \mathfrak{r} \times [\mathfrak{v}_\infty \times d\mathfrak{s}]$ ersetzen und damit die formale Aehnlichkeit der Zusatzglieder mit den bei der inneren Aufgabe auftretenden Gliedern auch für die Wirbellinien herstellen.

11. Schlußbemerkung. Die Behandlung der entsprechenden ebenen Aufgabe führt zwar, am besten mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln, zu ähnlichen Ergebnissen wie im Raum; indessen können diese nicht in einfacher Weise aus den hier abgeleiteten Sätzen durch Grenzübergang erhalten werden. Ein wesentlicher Unterschied liegt darin, daß in der Ebene Wirbelpunkte, die den Stabwirbeln im Raum entsprechen, nicht ausgeschlossen zu werden brauchen; im Gegenteil sind sie von größtem und leicht berechenbarem Einfluß auf Kraft[1]) und Moment. Die entstehenden Formeln enthalten als einfachste Fälle die Kutta-Joukowskische Gleichung und die Blasiusschen Formeln, deren Gültigkeitsbereich sie erheblich erweitern. 171

Potentialströmung durch Gitter.[2])

Von **E. KÖNIG** in Dresden.

Die Erfolge der Potentialtheorie in der Aerodynamik legen es nahe, diese Theorie auch auf Fragen der Turbinenlehre anzuwenden. Dabei hat man es mit der Strömung durch die Reihe der Turbinenkanäle zu tun, die man als ein regelmäßiges »Gitter« idealisieren kann. Die folgende Abhandlung hat zum Ziele, besondere Fragen, die bei Strömung durch Gitter auftreten, unter den Voraussetzungen, die die Potentialtheorie für das zweidimensionale Gebiet macht, zu diskutieren.

1. Die Joukowskische Theorie und ihre Erweiterung auf Gitter. Die Joukowskische Theorie geht bekanntlich aus von der konformen Abbildung des Strömungsgebietes in der Umgebung einer ebenen Platte auf das Gebiet im Außenraum eines Kreiszylinders. Von der Platte und dem Zylinder kommen dabei nur die ebenen Schnitte, Gerade bezw. Kreis, in Betracht. Statt der Abbildung auf das Aeußere des Kreises kann man auch die auf die Halbebene nehmen. Um die Analogie zwischen der Joukowskischen Theorie und der hier angewandten Methode hervortreten zu lassen, stellen wir die Joukowskische Theorie folgendermaßen dar: Der Schnitt einer ebenen Platte mit einer z-Ebene senkrecht zur Platte sei gegeben durch die Strecke $A\,B$, die gegen die negative x-Achse unter dem Winkel α geneigt ist. Nun richten wir die Joukowskische Abbildung so ein, daß die z-Ebene außerhalb der Strecke $A\,B$ auf die Halbebene $\eta > 0$ einer ζ-Ebene abgebildet wird. Dabei soll die reelle Achse der ζ-Ebene das Bild von $A\,B$ werden. Die Abbildungsfunktion lautet:

$$\frac{z-A}{z-B} = e^{-i\pi\alpha}\zeta^2.$$

In A und B der z-Ebene liegen Vorderkante und Hinterkante des Profils. Die Vorderkante A geht in den Punkt $\zeta = 0$ über, die Hinterkante B in den Punkt $\zeta = \infty$. Der Punkt $z = \infty$ wird $\zeta = i$. Der Oberseite von $A\,B$ entspricht der positive Halbstrahl der ξ-Achse und der Unterseite von $A\,B$ der negative Halbstrahl der ξ-Achse. In dieser Darstellung läßt sich die Joukowskische Theorie auch auf kreisbogenförmige Profile, dicke Profile und an den Enden zugespitzte Profile anwenden[3]).

[1]) Vergl. die S. 409 unter (1) zitierte Abhandlung S. 221 bis 224.

[2]) Auszug aus einer von der philosophischen Fakultät der Universität Göttingen angenommenen Dissertation.

[3]) Vergl. v. Kármán-Trefftz: Potentialströmung um gegebene Tragflächenquerschnitte. Ztschr. f. Flugtechnik u. Motor-Luftschiffahrt, 1918.

2. Die Abbildung. Es ist nun unsere Aufgabe, diese Methode für ein Gitter mit unendlich vielen Schaufeln auszubilden. Es sei ein Gitter von unendlich vielen, geradlinigen, unendlich dünnen Konturen (Schaufeln) und »geneigter Gitterachse«, die die Enden der Schaufel verbindet, gegeben (Abb. 1). Führen wir ein Koordinatensystem so ein, daß die horizontal liegenden Schaufeln die Richtung für die x-Achse geben, und eine von ihnen auf der x-Achse liegt; ferner, daß die Gitterachse mit der positiven Richtung der x-Achse einen Winkel $\frac{\pi}{2} + \alpha$ bildet, die Gitterachse gegen die y-Achse also um den Winkel α geneigt ist. Der Abstand zweier Schaufeln längs der Gitterachse sei t. Legen wir durch die Schaufeln parallel der x-Achse Geraden, so wird die ganze x-y-Ebene in parallele Streifen aufgeteilt.

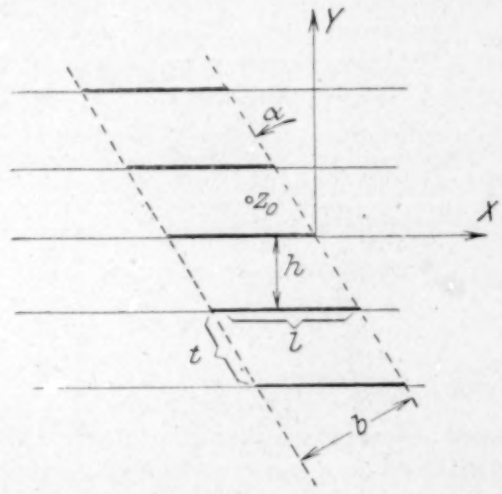


Abb. 1

Ist nun in dieser Ebene, die als z-Ebene bezeichnet wird, ein Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ gegeben, so gelangt man zu dem kongruenten Punkte im benachbarten Streifen, wenn man von z_0 zu $z_0 + ite^{i\alpha}$ geht, d. h. in der x-Richtung um das Stück $t \sin \alpha$ nach links und in der y-Richtung um $t \cos \alpha$ nach oben fortschreitet. Ein solcher Streifen von der Breite $t \cos \alpha$ stellt also für $z = x + iy$ einen Periodenstreifen dar.

Wird ein solcher Periodenstreifen der z-Ebene auf eine ζ^*-Ebene konform durch

$$\zeta^* = e^{2\pi e^{-i\alpha}\frac{z}{t}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

abgebildet, so überdeckt die Abbildung der übrigen Periodenstreifen jedesmal die ζ^*-Ebene in gleicher Weise, d. h. so, daß kongruente Punkte zu demselben ζ^*-Werte gehören; somit ergibt sich folgende Abbildung der z-Ebene auf die unendlich vielblättrige ζ^*-Ebene. Es entspricht $\zeta^* = 0$ dem Punkte $z = -\infty$ und $\zeta^* = +\infty$ dem Punkte $z = +\infty$. Geht man nun von einem Punkte z zu dem kongruenten Punkte $z + ite^{i\alpha}$, so wird

$$\zeta^*(z + ite^{i\alpha}) = \zeta^*(z)\, e^{2\pi i} = \zeta^*(z).$$

Um die Abbildung auf die ζ^*-Ebene zu übersehen, benutzen wir die logarithmische Schreibweise:

$$\ln \zeta^* = 2\pi \frac{z}{t}(\cos \alpha - i \sin \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Bekommt der Realteil oder Imaginärteil von $\ln \zeta^*$ einen konstanten Wert, so entsprechen ihm in der z-Ebene Geraden parallel und senkrecht zur Gitterachse. In der ζ^*-Ebene entsprechen dem Realteil Kreise um den Nullpunkt und dem Imaginärteil Geraden durch den Nullpunkt. Nun war in der z-Ebene das Koordinatensystem so gewählt, daß die als geradlinig vorausgesetzten Schaufeln in Richtung der x-Achse fallen. Diese schneiden aber die Geraden, die $\Re(\ln \zeta^*) = \text{konst.}$ entsprechen, unter konstantem Winkel. Also wird in der ζ^*-Ebene die Schaufel sich auf ein Kurvenstück abbilden, das die Radien durch den Nullpunkt bezw. die Kreise um den Nullpunkt unter konstantem Winkel schneidet, also auf ein Stück einer logarithmischen Spirale.

In der ζ^*-Ebene haben wir also folgende Abbildung der z-Ebene, die wir der Anschaulichkeit wegen als Strömung beschreiben, d. h. wir fassen die Bilder der Geraden $y = \text{konst.}$ als Stromlinien, die Graden $x = \text{konst.}$ als Potentiallinie einer Potentialströmung in der ζ^*-Ebene auf, und zwar geht die Strömung in logarithmischen Spiralen von der Quelle $\zeta^* = 0$ zur Senke $\zeta^* = \infty$. Ebenso sind die Bilder der Potentiallinien $x = \text{konst.}$ logarithmische Spiralen, die auf den logarithmischen Spiralen $y = \text{konst}$ senkrecht stehen. Beide kommen aus dem Punkte $\zeta^* = 0$ heraus, und zwar schneiden die Linien $y = \text{konst.}$ die Geraden durch den Nullpunkt unter dem Winkel α. Wir erhalten also eine Strömung, bei der im Nullpunkte eine Quelle von der Ergiebigkeit $\Re(\ln \zeta^*)$ und ein Wirbelfaden mit der Zirkulation $\Im(\ln \zeta^*)$ liegt. Dieses Zusammenfallen von Quelle und Wirbelfaden bezeichnen wir kurz als »Wirbelquelle«. Natürlich liegt dem entsprechend in dem unendlich fernen Punkte eine »Wirbelsenke«. Wir bezeichnen das Bild der Schaufel (d. h. das Stück der logarithmischen Spirale $y = 0$) mit $H - V$ (H Hinterkante, V Vorderkante). Jetzt bilden wir weiter das Gebiet um das

Schaufelbild in der ζ^*-Ebene auf die obere ζ-Halbebene ab ($\zeta = \xi + i\eta$). Bei dieser Abbildung möge die Wirbelquelle und die Wirbelsenke in die Punkte $\zeta = \zeta_0$ und $\zeta = \zeta_1$ rücken. Die Schaufel gehe in die ξ-Achse über und zwar die Vorderkante in den Nullpunkt und die Hinterkante in das Unendlichferne. Diese Abbildung erreicht man offenbar dadurch, daß man Wirbelquelle und Wirbelsenke an der ξ-Achse spiegelt, wodurch diese Stromlinie wird. Wir können nun in einfacher Weise die Beziehung zwischen der z-Ebene und der ζ-Ebene herstellen. Betrachten wir z als Funktion von ζ, so muß nach dem Vorhergehenden zunächst an den Stellen $\zeta = \zeta_0$ und $\zeta = \zeta_1$ eine Wirbelquelle bezw. eine Wirbelsenke liegen. In der unteren Hälfte der ζ-Ebene liegen die Spiegelbilder der Wirbelquelle und der Wirbelsenke in $\bar{\zeta}_0$ und $\bar{\zeta}_1$.

Die Wirbelquelle und Wirbelsenke wird dargestellt durch die Funktion

$$C e^{i\alpha} \ln \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \zeta_1}.$$

Entsprechend der Spiegelung fügen wir die konjugierte Funktion hinzu und erhalten:

$$z = C \left\{ e^{i\alpha} \ln \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \zeta_1} + e^{-i\alpha} \ln \frac{\zeta - \bar{\zeta}_0}{\zeta - \bar{\zeta}_1} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

3. Beziehung zwischen den geometrischen Größen der Schaufelanordnung und den Konstanten der Abbildungsfunktion. Wir wollen nun die Beziehungen zwischen den geometrischen Größen der Schaufelanordnung und den Konstanten ζ_0 und ζ_1 herstellen. Dem Punkte $\zeta = \zeta_0$ entspricht $z = -\infty$ (Abb. 2) und $\zeta = \zeta_1$ der Punkt $z = +\infty$ Die Ableitung der Abbildungsfunktion

$$\frac{dz}{d\zeta} = C \left\{ e^{i\alpha} \frac{(\zeta_0 - \zeta_1)}{(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_1)} + e^{-i\alpha} \frac{(\bar{\zeta}_0 - \bar{\zeta}_1)}{(\zeta - \bar{\zeta}_0)(\zeta - \bar{\zeta}_1)} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

besteht ebenfalls, wie die Abbildungsfunktion selber, aus der Summe zweier konjugiert-komplexer Größen. Für reelle Werte von ζ wird also auch $\frac{dz}{d\zeta}$ reell, und somit ist das Bild der ξ-Achse horizontal. Der Ausdruck (4) verschwindet für zwei Werte von ζ. Wir erhalten also zwei Verzweigungspunkte, die der Vorderkante V und der Hinterkante H der Schaufel entsprechen, und wir wollen verlangen, daß der eine in den Nullpunkt fällt, der andere in das Unendlichferne. Diese Bedingungen bestimmen ζ_0 und ζ_1. Für $\zeta = 0$ soll also $\frac{dz}{d\zeta} = 0$ sein,

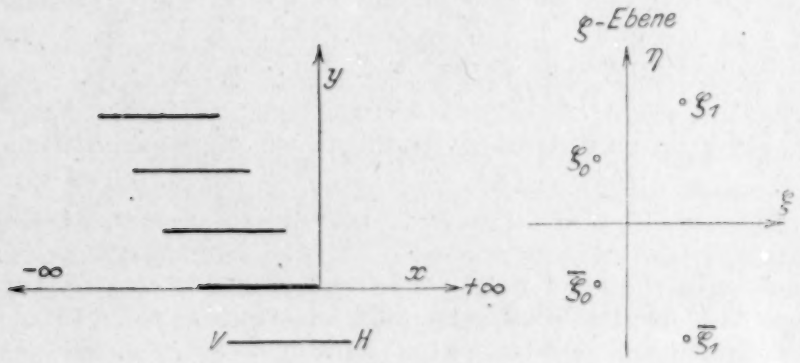


Abb. 2

und für $\zeta = \infty$ muß $\frac{dz}{d\zeta}$ von der dritten Ordnung verschwinden. Schreiben wir die Gl. (4) in der Form:

$$\frac{dz}{d\zeta} = C \left\{ \frac{e^{i\alpha}(\zeta_0 - \zeta_1)(\zeta - \bar{\zeta}_0)(\zeta - \bar{\zeta}_1) + e^{i\alpha}(\bar{\zeta}_0 - \bar{\zeta}_1)(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_1)}{(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \bar{\zeta}_0)(\zeta - \bar{\zeta}_1)} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

so muß im Zähler das Glied mit ζ^2 verschwinden, damit die Bedingung im Unendlichen erfüllt ist, und das absolute Glied muß gleich Null werden, damit $\zeta = 0$ Verzweigungspunkt wird, d. h. es muß

$$e^{i\alpha}(\zeta_0 - \zeta_1) + e^{-\alpha}(\bar{\zeta}_0 - \bar{\zeta}_1) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und

$$e^{i\alpha}(\zeta_0 - \zeta_1)\bar{\zeta}_0\bar{\zeta}_1 + e^{-i\alpha}(\bar{\zeta}_0 - \bar{\zeta}_1)\zeta_0\zeta_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

sein. Setzen wir (Abb. 3)

$$\zeta_0 - \zeta_1 = d e^{i\delta} \quad , \quad \bar{\zeta}_0 - \bar{\zeta}_1 = d e^{-i\delta},$$

so wird nach Gl. (6)

$$\cos(\alpha + \delta) = 0 \text{ oder } \alpha + \delta = {}^1/_2\,\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Setzen wir ferner $\zeta_0 = r_0 e^{i\vartheta_0}$, $\zeta_1 = r_1 e^{i\vartheta_1}$, $\bar{\zeta}_0 = r_0 e^{-i\vartheta_0}$, $\bar{\zeta}_1 = r_1 e^{-i\vartheta_1}$, so folgt aus Gl. (7) bei Berücksichtigung von (8)

$$\sin(\vartheta_0 + \vartheta_1) = 0 \quad \text{und somit} \quad \vartheta_0 + \vartheta_1 = \pi.$$

Gl. (5) erhält dann die Form:

$$\frac{dz}{d\zeta} = -Cd^2 \frac{2\zeta\cos\alpha}{(\zeta-\zeta_0)(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\overline{\zeta_0})(\zeta-\overline{\zeta_1})} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Die Punkte ζ_0 und ζ_1 müssen also, wenn die Verzweigungspunkte (Schaufelenden) in den Nullpunkt und das Unendlichferne fallen, auf zwei Halbstrahlen liegen, die symmetrisch zur η-Richtung liegen. Die Lage der Punkte ζ_0 und ζ_1 auf diesen Halbstrahlen ist nach Gl. (8) so zu wählen, daß ihre Verbindungsstrecke den Winkel $\delta = \pi/2 - \alpha$ mit der ξ-Achse bildet. Wegen der Willkürlichkeit des Maßstabes in der ζ-Ebene (Gl. (3) ist homogen und vom Grade Null in ζ) ist die Gerade nur der Richtung nach bestimmt, ihre Lage ist beliebig.

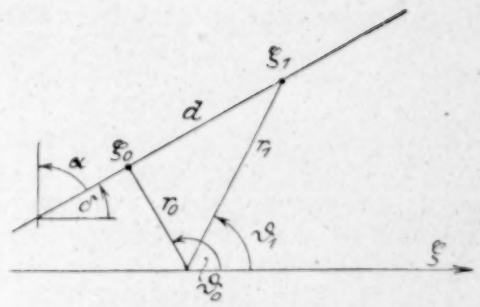


Abb. 3

Durch die Abbildung geht nun der Punkt $\zeta = \infty$ in den Punkt $z = 0$ über, dadurch ist in der z-Ebene der Nullpunkt des Koordinatensystems bestimmt. Dem Punkt $\zeta = 0$ entspricht dann die Vorderkante

$$z_0 = 2C\left\{\cos\alpha \ln\frac{r_0}{r_1} - (\vartheta_0 - \vartheta_1)\sin\alpha\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

z_0 ist negativ, wie wir sehen werden, entsprechend der Festsetzung, daß die Vorderkante links von der Hinterkante liegen soll (siehe Abb. 2). Da die Hinterkante im Nullpunkt liegt, gibt der Absolutbetrag von z_0 die Schaufellänge l an.

Wird ferner in der ζ-Ebene von einem beliebigen Punkte der ξ-Achse aus ein geschlossener Weg durchlaufen, z. B. einmal um den Punkt ζ_0 herum, so daß der Punkt ζ_0 dauernd zur Linken bleibt, und wird über diesen Weg integriert, so wird

$$\int_{\zeta_0} dz = Ce^{i\alpha} 2\pi i.$$

In dem Bilde dieses Weges in der z-Ebene kehren wir nicht zum Ausgangspunkt zurück, sondern kommen zu dem kongruenten Punkte der nächsten Schaufel. Ein Umlauf von $\zeta = 0$ um $\zeta = \zeta_0$ herum nach $\zeta = 0$ zurück ergibt also in der z-Ebene einen Weg von einer Schaufelvorderkante zur nächsten. Der Imaginärteil von $Ce^{i\alpha} \cdot 2\pi i$ liefert den Abstand der Schaufeln

$$h = 2\pi C\cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

und der Realteil die Staffelung

$$p = -2\pi C\sin\alpha.$$

Es fragt sich nun, wie wir ζ_0 und ζ_1 zu wählen haben, um ein vorgegebenes Gitter abzubilden. Aus der Zusammenfassung von Gl. (10) und (11) ergibt sich:

$$\pi\frac{l}{h} = \ln\frac{r_0}{r_1} - (\vartheta_0 - \vartheta_1)\,\mathrm{tang}\,\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Berücksichtigt man, daß $\vartheta_0 = \pi - \vartheta_1$ ist und

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{\sin(\vartheta_1 - \delta)}{\sin(\vartheta_1 + \delta)} = -\frac{\cos(\vartheta_1 + \alpha)}{\cos(\vartheta_1 - \alpha)}$$

wie es aus Abb. 3 abzulesen ist, so folgt

$$\mathrm{tang}\,\vartheta_1 = \frac{1 + \frac{r_0}{r_1}}{1 - \frac{r_0}{r_1}}\,\mathrm{cotang}\,\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

und als Bestimmungsgleichung für ϑ_1:

$$\pi\frac{l}{h} = \ln\frac{\sin(\vartheta_1 - \delta)}{\sin(\vartheta_1 + \delta)} - (\pi - 2\vartheta_1)\,\mathrm{tang}\,\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14),$$

denn l, h und $\delta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ sind durch ein vorgelegtes Gitter bestimmt. Für $\vartheta_1 = {}^1/_2\,\pi$ wird $\frac{l}{h}$ gleich Null und für $\vartheta_1 = \delta$ wird es negativ unendlich. Da l infolge der Wahl des Koordinatensystems negativ ist, werden durch die Werte für ϑ_1 von ${}^1/_2\,\pi$ bis δ vorkommende Fälle beherrscht. $\vartheta_1 < \delta$ ist ausgeschlossen, weil sonst ζ_0 oder ζ_1 in die

untere Halbebene fällt. $\vartheta_1 > \frac{\pi}{2}$ liefert nach Vertauschung von ζ_0 und ζ_1 das gleiche Resultat wie oben.

Ferner folgt aus der unendlichen Vieldeutigkeit des Logarithmus, daß sich alle Periodenstreifen in gleicher Weise auf die obere ζ-Halbebene abbilden.

Für die praktische Rechnung können folgende Näherungsformeln benutzt werden:

$$\frac{l}{h} \text{ klein: } 1 - \frac{r_0}{r_1} = \frac{b}{t}\left[1 - \frac{b}{2t} + \left(\frac{b}{2t}\right)^2 \left(1 + \frac{2\cos 2\alpha}{3\cos^2\alpha}\right)\right],$$

$$\frac{l}{h} \text{ groß: } \frac{r_0}{r_1} = e^{2\alpha \tan\alpha - \pi \frac{l}{h}},$$

wenn $b = \frac{l}{\cos\alpha}$ die »Gittertiefe« und $t = \frac{h}{\cos\alpha}$ die »Gitterteilung« ist. (Siehe Abb. 1)

4. Die Stromfunktion. Zur Stromfunktion gelangen wir, wenn wir fordern, daß die Strömung von $z = -\infty$ kommen soll, dort unter einem bestimmten Winkel gegen die x-Achse geneigt ist und nach $z = +\infty$ abfließen soll, mit der Bedingung, daß an der Hinterkante der Schaufel die Strömungsgeschwindigkeit endlich bleibt. Durch die Abbildung sind die Punkte ζ_0 und ζ_1 gegeben. Legen wir in sie eine Wirbelquelle bezw. eine Wirbelsenke; damit die ξ-Achse Stromlinie wird, muß das Spiegelbild hinzugenommen werden. Ist Q das Maß für die Quellstärke und S das Maß für die Senkstärke, so lautet der Ansatz:

$$\Omega(z) = \Omega[f(\zeta)] = \omega(\zeta) = CQ\left[e^{-i\sigma}\ln(\zeta - \zeta_0) + e^{i\sigma}\ln(\zeta - \overline{\zeta_0})\right] + CS\left[e^{-i\tau}\ln(\zeta - \zeta_1) + e^{i\tau}\ln(\zeta - \overline{\zeta_1})\right] \quad . \quad . \quad (15),$$

wobei σ und τ von der Normalen zur Gitterachse links herum positiv gezählt werden. Die Geschwindigkeitskomponenten in der x-Richtung bezw. y-Richtung sind:

$$u_{-\infty} = Q\cos(\alpha + \sigma); \quad u_{+\infty} = S\cos(\alpha + \tau),$$
$$v_{-\infty} = Q\sin(\alpha + \sigma); \quad v_{+\infty} = S\sin(\alpha + \tau).$$

Die Zirkulation um eine einzelne Schaufel bestimmt sich aus der Forderung der endlichen Geschwindigkeit an der Hinterkante der Schaufel. Ist die Zirkulation bekannt, so ist damit der Zusammenhang zwischen Anströmrichtung und Abflußrichtung im Unendlichen gegeben, also die Beziehung zwischen Q, S, σ, τ.

Der Hinterkante entspricht in der ζ-Ebene der Punkt $\zeta = \infty$. In ihm war $\frac{dz}{d\zeta} \sim \frac{c}{\zeta^3} + \ldots$. Soll nun $\frac{d\Omega(z)}{dz}$ für $\zeta = \infty$ einen endlichen Wert erhalten, so muß $\frac{d\omega(\zeta)}{d\zeta}$ ebenfalls von der dritten Ordnung Null werden. Eine Reihenentwicklung im Unendlichen ergibt:

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{2C}{\zeta}(Q\cos\sigma + S\cos\tau) + \frac{2C}{\zeta^2}\left[Qr_0\cos(\vartheta_0 - \sigma) + Sr_1\cos(\vartheta_1 - \tau)\right] + \frac{2C}{\zeta^3}\left\{Cr_0^2\cos(2\vartheta_0 - \sigma) + Sr_1^2\cos(2\vartheta_1 - \tau)\right\} + \ldots\ldots$$

Damit nun das Nullwerden dritter Ordnung für $\zeta = \infty$ eintritt, müssen die Zähler der Glieder mit $\frac{1}{\zeta}$ und $\frac{1}{\zeta^2}$ jedes für sich gleich Null werden. So ergeben sich die beiden folgenden Gleichungen:

$$Q\cos\sigma = -S\cos\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

und

$$Qr_0\cos(\vartheta_0 - \sigma) = -Sr_1\cos(\vartheta_1 - \tau) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Gl. (16) ist die Kontinuitätsbedingung, denn diejenige Flüssigkeitsmenge, die senkrecht auf das Gitter zufließt, muß auch in senkrechter Richtung abfließen.

Die durch die Abbildung gegebenen Größen sind r_0, r_1, ϑ_0, ϑ_1; Q und σ sind durch das Anströmen bestimmt. Durch die beiden Gl. (16) und (17) werden S und τ in Abhängigkeit von diesen Größen festgelegt, d. h. für $z = +\infty$ die Strömungsgeschwindigkeit und die Stromrichtung. Mithin ist auch die Ablenkung, die die Strömung durch das Gitter erfährt, bestimmt. Sie überträgt auf das Gitter eine Kraft, die nach zwei Komponenten zerlegt werden kann, und die mit Rücksicht auf die Anwendung auf die Turbinentheorie »Tangentialschub T« und »Axialschub W« heißen.

5. Tangentialschub und Axialschub. Von praktischem Interesse ist nun die Frage, wie hängen Zufluß- und Abflußrichtung von der gegenseitigen Lage der Schaufeln ab, also von ihrer Länge, von ihrem gegenseitigen Abstande und von der Staffelung. Als

Beziehung zwischen Zufluß- und Abflußrichtung ergibt sich mit Rücksicht auf oben angeführte Gleichungen:

$$\text{tang}\,\sigma - \text{tang}\,\tau = \left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right) \frac{\sin(\alpha + \sigma)}{\cos\alpha\,\cos\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Dieser Wert ist proportional dem Tangentialschub T. Nennen wir T_∞ den Wert den T für den Grenzfall $\frac{l}{h} = \infty$ annimmt, und bilden wir den Quotienten $\frac{T}{T_\infty} = 1 - \frac{r_0}{r_1}$, so gibt dieser Quotient an, wie groß für ein bestimmtes $\frac{l}{h}$ der Tangentialschub ist im Vergleich zu dem, der sich für den günstigsten Fall $\frac{l}{h} = \infty$ erreichen ließe. Aus Abb. 4 ist für den Sonderfall $\sigma = 0^0$ $\frac{T}{T_\infty}$ als Ordinate aufgetragen, $\frac{b}{t}$ als Abszisse. Um die Abhängigkeit von α zum Ausdruck zu bringen, sind die Kurven für $\alpha = 15^0$, $\alpha = 30^0$ und $\alpha = 45^0$ gezeichnet. Es zeigt sich, daß man in der Praxis gute Wasser- bzw. Luftführung auch durch kurze und weitstehende Schaufeln erreichen kann, was auch die neuesten Erfahrungen bestätigen. (Vergl. Oesterlen, Schnellaufende Wasserturbinen, Zeitschr. Ver. deutsch. Ing. Nr. 16, 1921.)

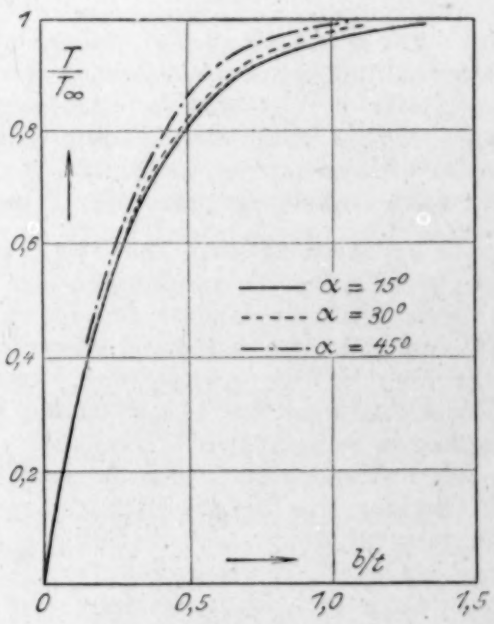


Abb. 4

Andererseits läßt sich T mit dem Auftrieb einer Einzelfläche A vergleichen. Der Auftrieb einer Einzelfläche ist nach Joukowski

$$A = \frac{\gamma}{g}\, U J$$

$\left(\frac{\gamma}{g} = \text{Dichte},\ U = \text{Anströmgeschwindigkeit},\ J = \text{Zirkulation}\right)$. Aus der Zusammenfassung der oben angeführten Gleichungen folgt:

$$\frac{T}{A} = \frac{\left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right)\frac{t}{b}}{\pi\cos\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Der Faktor $\frac{1}{\cos\sigma}$ rührt von dem Richtungsunterschied von T und A her. Beschränken wir uns auf den Fall $\sigma = 0$, so gilt für $\frac{b}{t}$ klein

$$\frac{T}{A} = 1 - \frac{\pi\frac{b}{t}}{2} + \left(\frac{\pi\frac{b}{t}}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{2\cos 2\alpha}{3\cos^2\alpha}\right).$$

Der Wert von T nähert sich also bei Vergrößerung des Schaufelabstandes ($t = \infty$) dem Werte A, d. h. die aufgestellte Formel geht für diesen Spezialfall in die Joukowskische für eine Einzelplatte über.

6. Gekrümmte Schaufeln und Schaufeln mit endlicher Dicke. Krummlinige Gitterprofile und Profile von endlicher Dicke werden analog erzeugt wie krummlinige Einzelprofile. Als Bild eines solchen Profils wählen wir in der ζ-Ebene eine Gerade. Geht die Gerade durch den Nullpunkt und ist sie unter dem Winkel β gegen die ξ-Achse geneigt, so ist ihr Bild eine unendlichdünne, gekrümmte Schaufel, deren Endtangenten wegen der Singularität in den Punkten $\zeta = 0$ und $\zeta = \infty$ mit der x-Achse die Winkel 2β bezw. $\pi - 2\beta$ einschließen. β ist ein Maß für die Krümmung. Das Bild dicker Profile in der ζ-Ebene ist eine Gerade, die an dem Nullpunkt vorbeigeht. Die so gefundenen Profile stimmen mit den in der Praxis verwandten gut überein. Dicke Profile können wir aber auch bilden, wenn die Oberseite und Unterseite des Profils in der ζ-Ebene durch Halbstrahlen gebildet werden, die im Nullpunkt um $k\pi$ gegeneinander geneigt sind, ganz in Analogie zu der in der Einleitung erwähnten Methode [1]).

[1]) Vergl. v. Karman-Trefftz, a. a. O.

Die Stromfunktion für gekrümmte Profile erhalten wir ganz analog wie oben durch Spiegelung von ζ_0 und ζ_1 an der Geraden, die das Bild der Schaufel ist. Bei gekrümmten Profilen läßt sich neben glattem Abfluß an der Hinterkante auch noch stoßfreier Eintritt erzielen. σ und τ werden dann durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{\left(\frac{r_0}{r_1}+\frac{r_1}{r_0}\right)\cos(\vartheta_1+\beta)+2\cos(\vartheta_1-\beta)}{\left(\frac{r_0}{r_1}-\frac{r_1}{r_0}\right)\sin(\vartheta_1+\beta)}\,;\quad \operatorname{tang}\tau = \frac{\left(\frac{r_0}{r_1}+\frac{r_1}{r_0}\right)\cos(\vartheta_1-\beta)+2\cos(\vartheta_1+\beta)}{\left(\frac{r_0}{r_1}-\frac{r_1}{r_0}\right)\sin(\vartheta_1-\beta)},$$

woraus nach Elimination von ϑ_1 und $\frac{r_0}{r_1}$ folgt: $\sigma+\tau+2\alpha=0$.

Für den Sonderfall $\frac{l}{h}=\infty$ ergibt sich bei gegebener Ablenkung $\tau-\sigma$ für β ein Minimalwert: $\beta_\infty=\frac{\tau-\sigma}{2}$.

Diese Gleichungen lassen folgendes Resultat erkennen: Stoßfreier Eintritt und glatter Abfluß werden also nicht erzielt, wenn die Strömung in großer Entfernung vor und hinter dem Gitter in Richtung der Schaufeltangenten fließt, sondern die Strömung ist gegen die Tangentenrichtung geneigt. Weicht die Strömung vor dem Gitter gegen die Tangentenrichtung nach rechts ab, so ist sie hinter dem Gitter um den gleichen Betrag nach links gerichtet.

7. Anwendung auf die Turbinentheorie. Es ist noch die Frage offen, wie die vorstehenden Betrachtungen auf die Turbinen zu übertragen sind. Bei Turbinen haben wir eine dreidimensionale Bewegung, während oben eine zweidimensionale behandelt ist. Es kann sich also bei der Uebertragung der Resultate nur um Näherungen handeln, die mehr oder weniger genau sind, entsprechend der Abweichung der Flüssigkeitsbewegung in den Turbinen von einer ebenen Bewegung. Hierbei verhalten sich die einzelnen Turbinenarten verschieden. Zunächst sind auf ein feststehendes Leitwerk die obigen Resultate anwendbar. Für Axialturbinen, bei denen die Schaufelhöhe klein ist gegen den Durchmesser, so daß die Radialgeschwindigkeiten und ihre Ableitungen gegen die axialen und tangentialen Geschwindigkeiten vernachlässigt werden können, kann die Strömung ohne weiteres als eine ebene aufgefaßt werden, wenn man sich die mittlere durch die Schaufel gelegte Zylinderfläche abgewickelt denkt. Um eine stationäre Strömung zu erhalten, bezieht man die Strömung durch das Leitrad auf ein festes Koordinatensystem, die Strömung durch das Laufrad auf ein mitbewegtes, also in der Abwicklung geradlinig gleichförmig bewegtes Koordinatensystem. In beiden Fällen hat man Strömungen durch Gitter, wie sie oben behandelt sind; die angegebenen Methoden sind also unverändert anwendbar.

Für Radialturbinen idealisiert man die Strömung in der Weise, daß man etwa eine Strömung betrachtet, welche radial aus dem Unendlichen kommend von außen nach innen in ebener Strömung durch die rotationssymmetrisch angeordneten Leit- und Laufschaufeln strömt, um im Nullpunkt in einer Senke zu enden. Eine solche Strömung erhält man, wenn man die von uns behandelte Gitterströmung durch eine Transformation

$$Z=\zeta^{1/n} \quad \text{(siehe Gl. 1)}$$

umformt, wobei aus der Parallelströmung durch das Gitter von unendlich vielen Schaufeln eine Radialströmung durch n Schaufeln wird. Dies ist jedoch nur für die Strömung durch das Leitrad möglich; da man nämlich die Strömung durch das Laufrad, um eine stationäre Strömung zu bekommen, auf ein rotierendes Koordinatensystem beziehen muß, ergibt sich inbezug auf ein solches Koordinatensystem für das Potential die Differentialgleichung $\Delta\varphi=\text{const}$, zu deren Integration zwar die Abbildung des Schaufelsystems auf die Ebene unverändert benutzt werden kann, die zu lösende Randwertaufgabe aber verändert wird, so daß auch die oben gegebenen Formeln für die auf die Schaufeln wirkenden Kräfte ihre Gültigkeit verlieren. Deshalb beschränken wir uns im folgenden auf Axialturbinen.

In den oben angestellten Betrachtungen handelt es sich immer um Relativströmung, d. h. es wird angenommen, daß das Gitter feststeht und die Flüssigkeit sich gegenüber dem Gitter bewegt. Für das Leitwerk läßt sich die Austrittsrichtung des Flüssigkeitsstromes also ohne weiteres angeben. Da nun aber das Laufrad sich gegenüber dem Leitwerk bewegt, ist nicht die Richtung eines jeden Flüssigkeitsfadens von Interesse, sondern ein Mittelwert, der sich aus den Richtungen aller Stromfäden zusammensetzt.

Die Schaufelform und Schaufelanordnung des Laufrades bestimmt die Relativströmung der Flüssigkeit zum Laufrade. Unter Berücksichtigung der absoluten Umfangsgeschwindigkeit des Laufrades u und der Relativströmung der Flüssigkeit zum Laufrade, für die stoßfreier Eintritt gefordert wird, läßt sich die Absolutströmung c_a ermitteln, wobei die Absolutströmung beim Laufradeintritt mit der Strömung beim Leitradaustritt übereinstimmen muß (Abb. 5). Durch diese Forderung ist die Stromrichtung beim Leitradaustritt bestimmt. Beim Austritt aus dem Laufrade wird die absolute Stromrichtung ebenso ermittelt wie beim Eintritt in das Laufrad, wobei die Umfangsgeschwindigkeit des Laufrades dieselbe ist und die Richtung der Relativströmung mit der Richtung der Schaufeltangente denselben Winkel einschließt wie beim Eintritt.

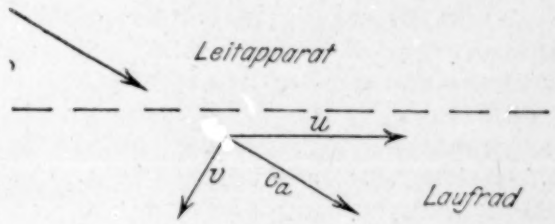


Abb. 5

Die von dem Flüssigkeitsstrom auf das Laufrad übertragene Kraft zerlegen wir in zwei Komponenten, einmal den Tangentialschub und zum anderen in den Axialschub. Der Tangentialschub wirkt in Richtung der Tangente an das Laufrad und ist für die Arbeitsleistung der Turbine bestimmend; er ist gleich der Impulsdifferenz beim Eintritt und Austritt der Flüssigkeit aus dem Laufrade, also dem aus der Relativströmung ermittelten Tangentialschub. Der Axialschub wird vom Lager aufgenommen oder hebt sich bei Zwillingsanordnung auf. Er bestimmt sich aus der Druckdifferenz vor und hinter dem Laufrade in gleicher Weise wie bei der Relativströmung [1]). 182

Über hyperboloidische Verzahnung.

Von **E. STÜBLER** in Berlin-Dahlem.

In seiner Abhandlung: Ueber die Verzahnung der Hyperboloidräder mit geradlinigem Eingriff [2]) hat M. Disteli diejenigen Raumverzahnungen behandelt, bei denen die Profilflächen, d. h. die Arbeitsflanken der Radzähne, windschiefe Regelflächen sind, die sich stets längs einer Erzeugenden berühren. Man wird vermuten, daß der Fall in die Ebene abwickelbarer Profilflächen als Sonderfall unter jenen Verzahnungen enthalten sei. Dies trifft aber merkwürdigerweise nicht zu. Der Grund liegt darin, daß bei einer Bewegung zweier Regelflächen gegeneinander, wobei sie sich stets längs einer Erzeugenden berühren, die windschiefen Regelflächen sich ganz anders verhalten als die abwickelbaren. Während nämlich jene sich nur so berühren können, daß die Zentralpunkte der beiden koinzidierenden Erzeugenden, die ja auch denselben Verteilungsparameter [3]) besitzen müssen, zusammenfallen, ist für die Berührung zweier abwickelbarer Flächen durchaus nicht Bedingung, daß die Zentralpunkte, die auf den Rückkehrkanten liegen, zusammentreffen.

So kommt es, daß der Fall abwickelbarer Profilflächen gesondert behandelt werden muß. Zudem sind doch diese Profilflächen leichter technisch herzustellen als die windschiefen, wenn man etwa die Schraubenflächen ausnimmt.

---

[1]) Vergl. Dr.-Ing. Bauersfeld, Die Grundlagen zur Berechnung schnellaufender Kreiselräder, Zeitschr. Ver. deutsch. Ing. 1922.

[2]) Zeitschrift für Math. u. Phys. Bd. 59, 1911, S. 244.

[3]) Zur Erklärung dieser und einiger anderer hier verwendeter Begriffe aus der Geometrie der Regelflächen sei folgendes gesagt. Bewegt sich eine Gerade im Raum so, daß zwei unmittelbar aufeinander folgende Lagen einen Punkt gemeinsam haben, so beschreibt sie eine »abwickelbare« Regelfläche. Eine »windschiefe« Regelfläche entsteht, wenn zwei Nachbarlagen einer bewegten Geraden nicht nur einen kleinen Winkel, sondern auch einen von Null verschiedenen kleinsten Abstand aufweisen. Das Verhältnis dieses Abstandes zum Winkel (im Bogenmaß) heißt der »Verteilungsparameter«; er ist für die abwickelbaren Regelflächen Null. Der Zentralpunkt ist der Punkt der Geraden, welcher der Nachbargeraden am nächsten gelegen ist; eine Ebene durch die Gerade, welche zur Nachbargeraden parallel ist, heißt »asymptotische« Ebene, die dazu senkrechte Ebene »Zentralebene«, das gemeinsame Lot von Nachbargeraden »Striktionsstrahl«, der Ort der Zentralpunkte »Striktionslinie« (bei der abwickelbaren Regelfläche »Rückkehrkurve«).

Nach M. Disteli[1]) entsteht die Eingriffsfläche der windschiefen Profilflächen, d. h. der Ort ihrer Berührungslinien im ruhenden Raum als Bahnfläche einer beliebigen Geraden eines in besonderer Weise bewegten räumlichen Hilfssystems. Es zeigt sich, daß diese Distelische Hilfsbewegung im engsten Zusammenhang mit der Theorie der Bertrandschen Kurven steht, derart, daß zu jedem Paar Bertrandscher Kurven eine bestimmte Bewegung dieser Art gehört. Der Fall, wo die Kurven Schraubenlinien sind, ist von Disteli und von R. Crain[2]) auch graphisch durchgeführt worden. Ebenso könnte man aus den von E. Salkowski[3]) angegebenen Bertrandschen Kurvenpaaren Profilflächen für geradlinigen Eingriff ableiten. Man ersieht daraus, welche Hindernisse der praktischen Verwendung der schönen Theorie im Wege stehen, da erst Quadraturen, auf welche die analytische Darstellung der Bertrandschen Kurven führt[4]), auszuführen sind.

Demgegenüber sind die Konstruktionen, die zu abwickelbaren Profilflächen führen, ohne große Schwierigkeit durchzuführen. Für verschiedene einfache Fälle sind die nötigsten Angaben gemacht worden.

Es ist leicht einzusehen, daß zu jeder hyperboloidischen Verzahnung mit geradlinigem Eingriff eine konische gehört, die geradezu als die sphärische Abbildung jener bezeichnet werden kann. Man erhält sie, indem man durch einen beliebigen Anfangspunkt Parallelen zu den Radachsen sowie zu den Erzeugenden der Profilflächen legt. Drehen sich die entsprechenden Kegel- und Hyperboloidräder mit derselben Winkelgeschwindigkeit, so bleiben entsprechende Erzeugende parallel. Sind die Profilflächen der Hyperboloidräder windschief, so ist die Berührungsebene der Kegelprofile parallel zur asymptotischen Ebene der Erzeugenden jener Profilfläche. Umgekehrt kann man aus jeder konischen Verzahnung eine Distelische Hilfsbewegung, sowie eine Verzahnung mit abwickelbaren Profilflächen herleiten.

Der zweite Abschnitt der vorliegenden Abhandlung betrifft die allgemeine räumliche Verzahnung mit krummlinigem Eingriff, insbesondere das Problem, aus einer gegebenen Eingriffsfläche alle zugehörigen Profilflächenpaare herzuleiten. Hier spielen diejenigen Kurven eine wichtige Rolle, die bei der Zahnradbewegung dauernd in gleitender Berührung sind. Sie haben die Eigenschaft, daß sie sich ganz losgelöst von den Profilflächen behandeln lassen, während die Eingriffsverhältnisse aller andern Kurven der Profilflächen erst durch den benachbarten Flächenstreifen bestimmt sind.

Ich habe mich im wesentlichen auf die Behandlung der auftretenden geometrischen Fragen vom mathematischen Standpunkt aus beschränkt, doch ist z. B. die Frage, wie auf der mathematisch definierten Profilfläche die als Zahnflanke geeigneten Teile auszuwählen sind, im Anschluß an die Krümmung der abwickelbaren Profilflächen in Angriff genommen. Auf Fragen rein technischer Art, wie die Begrenzung der Räder im einzelnen, ist nicht eingegangen.

Rein geometrische bzw. kinematische Betrachtungsweise ist bevorzugt, weil eine rechnerische Darstellung der geometrischen Zusammenhänge in übersichtlicher Form kaum möglich ist. In den Fußnoten ist aber das Wichtigste der rechnerischen Ergebnisse, insbesondere wenn es sich um Integrationen handelt, in kürzester Form zusammengestellt.

1. Das Nullsystem der Verzahnung. Bei der räumlichen Verzahnung sind zwei Profilflächen Φ_1 und Φ_2, welche sich mit den konstanten Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 um die beiden Radachsen A_1 und A_2 drehen, stets längs einer Kurve in Berührung. Sie möge kurz Berührungs- oder Eingriffslinie genannt werden. Von dem Fall der sogenannten Präzisionsverzahnung, wo die Berührung nur in einem Punkt stattfindet, soll hier überhaupt nicht die Rede sein. Man geht in der Regel von der Relativbewegung des einen Rades gegen das andere aus. Denkt man sich das zweite ruhend, dann ist Φ_2 die Hüllfläche von Φ_1. Irgend ein Punkt von Φ_1, in welchem Φ_1 gerade mit Φ_2 in Berührung ist, muß sich also momentan in der Berührungsebene beider Flächen weiter bewegen.

Zu jedem Moment der Bewegung gehört ein Nullsystem mit der momentanen Schraubenachse als Zentralachse. In demselben ist jedem Punkt des Raumes die zur Bahntangente senkrechte Ebene zugeordnet.

---

[1]) a. a. O. S. 260.

[2]) Zeitschrift für Math. u. Phys., Bd. 51, 1904, S. 51 und Werkstattechnik, Bd. 1, 1907.

[3]) Math. Ann., Bd. 69, 1910, S. 560.

[4]) Enzykl. der math. Wiss. III, D 4, S. 230.

Alle diese mit der Relativbewegung definierten Nullsysteme fallen bei der wirklichen Bewegung der Zahnräder in ein einziges zusammen, das Nullsystem der Verzahnung. Die Richtung der Zentralachse, die M bezeichnet werden soll, findet man bekanntlich durch ein Dreieck, von dem zwei Seiten zu den Radachsen parallel und zu ω_1 und ω_2 proportional sind. Die dritte Seite ist dann zu M parallel. Die kürzesten Abstände der Zentralachse von A_1 und A_2 verhalten sich wie $\operatorname{tg}(A_1M) : \operatorname{tg}(A_2M)$. Von der Relativbewegung soll jetzt nicht mehr die Rede sein, aber die Senkrechte auf jeder Ebene in ihrem Nullpunkt p soll auch ferner noch als Bahntangente bezeichnet werden. Auch von der zu dem Nullsystem gehörigen Schraubung wird gelegentlich Gebrauch gemacht. Will man die Bahntangente eines Punktes p ohne die Relativbewegung definieren, so muß man von den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 ausgehen, welche der Punkt haben würde, wenn er mit dem ersten bzw. zweiten Radkörper gedreht würde. Die Bahntangente ist dann zu der Verbindungslinie der Endpunkte dieser beiden in p angetragenen Geschwindigkeitsvektoren parallel. Der aus der Relativbewegung abgeleitete Hauptsatz der Verzahnung, daß die Bahntangenten der Punkte, welche augenblicklich im Eingriff sind, d. h. auf der Berührungskurve der Profilflächen liegen, Tangenten an diese Flächen sein müssen, sagt also im Grunde nichts anderes aus, als daß zwei sich berührende Profilflächenelemente die gleiche Normalgeschwindigkeit haben müssen. Da eine Nullinie, d. h. eine im Nullsystem zu sich selbst konjugierte Gerade und nur eine solche auf den Bahntangenten ihrer Punkte senkrecht steht, folgt aus dem genannten Hauptsatz, daß die gemeinschaftlichen Profilnormalen Nullinien sind.

Die beiden Radachsen sind zu einander konjugierte Gerade, weil die Bahntangenten der Punkte der einen senkrecht zur andern stehen. Durch jeden Punkt des Raumes, der nicht auf einer Radachse liegt, geht eine bestimmte Gerade, welche die beiden Radachsen schneidet. Sie soll kurz Achsensekante des Punktes genannt werden. Dieselbe ist als Sekante zweier konjugierten Geraden eine Nullinie und steht daher senkrecht auf der Bahntangente des Punktes. Die Achsensekante steht auch senkrecht auf den beiden Geschwindigkeitsvektoren v_1 und v_2. Jede Ebene des Raumes, welche nicht durch eine Radachse hindurchgeht, schneidet die Radachsen in Punkten, deren Verbindungslinie eine Nullinie ist und daher den Nullpunkt der Ebene enthält.

I. Zahnräder mit abwickelbaren Regelflächen als Profilflächen.

2. Die Berührungslinie der Profilflächen. Sollen sich zwei abwickelbare Profilflächen in einer gemeinschaftlichen Berührungsebene ε längs einer Geraden E berühren, so müssen die Bahntangenten aller Punkte von E in die Ebene ε fallen. Die Eingriffsgerade muß also die Charakteristik der Ebene ε bezüglich der zum Nullsystem gehörigen Schraubung sein. Von der Charakteristik E der Ebene ε gelten die bekannten Sätze: Die durch E gehende auf ε senkrecht stehende Ebene δ ist zur Zentralachse M des Nullsystems parallel. Der Abstand dieser Ebene von M, also der kürzeste Abstand von E und M ist $h \operatorname{tg}(EM)$, wenn h den Parameter der zum Nullsystem gehörigen Schraubung bedeutet; die Bahntangente des der Zentralachse nächstliegenden Punktes von E fällt mit E zusammen.

Satz I: Bei Verzahnungen mit abwickelbaren Profilflächen bleibt während der Bewegung die gemeinschaftliche Normalebene der Profilflächen immer zur Zentralachse des Nullsystems parallel und die Berührungslinie ist die Charakteristik der gemeinsamen Berührungsebene.

Beispiel. Die Aufgabe, das Gegenprofil zu einer ebenen Zahnflanke zu bestimmen, läßt sich schon jetzt lösen. Wir betrachten die Zahnräder in einem Moment, wo sie sich aus einer Anfangslage um die Winkel ψ_1 und ψ_2 gedreht haben, welche sich wie ω_1 zu ω_2 verhalten müssen und von jetzt ab kurz Drehungswinkel bezeichnet werden sollen. Die Eingriffsgerade E ist die Charakteristik der Ebene, in welche momentan die ebene Zahnflanke fällt. Man braucht also nur E nach den angegebenen Sätzen zu konstruieren, so erhält man eine Erzeugende der Eingriffsfläche, und diese dann um die Drehungswinkel ψ_1 und ψ_2 rückwärts zu drehen, um Erzeugende E_1 und E_2 der Profile in ihrer Anfangslage zu erhalten. E_2 beschreibt das gesuchte Gegenprofil Φ_2, während die Geraden E_1 in der Ebene liegen, mit welcher Φ_1 zu Anfang zusammenfiel. Sie können als die Linien gleichzeitigen Eingriffs auf Φ_1 bezeichnet werden.

Die Eingriffsfläche hat einen kubischen Kreis als Doppelkurve. Es gehen nämlich durch jeden Punkt, dessen Bahntangente in die Spitze des Hüllkegels der Ebene Φ_1 trifft, zwei Erzeugende, die Charakteristiken der den Punkt enthaltenden Berührungs-

ebenen an die Kegelfläche. Jeder Punkt gehört ja zur Charakteristik einer Ebene, wenn seine Bahntangente in dieselbe fällt. Die genannten Punkte bilden aber einen kubischen Kreis, über dessen Lage Schönflies, Geom. der Bew., S. 116, nachzusehen ist. Die Paare von Erzeugenden, welche sich auf der Doppelkurve schneiden, sind nur außerhalb des Kegels reell. Unten sollen noch ebene Schnitte der Eingriffsfläche dieses Beispiels betrachtet werden.

Besondre Punkte auf der Berührungslinie der Profilflächen sind die Berührungspunkte der Eingriffsfläche mit den Profilflächen. Die Berührungsebenen der Eingriffsfläche längs einer Erzeugenden E bilden im allgemeinen ein Ebenenbüschel; eine derselben wird also mit der gemeinschaftlichen Berührungsebene der Profilflächen zusammenfallen. Die beiden Profilflächenelemente bewegen sich an einer solchen Stelle momentan in der Eingriffsfläche. Die Normalkomponente ihrer Geschwindigkeiten verschwinden; v_1 und v_2 fallen in die Ebene ε. Daraus folgt aber, daß die gemeinschaftliche Normale N der Eingriffsfläche und Profilflächen in einem solchen Punkt q durch die beiden Radachsen geht. Daß der Schnittpunkt der Projektionen von A_1 und A_2 auf die Ebene ε auf deren Charakteristik E fällt, geht auch schon aus einem Satz über das Nullsystem hervor.[1])

Die Punkte der beschriebenen Art bilden auf der Eingriffsfläche eine Kurve (q), deren Tangente in der Berührungsebene ε liegt und N senkrecht schneidet. Also gilt:

Die Eingriffsfläche wird von den Profilflächen beim Eingriff in den Punkten einer Kurve (q) berührt, welche eine Orthogonaltrajektorie ihrer Achsensekanten ist.[2])

Solche Kurven, welche die Erzeugenden einer durch die Radachsen gehenden Regelfläche senkrecht schneiden, spielen auch späterhin eine bedeutsame Rolle. Dreht man sie um die Radachsen, so entstehen Drehungsflächen, welche sich längs der betreffenden Kurve berühren.

Die durch E gehende Normalebene δ der Profilflächen enthält auch die zu q gehörende Achsensekante N, weil δ und N auf ε senkrecht stehen. Da δ zu M parallel ist, kann man eine Eingriffsfläche für abwickelbare Profilflächen konstruieren, wenn man eine Kurve (q) kennt, welche ihre Achsensekanten senkrecht schneidet. Man muß nur durch jeden Punkt q der Kurve die Achsensekante N und die darauf senkrechte Ebene ε legen und dann N in der Richtung der Zentralachse M auf ε projizieren, um eine Erzeugende der Eingriffsfläche zu erhalten (Abb. 2 b).

3. Die Hüllfläche der Eingriffsberührungsebenen. Die Erzeugende E der Eingriffsfläche (E) ergab sich als Schnittlinie der zu einander senkrechten Ebenen δ und ε. Weil die Normalebene δ stets zu M parallel bleibt, umhüllt sie eine Zylinderfläche (δ), welche außer den Eingriffsgeraden E auch die Normalen N zu Tangenten hat. Die Zylindererzeugende sei L. Wir führen auch noch die abwickelbare Regelfläche (ε) ein, welche von den Berührungsebenen ε der Profilflächen umhüllt wird. Da jede Ebene ε die Eingriffsfläche in einem Punkt q berührt, müssen sich (ε) und (E) längs der Kurve (q) berühren. Die Erzeugende von (ε), welche mit Q bezeichnet werden soll, geht somit durch q. Denkt man sich die Ebenen δ und ε starr verbunden, dann kann man sich die Eingriffsfläche kinematisch als Bahnfläche der Schnittlinie der starr verbundenen Ebenen entstanden denken, wenn man diese an den Flächen (δ) und (ε) berührend hingleiten läßt. Die Normalebenen auf δ und ε in den Erzeugenden L und Q schneiden sich in der Polgeraden P. (Die letztere der beiden Ebenen ist die Zentralebene von N, weil Q auf zwei benachbarten Erzeugenden von (N) senkrecht steht.) Durch P ist insbesondere das Normalenparaboloid der Eingriffsfläche längs E bestimmt. Die Polgerade P hat für die unten untersuchte Krümmung der Profilflächen eine wichtige Bedeutung.

Nun sind die Flächen (δ) und (ε) nicht von einander unabhängig. Denn der Abstand der Ebene δ von M war h tg (EM), also durch die Neigung von ε gegen M bestimmt. Führt man den Richtungskegel von (ε) ein, so kann man den geometrischen Zusammenhang mit (δ) so ausdrücken:

Satz II: Eine zu M senkrechte Ebene, welche von der Spitze des Richtungskegels von (ε) den Abstand h hat, schneidet diesen und die Zylinderfläche (δ) in kongruenten Kurven, welche senkrecht zu einander orientiert sind.

---

[1]) Schönflies, Geom. der Bewegung, Leipzig 1886, S. 104.

[2]) In einem Koordinatensystem sei A_1 die z-Achse, während A_2 durch die Gleichungen $x=a$, $y=z\,\mathrm{tg}\,\alpha$ bestimmt sein soll. Dann muß die Kurve (q) der Differentialgleichung genügen:

$$(x-a)(x\,dx+y\,dy)+(x\,z-a\,y\,\mathrm{ctg}\,\alpha)\,dz=0.$$

Diese Sätze mögen auf das Beispiel angewendet werden, wo die eine Zahnflanke eben ist (s. unter 2). In diesem Fall ist (ε) ein Kreiskegel um A_1, also (δ) nach dem Satz II eine Zylinderfläche zweiter Ordnung. Aus der kinematischen Erzeugung der Eingriffsfläche durch ein starrverbundenes Orthogonalebenenpaar kann man folgern, daß die zu M senkrechten Schnitte Fußpunktkurven von unter sich ähnlichen Kegelschnitten sind, deren Pole auf der oben angegebenen Doppelkurve der Eingriffsfläche liegen. Die Spuren der Ebenen δ und ε in einer beliebigen zu M senkrechten Schnittebene stehen nämlich senkrecht auf einander und berühren zwei ähnliche Kegelschnitte in entsprechenden Punkten. Wenn aber die Schenkel eines rechten Winkels zwei ähnliche Kurven C' und C'' in entsprechenden Punkten berühren, beschreibt die Spitze des Winkels die Fußpunktkurve einer zu C' und C'' ähnlichen Kurve C.[1])

Es gibt auch noch andere Fälle, bei denen die gemeinschaftliche Berührungsebene der Profilflächen stets durch einen festen Punkt s geht, dieselbe also eine Kegelfläche (ε) umhüllt. Wieder ist der kubische Kreis eine vielfache Kurve der Eingriffsfläche, für dessen Punkte die Bahntangente durch s geht und auch die Betrachtung über die zu M senkrechten Schnitte der Eingriffsfläche läßt sich auf diesen allgemeineren Fall übertragen. Aber die Bestimmung der Kurve (q) bietet Schwierigkeiten. Man kann leicht eine Fläche angeben, auf welcher sie verlaufen muß, nämlich den Ort der Fußpunkte, in welchen die Lote aus s die gemeinsamen Sekanten von A_1 und A_2 treffen[2]). Zur vollständigen Bestimmung von (q) ist die Eigenschaft der Kurve, ihre Achsensekanten senkrecht zu schneiden, zu benutzen.

Ein weiterer geometrischer Zusammenhang der Regelfläche (ε) mit der Fläche (N) der Achsensekanten soll unten dargelegt werden.

4. Die Charakteristik der Eingriffsfläche bezüglich der Drehung um die Radachsen. Zwei benachbarten Erzeugenden E und E' der Eingriffsfläche entsprechen auf der Profilfläche Φ_1 zwei Erzeugende E_1 und E'_1, welche sich in einem Punkt der Rückkehrkurve schneiden. Wenn man diesen Punkt um A_1 dreht, entsteht ein Kreis, der durch E und E' gehen muß. Ist r_1 sein Schnittpunkt mit E, dann geht die Normale der Eingriffsfläche in r_1 durch A_1, ganz wie dies im Punkt q der Fall ist. Weitere Punkte derselben Eigenschaft können auf E nicht existieren, weil das Normalenparaboloid längs E die Radachse A_1 nur in zwei Punkten schneidet, und daß r_1 nicht etwa stets mit q zusammenfällt, zeigt sich unten.

Der Ort (r_1) des Punktes r_1 bildet mit (q) zusammen die Charakteristik der Eingriffsfläche bezüglich einer Drehung um A_1. Während aber (q) zugleich auch der Charakteristik bezüglich der zweiten Radachse angehört, ist dies bei (r_1) im allgemeinen nicht der Fall.

Durch Drehung der Eingriffsfläche um die erste Radachse entstehen zwei Hüllflächen Δ_{q_1} und Δ_{r_1}. Die erstere berührt die Eingriffsfläche sowie die entsprechende Drehungsfläche Δ_{q_2} um A_2 längs (q) und die Profilfläche Φ_1 längs einer Kurve (q_1), die letztere berührt die Eingriffsfläche längs (r_1) und enthält die Rückkehrkurve von Φ_1. Aus den Drehungsflächen Δ_{q_1} und Δ_{r_1} kann man sich die abwickelbare Profilfläche Φ_1 erzeugt denken, indem man eine Gerade auf Δ_{r_1} abrollen und dabei Δ_{q_1} berühren läßt.

Beispiel: Eine räumliche Zykloidenverzahnung. Ein hyperbolisches Paraboloid, dessen Erzeugende N die beiden Radachsen schneiden und eine Richtungsebene haben, welche zum gemeinsamen Lot der Radachsen parallel ist, ist gleichseitig. Auf dem Paraboloid liegt eine Gerade, welche alle Erzeugenden N senkrecht schneidet, also die den Kurven (q) charakteristische Eigenschaft besitzt. Weil die abwickelbare Fläche (ε) in diesem Fall in ein Ebenenbüschel durch die Gerade ausartet, kann sie auch mit Q bezeichnet werden. Aus dem Satz II folgt, daß auch die Zylinderfläche (δ) in ein Ebenenbüschel durch eine Gerade L ausartet, welche mit Hilfe dieses Satzes zu konstruieren ist. Da L alle durch Q gehenden Achsensekanten N treffen muß, gehören $A_1\,A_2\,Q\,L$ zu den Erzeugenden der zweiten Schar des hyperbolischen Paraboloids (N).

---

[1]) Zum Beweis dient der Satz: Wenn man durch die Punkte einer Fußpunktkurve der beliebigen Kurve C Gerade legt, welche mit den Tangenten von C einen konstanten Winkel α bilden, so umhüllen sie eine zu C ähnliche Kurve C'. Haben nämlich die Tangenten von C vom Pol den Abstand p, der in Funktion des Richtungswinkels φ der Normalen von C gegen eine feste Anfangsrichtung gegeben sein möge (magische Gleichung von C), dann haben die Tangenten von C' vom Pol den Abstand $p' = p(\varphi)\cos\alpha$.

[2]) Diese Fläche dritter Ordnung besitzt zwei Kreisscharen, gehört also zu den von E. Königs C. R. Paris 109 (1889) S. 364 behandelten Flächen und ist im Fall senkrecht gekreuzter Radachsen eine parabolische Zyklide.

Die Eingriffsfläche ist als Erzeugnis zweier orthogonaler Ebenenbüschel (ε) und (δ) ein orthogonales Hyperboloid, d. h. die Kreisschnitte desselben stehen senkrecht zu Q und L[1]).

Durch Drehung von Q um A_1 entsteht das Drehungshyperboloid Δ_{q_1}, welches das entsprechende Drehungshyperboloid Δ_{q_2} um A_2 längs Q berührt.

Um zu den Profilflächen der Verzahnung zu gelangen, kann man mit Vorteil von der auch praktisch wichtigen Eigenschaft der Eingriffsfläche Gebrauch machen, daß hier wie bei Stirnrädern zwei beliebige von unendlich vielen Zahnrädern auf dem orthogonalen Hyperboloid zum Eingriff gelangen können. Als Radachsen kann man nämlich zwei beliebige Erzeugende der zweiten Schar des hyperbolischen Paraboloids (N) wählen. Festgehalten wird dabei außer dem Paraboloid die Richtung der Zentralachse des Nullsystems. Es ist leicht zu sehen, daß man zu derselben Eingriffsfläche gelangt, wie auch die Radachsen auf dem Paraboloid gewählt werden mögen. Insbesondere kann die eine Radachse mit Q selbst zusammenfallen. Weil dann alle Erzeugenden E der Eingriffsfläche durch diese Radachse gehen, muß die zugehörige Profilfläche eine Ebene sein. Denn nur so kann sie außer den Erzeugenden noch eine weitere Gerade enthalten. Auch die in der Ebene liegende Rückkehrkurve läßt sich angeben. Weil nämlich die Normalen des orthogonalen Hyperboloids längs L alle durch Q gehen, ist L die Eingriffslinie (r_1) der Rückkehrkurve, und diese selbst die Meridianhyperbel des Hyperboloids Δ_{r_1}, welches durch Drehung von L um Q entsteht.

Jetzt lassen sich aber die Profilflächen beliebiger Räder des Satzes aus der Eingriffsfläche als Gegenprofile von ebenen Radialflanken mittels der Proportionalität entsprechender Drehungswinkel herleiten.

Zur Charakterisierung der Verzahnung möge der einfache Sonderfall dienen, wo Q und L parallel sind. Man erhält dann einen Satz von Stirnrädern mit Zykloidenverzahnung. Indessen lassen sich Raumverzahnungen, welche zur ebenen Zykloidenverzahnung analog sind, in ganz verschiedener Richtung finden.

5. Graphische Integration zur Bestimmung einer Profilfläche. Die Bestimmung der Profilfläche aus der Eingriffsfläche erfordert eine Integration, deren Ergebnis in dem unter **4** beschriebenen Beispiel sich durch eine einfache geometrische Betrachtung vorhersehen ließ. Zur rechnerischen Durchführung sei auf die von Herrn M. Disteli in Zeitschr. für Math. und Phys. 56 (1908), S. 246 für konische Räder gemachten Entwicklungen hingewiesen, insbesondere auf das in den Gleichungen (25) enthaltene Ergebnis, welches fast unmittelbar auf den Fall der Hyperboloidräder mit abwickelbaren Profilen sich übertragen läßt. Ist nämlich die entsprechende konische Verzahnung bekannt, so ist, wie unter **7** gezeigt wird, keine Integration mehr nötig.

Im Anschluß an **4** möge schon hier eine Bestimmung der Profilfläche durch graphische Integration Platz finden, obwohl sie die Kenntnis der Kurve (r_1) auf der Eingriffsfläche zur Voraussetzung hat, in welcher die Rückkehrkurve von Φ_1 zum Eingriff kommt. Zu dieser Kurve (r_1) gelangt man nach den unter **6** und **7** gemachten Ausführungen.

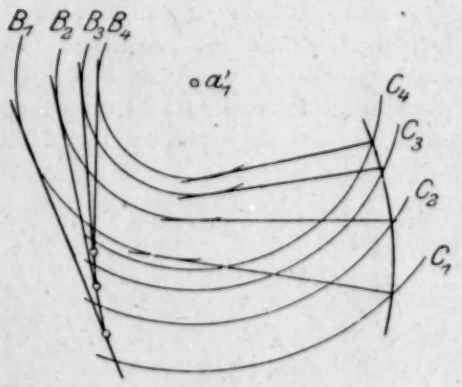


Abb. 1

Seien $a_1' E' r_1'$ die Projektionen von $A_1 E r_1$ auf eine zu A_1 senkrechte Zeichenebene, dann benutzen wir zwei Scharen von Kreisen um denselben Mittelpunkt a_1', von denen die eine die Geraden E berührt, während die andere durch die Punkte r_1 geht. Sind eine große Zahl dieser Kreise gezeichnet und paarweise gleich beziffert, also etwa mit $B_1 B_2 B_3 \ldots$ und $C_1 C_2 C_3 \ldots$ bezeichnet, so beginnt man mit der Integration an einer beliebigen Stelle von C_1 und zieht diejenige Tangente an den Kreis B_1, welche durch Drehung aus der entsprechenden Geraden E um a_1' hervorgeht. Von einem Punkt, welcher auf dieser Tangente etwa in der Mitte des kleinen Stückes zwischen den Peripherien von C_1 und C_2 gelegen ist, zieht man weiter die Tangente an B_2. Fährt man so fort, so bilden diese Tangenten angenähert die Projektionen der Erzeugenden der Profilfläche Φ_1, Abb. 1[2]).

[1]) Vergl. hierzu Schönflies, Geometrie der Bewegung, S. 112.

[2]) Diese graphische Integration ist auch zur Herstellung der Profilkurven aus der Eingriffslinie bei Stirnradverzahnung gut brauchbar.

Sind die beiden Profilflächen nach diesem Verfahren angenähert konstruiert, dann bildet die Proportionalität entsprechender Drehungswinkel ψ_1 und ψ_2 ein geeignetes Mittel zur Prüfung der Genauigkeit. An Stellen, wo die eine Profilfläche sich nach dem Verfahren nicht genau genug ergibt, wird man die andere bevorzugen.

Von einer ganz beliebigen Drehungsfläche Δ_{q_1} um die Radachse A_1 ausgehend gelangt man auf folgende Weise zu einer Verzahnung mit abwickelbaren Profilflächen. Man bestimmt zuerst die auf Δ_{q_1} liegende Kurve (q), und zwar ergeben sich auf jedem Parallelkreis zwei Punkte der Kurve. Man hat nur die Spitze des zu dem Parallelkreis gehörigen Normalenkegels mit A_2 durch eine Ebene zu verbinden und diese mit dem Parallelkreis zum Schnitt zu bringen. Die Normalen der beiden Schnittpunkte gehen dann durch A_1 und A_2; sie gehören also zur Regelfläche (N). Durch Projektion von N auf die zugehörige Berührungsebene ε von Δ_{q_1} in der Richtung von M ergibt sich E und aus der Eingriffsfläche (E) durch das beschriebene Integrationsverfahren die abwickelbaren Profilflächen.

6. Krümmung der Profilflächen. Die Profilfläche Φ_1 wird längs E von einem Kreiskegel oskuliert, dessen Achse R_1 in der Normalebene δ liegt. Zu deren Bestimmung benutzen wir, daß sie allen Parallelflächen von Φ_1 gemeinsam ist. Die Spitzen der oskulierenden Kegelflächen liegen auf den Rückkehrkurven der Parallelflächen.

Verschiebt man alle Eingriffsgeraden E parallel zu sich selbst längs der gemeinsamen Profilnormalen um eine konstante Strecke bis E', so entsteht eine neue Eingriffsfläche (E'), auf welcher zwei Parallelflächen von Φ_1 und Φ_2 zum Eingriff gelangen. In irgend einem Moment ist dann je ein Punkt der Rückkehrkanten von Φ_1 und ihrer Parallelfläche im Punkt r_1 von E bzw. r_1' von E' im Eingriff. Diese Punkte r_1 und r_1' sind eben die Spitzen der oskulierenden Kreiskegel, R_1 ist daher ihre Verbindungslinie. Wie früher gezeigt wurde, gehen die Normalen der Eingriffsflächen (E) und (E') in r_1 und r_1' durch A_1. Nun läßt sich zeigen, daß die Polgerade P den beiden Eingriffsflächen gemeinsam ist. Dieselbe liegt einerseits auf der zu δ in L senkrecht stehenden Ebene, andererseits in der Zentralebene von N. Diese Ebenen sind aber den beiden parallelen Verzahnungen gemeinsam. Die Normalen von (E) in r_1 und von (E') in r_1' gehen somit beide sowohl durch A_1 wie durch P und stehen senkrecht auf E. Sie sind daher Erzeugende eines durch A_1 und P gehenden Paraboloids, welches eine zu E senkrechte Richtungsebene hat. Dieses Paraboloid enthält auch die Gerade N als Erzeugende. Sein vollständiger Schnitt mit der Profilnormalebene δ muß durch N und $r_1\, r_1'$, d. h. R_1 gebildet werden. Zur Konstruktion von R_1 suche man zuerst den Schnittpunkt mit L. Das Lot auf δ in diesem Punkt ist eine Erzeugende des Paraboloids und muß durch P und A_1 gehen. Man hat also nur die Projektion von A_1 auf δ mit L zum Schnitt zu bringen (Abb. 2b). Die Richtung von R_1 ergibt sich sehr einfach mittels der sphärischen Abbildung, welche unten besprochen wird.

Früher war von der Möglichkeit des Zusammenfallens der Punkte q und r die Rede. Man sieht jetzt, daß ein solches in jedem Bewegungsmoment für eine einzige der Parallelflächen von Φ_1 eintritt, nämlich im Schnittpunkt von N und R_1. Daß q mit r_1 auch dauernd zusammenfallen kann, zeigt eine unten beschriebene Verzahnung, bei der ein Kegelrad mit einem Hyperboloidrad zum Eingriff kommt.

Für die Achsen R_1 und R_2 der Kreiskegel, welche die beiden Profilflächen längs E oskulieren, läßt sich noch ein einfacher geometrischer Zusammenhang nachweisen, der die eine aus der andern herzuleiten gestattet.

Die Charakteristik der Normalebene δ der Profilflächen im Nullsystem, welche mit D bezeichnet werden soll, ist die Projektion von M auf δ. Es soll gezeigt werden, daß sich R_1 und R_2 auf D schneiden. Zu den durch A_1, A_2 und D gehenden Geraden gehört N, ferner eine Senkrechte zu δ[1]), sie besitzen daher eine zu E senkrechte Richtungsebene, weil die genannten Geraden zu E senkrecht gerichtet sind. Daß die Geradenschar ein Paraboloid bildet, folgt ja daraus, daß D ebenso wie M mit A_1 und A_2 zu einer Ebene parallel ist. Eine zu E senkrechte Richtungsebene haben auch die Paraboloide durch $A_1\, R_1\, P$ und $A_2\, R_2\, P$. Daraus läßt sich folgern, daß die drei Paraboloide außer der Geraden N noch eine zweite Gerade N' gemeinsam haben. Denn die beiden durch die vier Geraden $A_1\, A_2\, P$ und D gehenden Sekanten N und N' müssen als Erzeugende des ersten Paraboloids zu der genannten Richtungsebene parallel sein und

[1]) Schönflies, Geom. der Bewegung, S. 104.

gehören somit auch den beiden andern Paraboloiden an. Die drei Geraden R_1 R_2 und D müssen also von N' getroffen werden. Da sie sämtlich in δ liegen, ist dies nur in einem und demselben Punkt möglich, falls nicht etwa N' selbst in δ liegt. Dann müßten sich aber N und N' schneiden und A_1 und A_2 in einer Ebene liegen.

Damit ist gezeigt, daß sich R_1 und R_2 mit der Projektion der Zentralachse M auf die Normalebene δ in einem Punkte schneiden.

Daraus folgt z. B., daß r_1 und r_2 nur zusammenfallen können in dem M nächstgelegenen Punkt von E.

Die Krümmungsverhältnisse der Profilflächen geben für die Auswahl der Teile einen Anhaltspunkt, welche als Arbeitsflanken verwendet werden können, ohne daß Ueberschneidungen zu befürchten sind, wenn auch zur endgültigen Lösung dieser Frage in jedem einzelnen Fall besondere Untersuchungen nötig sind.

Wenn in der gemeinschaftlichen Normalebene δ der Profilflächen die Achsen der beiden Oskulationskegel bestimmt sind, so trifft ein Lot von ihrem Schnittpunkt auf die Berührungslinie E diese in einer Stelle k, wo die Profilflächen die gleiche Krümmung besitzen, dieselben sich also im allgemeinen überschneiden müssen. Ferner wird durch die Schnittpunkte r_1 und r_2 der Kegelachsen mit E ein Teil von E abgegrenzt, wo die Profilflächen ihre konvexen Seiten gegeneinander kehren. Dies tritt in dem zwischen bzw. außerhalb r_1 r_2 liegendem Gebiet von E ein, je nachdem k außerhalb bzw. zwischen r_1 r_2 gelegen ist. Diese Teile wird man zur praktischen Verwendung als Zahnflanken bevorzugen. [1])

Ein zu nahes Herangehen an die Rückkehrkurven, also an r_1 und r_2, oder gar ein Ueberschreiten derselben verbietet sich von selbst.

Auch der Fall, wo die beiden Achsen der Oskulationskegel zusammenfallen, die Profilflächen sich daher längs E oskulieren, kann eintreten. Die notwendige Bedingung hierfür ist, daß die Paraboloide durch A_1 R_1 P und A_2 R_2 P zusammenfallen. Wenn aber P und R_1 mit A_1 und A_2 paraboloidische Lage haben sollen, so müssen sie zur gemeinsamen Normale von A_1 und A_2 senkrecht gerichtet sein.

Es sind dann zwei Fälle zu unterscheiden. Wenn P mit L zusammenfällt, artet das Normalenparaboloid längs E in eine Ebene aus, die mit δ zusammenfällt. E ist eine Torsallinie der Eingriffsfläche. Die Profilflächen oskulieren längs E denselben Kreiskegel, dessen Achse L ist. Solche Stellen sind praktisch nicht verwendbar. [2])

Wenn dagegen P und L nicht zusammenfallen, muß die Ebene durch P und L zu A_1 und A_2, die zu ihr senkrechte Ebene δ also zum gemeinsamen Lot von A_1 und A_2 parallel sein. Die Kegelachsen R_1 und R_2 sind dann im allgemeinen zu einander parallel und fallen nur zusammen, wenn eine Richtungsebene des hyperbolischen Paraboloids durch A_1 A_2 und P senkrecht zu E steht. Bei diesem Ausnahmefall geht das Paraboloid durch die Projektion D von M auf δ (Schönfiies S. 104); also müssen R_1 und R_2 beide mit D zusammenfallen. Diese Ausnahme wird aber im allgemeinen gar nicht eintreten, sondern nur der Fall paralleler Oskulationskegelachsen, welcher der Verzahnung kein Hindernis bietet. Die Bedeutung dieser Tatsache tritt erst zutage, wenn man den entsprechenden Fall bei der zylindrischen und konischen Verzahnung betrachtet, nämlich den Durchgang des Eingriffs durch die zur Ebene der Radachsen senkrechte Ebene, welche die beiden Teilzylinder bzw. Teilkegel berührt. Dieser Durchgang wird immer in der Berührungslinie bewerkstelligt, weil sich beim Durchgang an anderen Stellen die Profilflächen oskulieren würden. [3]) Bei der Raumverzahnung liegen die Verhältnisse also viel günstiger und wenn man die Bedingung aufstellt, [4]) daß die Eingriffsfläche durch die Zentralachse M gehen soll, so ist eine solche Uebertragung einer Einschränkung, welche für Stirn- und Kegelräder notwendig ist, auf den analogen räumlichen Fall nicht berechtigt.

---

[1]) Vgl. J. Pützer, Ueber den spiraloiden Eingriff. Zeitschr. d. V. D. I., 1860, S. 234.

[2]) Für parallele Radachsen erhält man entsprechend solche Fälle, wo die Normalebene des Eingriffszylinders durch die Berührungslinie M der Teilkreiszylinder geht. Vgl. meine Abhandlung: Die Zahnform des Stirnrades mit längster Lebensdauer. Der Betrieb, 1920/21, S. 419.

[3]) S. meine soeben genannte Abhandlung, S. 419.

[4]) M. Disteli, a. a. O., S. 264 und H. Resal, Paris C. R. 117 (1893), S. 393.

Man verzichtet überhaupt bei räumlichen Verzahnungen am besten auf die Unterscheidung eines Kopf- und Fußprofils, eine solche wäre meist nur auf künstliche Weise zu bewerkstelligen.[1])

7. Die sphärische Abbildung. Wie schon eingangs erwähnt, läßt sich jeder Verzahnung mit abwickelbaren Profilflächen eine konische Verzahnung zuordnen, bei welcher die Richtungskegel von Φ_1 und Φ_2 die Profile der Kegelräder sind. Dabei müssen sie sich um Achsen A_1^0 und A_2^0 drehen, welche zu A_1 und A_2 parallel laufen, und sie berühren sich in jedem Moment in einer Ebene ε^0 längs einer Geraden E^0, welche zu ε und E parallel sind. Allen Parallelen zu M, also z. B. der Geraden L, entspricht dieselbe Gerade M^0. Die Charakteristik E^0 bestimmt man hier auf der Ebene ε^0, indem man diese mit der durch M^0 gehenden Normalebene δ^0 zum Schnitt bringt.

Diese sphärische Abbildung eignet sich nicht bloß zu theoretischen Untersuchungen, sondern ganz besonders auch zur Ausführung von Konstruktionen, wie die Bestimmung von $P\,R_1\,R_2$, deren Richtung sich einfach in der Abbildung ergibt.

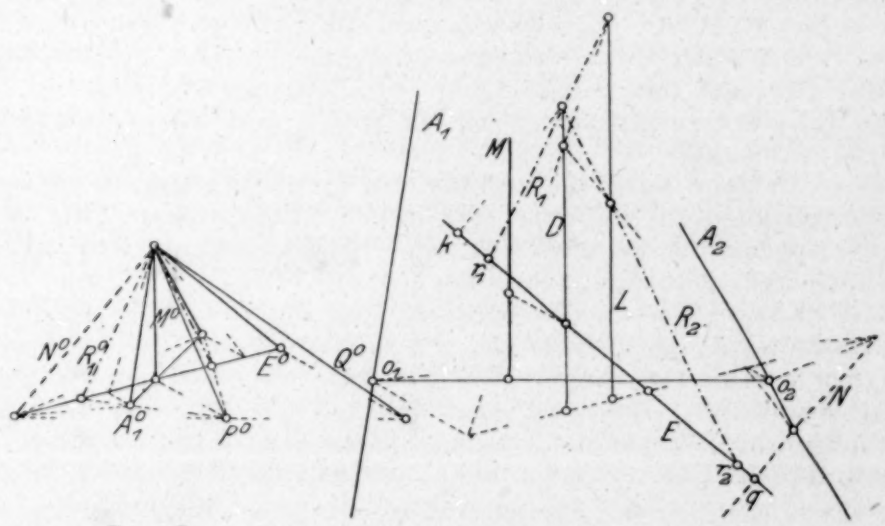


Abb. 2a Abb. 2b

Wir führen außer der Bildkugel eine zu M^0 senkrechte Bildebene ein. Wählt man den Abstand vom Fixpunkt der konischen Verzahnung gleich dem Parameter h des Nullsystems, so erreicht man nach Satz II zugleich, daß die Spur des Kegels (ε^0) in der Bildebene mit dem Normalschnitt des Zylinders (δ) übereinstimmt; die Tangenten der beiden kongruenten Kurven in entsprechenden Punkten sind dabei zu einander senkrecht.

Ueber die Spuren der Richtungskegel in dieser Bildebene gilt: Die Spur von (E^0) ist die Fußpunktkurve der Spur von (ε^0). Die Spuren der Kegel (E^0) und (N^0) sind inverse Kurven.

P^0 wird als Schnittlinie der Ebene $[Q^0\,N^0]$ und der auf δ^0 in M^0 senkrecht stehenden Ebene konstruiert (Abb. 2a). R_1^0 ergibt sich dann in δ^0 als Schnitt mit der Ebene $P^0\,A_1^0$.[2]) Nach Konstruktion der Richtungen $P^0\,R_1^0\,R_2^0$ können die Parallelen $P\,R_1\,R_2$ leicht gefunden werden (Abb. 2b), da man ihre Schnittpunkte mit L kennt (P ist in Abb. 2b nicht eingezeichnet).

Um Konstruktionen über konjugierte Gerade z. B. A_1 und A_2 auszuführen, benützt man die Bahntangenten T_1 und T_2 der M nächstgelegenen Punkte o_1 und o_2 von A_1 und A_2. Zieht man in der Ebene $[A_1^0\,A_2^0]$ die Senkrechten T_2^0 und T_1^0 zu A_1^0 und A_2^0, so sind die Abstände der Bildspuren dieser Senkrechten von M^0 gleich den kürzesten Abständen der Geraden A_2 und A_1 von M.

Auch auf eine bequeme Konstruktion von N aus N^0 sei hingewiesen. Durch die Schnittpunkte einer beliebigen zu M senkrechten Ebene mit den Radachsen muß man Parallelen zu den Bildspuren von $A_1^0\,N^0$ und $A_2^0\,N^0$ ziehen, um einen Punkt von N zu erhalten. (Abb. 2a und b.)

An die sphärische Abbildung schließt sich die Aufgabe an, Verzahnungen mit abwickelbaren Profilflächen aus einer konischen Verzahnung abzuleiten. Es möge ein

---

[1]) D. Tessari, Torino, Annali del R. Museo industr. 2 (1871), S. 567. Als Ausnahmen können Verzahnungen mit Satzeigenschaft gelten wie die einfachsten Verzahnungen mit windschiefen Profilflächen (Disteli, Z. f. M. 1904) und die unter 4. beschriebene Zykloidenverzahnung, bei der man aus zwei beliebigen auf verschiedene Seiten von L gewählten Lagen der Geraden Q Kopf- und Fußprofile herleiten kann. Doch ist dabei zu beachten, daß die Grenzkurven zwischen Kopf- und Fußprofil nicht auf der Zentralachse M, sondern auf der zu ihr parallelen Geraden L zum Eingriff kommen.

[2]) Vgl. hierzu M. Disteli, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 56 (1908), S. 243.

allgemein giltiger Satz über die Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden einer Regelfläche vorausgeschickt werden, der eine wichtige geometrische Beziehung zwischen den Regelflächen (N) und (ε) ergibt:

Satz III: Wenn man durch die Punkte einer Kurve, welche die Erzeugenden N einer Regelfläche senkrecht schneidet, die Normalebenen ε zu N legt, umhüllen diese die Tangentenfläche einer geodätischen Linie auf der abwickelbaren Fläche, welche von den Zentralebenen γ der Erzeugenden N umhüllt wird.[1])

Um die Richtigkeit des Satzes einzusehen, beachte man, daß die Erzeugende Q von (ε) als Schnittlinie zweier benachbarter Ebenen ε auf zwei benachbarten Normalen N senkrecht steht und also eine Parallele zu ihrem Striktionsstrahl ist und in der Zentralebene γ von N liegt. Weil Q in γ liegt, verläuft die Hüllkurve von Q, d. h. die Rückkehrkurve von (ε) in der Hüllfläche von γ. Die Schmiegungsebene der Hüllkurve von Q ist ε; sie steht auf γ senkrecht, weil sie zu N normal ist.

Den sämtlichen Orthogonaltrajektorien von (N) entspricht eine Schar geodätischer Parallelen auf der Hüllfläche (γ) der Zentralebenen und (γ) ist die gemeinsame Fläche der Hauptkrümmungszentra für die durch die Orthogonaltrajektorien gehenden abwickelbaren Flächen (ε).

Einfache Beispiele sind die Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden eines Drehungshyperboloids und eines hyperbolischen Paraboloides. Sie liegen dem Satz zufolge auf der Tangentenfläche einer gemeinen Schraubenlinie bzw. einer auf einem parabolischen Zylinder verlaufenden Schraubenlinie.

Kennt man die Profilflächen und den Eingriffskegel einer konischen Verzahnung, so kann man eine Verzahnung mit abwickelbaren Profilflächen bei gekreuzten Radachsen daraus herzuleiten versuchen. Man hat nach dem oben angegebenen Verfahren aus dem Richtungskegel (N^0) die Regelfläche (N) durch A_1 und A_2 abzuleiten und dann eine Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden von (N) zu suchen. Dazu ist freilich eine Integration nötig, deren Ergebnis sich aber manchmal mit Hilfe des Satzes III voraus sehen läßt.

a) Als erstes Beispiel wählen wir die sphärische Evolventenverzahnung, bei welcher die Eingriffslinie ein durch M^0 gehender Großkreis ist. Da E^0 ebenso wie N^0 in der Eingriffsebene durch M^0 bleibt, müssen (E) und (N) je eine zu ihr parallele Richtungsebene haben, zu welcher daher auch die Normalebene δ parallel bleibt. Es ist also (N) ein durch die Radachsen gehendes hyperbolisches Paraboloid. Die Zentralebenen der Erzeugenden N stehen senkrecht zur Richtungsebene und umhüllen einen parabolischen Zylinder. In einer Projektion auf die Richtungsebene erscheinen also die Erzeugenden N als Tangenten einer Parabel; eine Orthogonaltrajektorie dieser Tangenten, d. h. eine Parabelevolvente, ist die Projektion von (q), und die Tangenten dieser Parabelevolvente sind schließlich die Projektionen der Eingriffsgeraden E. Damit ist die Konstruktion der Eingriffsfläche gekennzeichnet. Zur Bestimmung der Profilflächen braucht man die sphärische Abbildung, in der die Profilkurven sphärische Kreisevolventen sind[2]). Die Drehungswinkel ψ_1 und ψ_2 sind dieser sphärischen Verzahnung zu entnehmen und damit aus jeder Eingriffsgeraden E die Erzeugenden der Profilflächen herzuleiten, welche in E zum Eingriff kommen.

Weiter seien zwei Verzahnungen kurz erwähnt, bei denen die sphärische Abbildung besonders einfach wird, die verallgemeinerte Olivierschе Verzahnung und eine von der früher besprochenen verschiedene Zykloidenverzahnung. Es sind dies die Fälle, wo q oder r_1 dauernd ins Unendliche fällt. Die Normale der Eingriffsfläche im unendlich fernen Punkt von E ist die unendlich ferne Gerade der Zentralebene von E.

b) Im ersten Fall, wenn q im Unendlichen liegt, muß die zugehörige Normale N durch die unendlichfernen Punkte von A_1 und A_2 gehen, die Zentralebene von E muß also immer zu A_1 und A_2 parallel sein. Dies ist nur möglich, wenn die Eingriffsfläche in eine zu A_1 und A_2 parallel gerichtete Ebene ausartet. Die Richtung von E ergibt sich als konstant und man stößt auf die bekannte Verzahnung, deren Profilflächen abwickelbare Schraubenflächen[3]) sind.

---

[1]) In Schell-Salkowski, Allg. Th. der Kurven doppelter Krümmung, S. 183, wird ein Sonderfall dieses Satzes betrachtet, wo (N) die Hauptnormalenfläche einer Raumkurve ist. S. auch ebendort S. 83.

[2]) Ueber diese Kurven, die auch als sphärische Schraubenlinien bezeichnet werden können, siehe Enz. der math. Wiss., III D 4 Fußn. 159.

[3]) J. Pützer, a. a. O., nennt sie Spiraloide. Spezialfall Th. Olivier, Théorie géometrique des engrenages, Paris, 1842, Cap. II 24.

c) Ist dagegen r_1 dauernd im Unendlichen gelegen, so umhüllt die Zentralebene von E eine zu A_1 parallele Zylinderfläche. Die Erzeugenden E der Eingriffsfläche haben dann gegen A_1 konstante Neigung [1]), ebenso diejenigen der Profilfläche Φ_1, welche daher eine Zylinderfläche sein muß. In der sphärischen Abbildung artet das eine Profil in einen Punkt aus; das andere wird eine sphärische Epitrochoide. Die Eingriffslinie, ein Kreis um $A_1{}^0$, geht im allgemeinen nicht durch M; ist dies aber der Fall, so wird $\Phi_2{}^0$ das Kopfprofil eines Kegelrades mit Zykloidenverzahnung. Will man die zugehörige von der in **4** beschriebenen verschiedene räumliche Zykloidenverzahnung mit abwickelbaren Profilflächen finden, so sind auf der Regelfläche (N), die einen Richtungskegel (N^0) von der dritten Ordnung besitzt, also selbst von der sechsten Ordnung ist, die Orthogonaltrajektorien (q) der Erzeugenden zu bestimmen. Diese Aufgabe führt auf elliptische Funktionen [2]).

d) Schließlich greifen wir noch einmal auf die früher beschriebene Zykloidenverzahnung zurück, von der gezeigt wurde, daß sie die Satzeigenschaft besitzt und daß zu dem Rädersatz ein Zahnprofil mit ebener Radialflanke gehört. In der sphärischen Abbildung [3]) ist E^0 der Schnitt zweier durch M^0 und Q^0 gehender, auf einander senkrechter Ebenen. E^0 beschreibt also einen sogenannten Orthogonalkegel, während N^0, weil es auf Q^0 senkrecht steht, ein ebenes Strahlbüschel beschreibt. $A_1{}^0$ und $A_2{}^0$ liegen in der Ebene $[M^0\,Q^0]$ und zwar wählen wir für $A_2{}^0$ die besondere Lage senkrecht zu Q^0, so daß $A_2{}^0$ in die Ebene (N^0) fällt. $A_1{}^0$ soll zunächst mit Q^0 zusammenfallen, später aber beliebig gewählt werden. Es wird sich zeigen, daß man von der so bestimmten sphärischen Radialflankenverzahnung ausgehend zu einer ganz neuen räumlichen Radialflankenverzahnung gelangt, welche nicht mit der in **4** beschriebenen zusammenfällt.

Die Geraden N schneiden nämlich A_1 alle in demselben Punkt o_1, bilden also ein ebenes Strahlbüschel wie (N^0), während in **4** (N) ein Paraboloid war. Der Unterschied erklärt sich daraus, daß in **4** die Radachse A_2, wenn sie zu Q senkrecht stehen soll, ins Unendliche rücken muß, während wir jetzt annehmen wollen, daß A_2 im Endlichen gelegen ist, was mit der sphärischen Abbildung nicht unvereinbar ist. Die Orthogonaltrajektorien (q) von (N) sind Kreise um o_1. Da die Profilflächen, welche verschiedenen Kreisen um o_1 entsprechen, Parallelflächen sind, genügt es, den Fall zu untersuchen, wo der Kreis unendlich klein ist. Wieder wie in **4** artet die Zylinderfläche (δ), welche zu M parallel sein und die Geraden N berühren soll, in eine Gerade L aus. Dieselbe schneidet aber hier die Radachse A_1 in o_1. Die Eingriffsfläche ist ein Orthogonalkegel durch A_1 und L. Die Profilfläche Φ_2 wird von einer Ebene umhüllt, welche sich um A_1 dreht, während A_1 selbst sich um A_2 dreht. Die Winkelgeschwindigkeiten verhalten sich dabei wie ω_1 zu $-\omega_2$. Jetzt gehen wir zu einer von Q verschiedenen durch o_1 gehenden Radachse über. Soll die Eingriffsfläche dieselbe bleiben, so muß L, also die Richtung von M, festgehalten werden, während sich das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten der Zahnräder ändert. Weil die Eingriffsfläche eine Kegelfläche ist, durch deren Spitze die Radachse A_1 geht, ist das erste Zahnrad ein Kegelrad. Das zweite hat wie vorher die Profilfläche Φ_2. Die Satzeigenschaft bezieht sich hier also zunächst nur auf das erste Rad, welches aus einem Satz von Kegelrädern, zu dem ein Zahnprofil mit Radialflanke gehört, beliebig ausgewählt werden kann. Aber auch für die zweite Radachse hat man einen gewissen Spielraum. Man kann nämlich die beiden Profilflächen beliebig vergrößern, so daß sie zu sich selbst ähnlich bleiben. Die erste Profilfläche ändert sich als Kegelfläche dabei gar nicht. Dies läuft darauf hinaus, daß man die zweite Radachse in der Richtung des gemeinsamen Lotes der Radachsen parallel zu sich selbst verschieben kann. Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten ändert sich dabei nicht mehr.

Es ist leicht einzusehen, daß diese wichtige Verzahnungsart, welche zum Unterschied von **4** als Radialflankenverzahnung zweiter Art bezeichnet werden möge, sich noch in einer Richtung verallgemeinern läßt, wenn man nämlich statt o_1 einen beliebigen Punkt q von A_1 als Kegelspitze wählt. (N) ist dann das Strahlbüschel der durch q und A_2 gehenden Geraden. In seiner Ebene kann die Achse des zweiten Rades parallel zu sich selbst verschoben werden, während das erste Rad wieder ein Kegelrad ist, welches aus einem Satz von Kegelrädern beliebig ausgewählt werden kann. Die

[1]) Schell-Salkowski, S. 83.

[2]) Sphärische Abbildung dieser Verzahnung: M. Distell, Zeitschr. für Math. und Phys. 56, (1908), S. 251.

[3]) Distell, a. a. O. S. 255.

Achsen dieser Kegelräder liegen in einer durch q gehenden Ebene, welche zu A_2 parallel ist. Eine Radialflanke kommt in diesem Satz aber nicht mehr vor. Damit sind die Verzahnungen mit abwickelbaren Profilflächen erschöpft, welchen die Satzeigenschaft zukommt, wie man leicht daraus schließt, daß die Radachsen sämtlicher Satzräder die Erzeugenden einer Regelfläche (N) schneiden müssen.

II. Allgemeine räumliche Verzahnung.

8. Bestimmung der Eingriffsfläche aus einer gegebenen Profilfläche. Dreht man eine beliebig gegebene Profilfläche Φ_1 um die zugehörige Radachse A_1, so erhält man für jede ihrer Lagen die Berührungskurve mit dem Gegenprofil als Charakteristik bezüglich der Schraubung um M mit dem Parameter h. Aus diesen Charakteristiken setzt sich die Eingriffsfläche zusammen. Im allgemeinen Fall wird man rechnerische Behandlung des Problems bevorzugen, indem man die Bedingung aufstellt, daß die Bahntangente eines Punktes der um A_1 gedrehten Profilfläche [1]) diese berührt.

Man kann jedoch auch graphisch die Aufgabe lösen, irgend eine Normale der Profilfläche so weit zu drehen, bis sie in die Eingriffslage gelangt, wo sie eine Nullinie des Nullsystems sein muß. Die unendlichferne Gerade einer zu A_1 senkrechten Ebene sei I, die zu ihr im Nullsystem konjugierte (zu M parallele) Gerade K. Man dreht die Profilnormale um A_1, bis sie K in einem Punkt k schneidet. Die Nullebene von k wird dann zu A_1 senkrecht stehen. Es gibt zwei solche Punkte k, die aber beide zu den gleichen Lösungen führen. Ist einer derselben gefunden, dann macht die weitere Konstruktion keine Schwierigkeit mehr. Durch den Punkt k geht eine Erzeugende G der zweiten Schar auf dem von der Profilnormalen beschriebenen Drehungshyperboloid, deren Konjugierte H in der Nullebene von k liegt. Man bringt H mit dem in dieser Nullebene liegenden, durch k gehenden Parallelkreis des Drehungshyperboloids zum Schnitt. Durch jeden der beiden Schnittpunkte geht dann eine Eingriffslage N der gegebenen Profilnormale. Denn N schneidet zwei konjugierte Gerade G und H und ist daher Nullinie. In der Abb. 3 ist die Konstruktion in einer zu A_1 senkrechten Projektionsebene ausgeführt. Die ursprüngliche Lage der Profilnormalen ist nicht eingezeichnet. Die Konstruktion wird sehr einfach, weil sich G' und H' auf A'_2 treffen, da die durch den unendlichfernen Punkt von A_1 gehende, G und H schneidende Nullinie auch durch A_2 gehen muß, und weil H zur Ebene $[GK]$ parallel ist, da der Nullpunkt dieser Ebene der Schnittpunkt von H und I sein muß. Ihre Spur in der Projektionsebene ist in der Abbildung eingezeichnet.

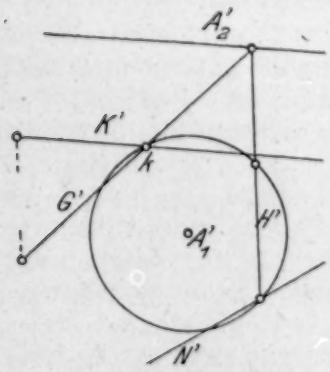


Abb. 3

Für spezielle Profilflächen lassen sich oft einfachere Konstruktionen finden; so müssen bei senkrecht gekreuzten Radachsen die Normalen einer Schraubenfläche mit A_1 als Achse, welche durch die Charakteristik derselben gehen, zwei konjugierte Gerade treffen. Auf dieser Grundlage beruht eine Konstruktion der Eingriffsfläche des Schneckengetriebes. [2])

Wenn eine Profilfläche die Form einer Drehungsfläche mit ganz beliebiger Achse hat, läßt sich die Charakteristik, wie folgt, finden. Eine kleine Schraubung der Achse der Drehungsfläche um M läßt sich ersetzen durch eine kleine Drehung um die zur Achse konjugierte Gerade. Dasselbe gilt dann auch von der Drehungsfläche selbst, wenn man von einer kleinen Drehung derselben in sich, der zu jener konjugierten Drehung, absieht. Die Charakteristik bezüglich der Schraubung ist also genau dieselbe, wie diejenige bezüglich einer kleinen Drehung um die zur Achse der Drehungsfläche konjugierte Gerade. Ein besonderer Fall sei noch hervorgehoben. Wenn die Achse der Drehungsfläche momentan zu M parallel wird, geht die Charakteristik, welche dann zugleich einer Parallelverschiebung entspricht, in die Eigenschattengrenze für parallel einfallende Strahlen

---

[1]) In dem oben gewählten Koordinatensystem sei ihre Gleichung

$$f(x\cos\psi_1 + y\sin\psi_1,\ y\cos\psi_1 - x\sin\psi_1, z) = 0.$$

Die Richtungkosinus der Bahntangente verhalten sich wie $-ny + z : nx - a\operatorname{ctg}\alpha : -(x-a)$, wenn $n = \operatorname{ctg}(A_1 M)$. Damit ist die Gleichung der Charakteristik sofort anzuschreiben. Vgl. auch H. Resal, C. R. 117, S. 391.

[2]) S. meine Abh. Zeitschr. für Math. und Phys., Bd. 60, (1912), S. 250.

über. Zu ihrer Konstruktion wird in den Lehrbüchern der Darstellenden Geometrie das sogenannte Kugelverfahren empfohlen. Es ist dies genau die Konstruktion, in welche die am Schluß von **5** angegebene Charakteristikbestimmung für Drehungsflächen in diesem Sonderfalle übergeht.

Ort der Berührungspunkte der Profilflächen mit der Eingriffsfläche. Die Bestimmung der Eingriffslage wird am einfachsten bei den Profilnormalen, welche die Radachse A_1 treffen. Man hat sie nur zu drehen, bis sie auch die zweite Radachse A_2 schneiden, weil sie in dieser Lage Nullinien sind. Die Kurve (q_1), deren Normalen durch A_1 gehen, ist die Charakteristik der Profilfläche Φ_1 bezüglich einer Drehung um A_1. Die entsprechende Eingriffslinie (q) ist auf der von (q_1) beschriebenen Drehungsfläche Δ_{q_1} wieder wie in **5** zu bestimmen, indem man den Parallelkreis, welchen q_1 beschreibt, mit einer Ebene zum Schnitt bringt, die durch A_2 und den Schnittpunkt der Profilnormale in q_1 mit A_1 geht. Die beiden Schnittpunkte bestimmen dann die Eingriffstellen der Profilnormale. Jeder Punkt von Φ_1, dessen Normale durch A_1 geht, kann daher offenbar nur mit einem Punkt von Φ_2 zum Eingriff gelangen, dessen Normale A_2 trifft.

Satz IV: Die Charakteristiken der Profilflächen bezüglich ihrer Drehachsen kommen miteinander zum Eingriff und zwar in einer Kurve, welche die zugehörigen Achsensekanten senkrecht durchschneidet.

Zur praktischen Kraftübertragung eignen sich die betreffenden Stellen der Profilflächen offenbar nicht, weil der Normaldruck dort durch die Radachsen geht, aber theoretisch sind sie wichtig. Denn wenn die Charakteristik (q_1) reell ist, so kann man unmittelbar (q) und dann die entsprechende Kurve (q_2) des Gegenprofils bestimmen. In einem Eingriffspunkt q werden die Profilflächen von der Eingriffsfläche berührt, weil die Tangente der Kurve (q) in die Berührungsebene der Profilflächen fällt, und außerdem die Eingriffsfläche ja die Berührungskurve der Profilflächen mit diesen gemein hat.

Da auch die Bahntangente von q in die gemeinschaftliche Berührungsebene der Profilflächen und der Eingriffsfläche fällt, läßt sich (q) auch auf der Eingriffsfläche definieren als Ort der Punkte, deren Bahntangenten die Eingriffsfläche berühren. Zu der so definierten Kurve der Eingriffsfläche gehört allerdings außer der Kurve (q) auch der Ort der Punkte, wo die Bahntangente mit der Tangente der Profilberührungslinie zusammenfällt. Die beiden Kurven bilden zusammen die Charakteristik der Eingriffsfläche bezüglich der zum Nullsystem gehörigen Schraubung.

Nach den ausgeführten Konstruktionsmethoden muß jeder Punkt der Profilfläche Φ_1 an zwei Stellen zum Eingriff gelangen. Daraus folgt z. B. für die im Abschnitt I behandelten abwickelbaren Profilflächen, daß jede noch ein zweites nicht abwickelbares Gegenprofil haben muß. Im allgemeinen Falle können die zwei zu einem Profilpunkt gehörigen Eingriffspunkte auch imaginär werden. Die Punkte der Profilfläche, welche die zweimal von den gar nicht zum Eingriff gelangenden Punkten trennen, bilden eine mathematische Eingriffsgrenze. Denkt man sich alle Berührungskurven der Profilflächen auf eine Anfangslage der Profilfläche durch Zurückdrehen um A_1 zurückgeführt, so bilden sie die Kurven gleichzeitigen Eingriffs auf der Profilfläche. Durch jeden Punkt der Profilfläche gehen zwei solche Kurven gleichzeitigen Eingriffs, die für die Punkte ihrer Hüllkurve, eben jener Grenzkurve, zusammenfallen [1]). Für den Fall einer ebenen Profilfläche schließt man daraus, daß diese Hüllkurve eine Kurve zweiter Klasse ist, deren Tangenten die Linien gleichzeitigen Eingriffs bilden.

Wenn ein Punkt der Hüllkurve in r_1 zum Eingriff kommt, so geht die Normale der Eingriffsfläche in r_1 durch A_1. Denn der Punkt beschreibt um A_1 einen Kreis, welcher bei r_1 zwei konsekutive Berührungslinien trifft. Dreht man also die Eingriffsfläche um A_1, so zerfällt die einhüllende Drehungsfläche in Δ_{q_1} und Δ_{r_1}.

9. Gleitkurvenpaare. Wenn eine Verzahnung aus der Eingriffsfläche hergeleitet werden soll, sind diejenigen Kurvenpaare von Bedeutung, welche bei der Bewegung sich stets berührend aneinander hingleiten. Sie sollen kurz Gleitkurvenpaare genannt werden. Solche Kurven treten auf jeder bewegten Fläche und deren Hüllfläche in einfach unendlicher Zahl auf. Nun können bei jeder räumlichen Bewegung auch ganz unabhängig

[1]) Man erhält neben $f(x, y, z) = 0$ für die Kurven gleichzeitigen Eingriffs, welche je einem konstanten Wert von ψ_1 entsprechen, eine Gleichung $A \cos \psi_1 + B \sin \psi_1 = C$, wo $A\ B\ C$ Funktionen der Koordinaten $x\ y\ z$ eines Profilpunktes sind. Die Hüllkurve ist durch $A^2 + B^2 = C^2$ bestimmt.

von einer Fläche im bewegten System Gleitkurven definiert werden als solche Kurven, deren Tangenten Bahntangenten ihrer Punkte sind. Ihre Hüllkurven sind dann die Gegengleitkurven.

Bei der Zahnradbewegung gilt:

Satz V: Durch Drehung eines Paares von Gleitkurven um die zugehörigen Radachsen entstehen Drehungsflächen, welche sich längs der Eingriffslinie der Gleitkurven berühren.

Wenn die beiden Gleitkurven G_1 und G_2 sich momentan in einem Punkt p berühren, dann schneidet die Nullebene von p, welche auf der gemeinschaftlichen Tangente von G_1 und G_2 senkrecht steht, die Radachsen in Punkten, deren Verbindungslinie als Nullinie durch p geht. Diese Verbindungslinie ist gemeinsame Normale der Drehungsflächen in p. Auf derselben steht die Tangente der Berührungskurve G der Drehungsflächen senkrecht, deshalb hat man weiter den Satz:

Die Eingriffslinie eines Gleitkurvenpaares schneidet die Erzeugenden einer durch die Radachsen gehenden Regelfläche senkrecht[1]).

Umgekehrt gibt es zu jeder Orthogonaltrajektorie G einer durch A_1 und A_2 gehenden Regelfläche ein Gleitkurvenpaar, welches man etwa durch eine graphische Integration finden kann, die der in **5** beschriebenen analog in einer zu A_1 bzw. A_2 senkrechten Projektionsebene ausgeführt werden kann.

Sind $d\mathfrak{s}_1$ und $d\mathfrak{s}_2$ zwei aneinander in der Zeit dt hingleitende Bogenelemente der Gleitkurven, so ist das entsprechende Element der Eingriffslinie G:

$$d\mathfrak{s} = d\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{v}_1\, dt = d\mathfrak{s}_2 + \mathfrak{v}_2\, dt^2).$$

Bezeichnet man das Gleitverhältnis $d\mathfrak{s}_1 : d\mathfrak{s}_2$ mit λ, so ist $d\mathfrak{s} = \dfrac{\mathfrak{v}_1 - \lambda\,\mathfrak{v}_2}{1-\lambda}\, dt$.

Die Momentanbewegung des Eingriffspunktes p auf G läßt sich aus zwei kleinen Drehungen um A_1 und A_2 zusammensetzen. Die Winkelgeschwindigkeiten sind dabei $\dfrac{\omega_1}{1-\lambda}$ und $\dfrac{-\lambda\,\omega_2}{1-\lambda}$.

Bestimmung einer Verzahnung aus der Eingriffsfläche. Mittels der Gleitkurven läßt sich die Aufgabe lösen, Profilflächenpaare zu bestimmen, welche auf einer gegebenen Fläche zum Eingriff gelangen können. Dabei sind die Radachsen und Winkelgeschwindigkeiten als gegeben zu betrachten. Die Gleitkurven eignen sich zu diesem Zweck, weil ihr Eingriff von der nächsten Umgebung der Profilflächen unabhändig ist, eine Eigenschaft, die anderen Kurven der Profilflächen nicht zukommt.

Kennt man unendlich viele eine Fläche (G) erfüllende Kurven G, welche die durch ihre Punkte gehenden Achsensekanten senkrecht durchschneiden, so sind alle Profilflächenpaare Φ_1 und Φ_2, welche (G) zur Eingriffsfläche haben, wie folgt zu bestimmen.

---

[1]) Die Kurve muß der Differentialgleichung genügen:

$$(x-a)\,(x\,dx + y\,dy) + (xz - ay\,\operatorname{ctg}\alpha)\,dz = 0.$$

[2]) Aus diesen Gleichungen kann man die Gleitkurven rechnerisch bestimmen. Denn da der Vektor $d\mathfrak{s}_1 = d\mathfrak{s} - \mathfrak{v}_1\, dt$ zur Bahntangente parallel sein soll, müssen die Komponenten $dx - y\,d\psi_1$, $dy + x\,d\psi_1$, dz zu den Richtungscosinus der Bahntangente, also zu $-ny+z$, $nx - a\operatorname{ctg}a$, $-(x-a)$ proportional sein, woraus sich neben der Gleichung der Fußn. 1 das folgende Integral für den Drehungswinkel ψ_1 ergibt

$$\psi_1 = \int \frac{n\,(x\,dx + y\,dy) - a\,\operatorname{ctg}\alpha\,dx - z\,dy}{xz - a\,\operatorname{ctg}\alpha\, y}.$$

Um den Arbeitsverlust durch gleitende Reibung zu vermindern, sucht man $d\mathfrak{s}_1 - d\mathfrak{s}_2 = (\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2)\,dt$ möglichst klein zu machen. Die Länge dieses Vektors ist nun für einen Punkt, der die Entfernung l von M hat $\sqrt{h^2 + l^2}\,dt$, so daß das Ziel umso besser erreicht wird, je näher man den Eingriff an M heranrückt. Aber man sieht, daß der erreichte Vorteil bei der hyperboloidischen Verzahnung ein weit geringerer ist, als bei der konischen und zylindrischen, wo h Null ist, weil $\sqrt{h^2 + l^2}$ sich nur wenig ändert, wenn l gegen Null hin abnimmt, wenn nur l gegen h klein gewählt wird.

Während die Bewegung zweier Zahnräder, deren Eingriff momentan oder dauernd in M stattfindet, eine rein rollende ist, wenn die Radachsen in einer Ebene liegen (Whitesche Schraubenräder), kann bei windschiefen Radachsen, wo h von Null verschieden ist, für keinen Punkt des Raumes $d\mathfrak{s}_1 = d\mathfrak{s}_2$ werden, und Olivier (Th. des engr. S. 100) konnte nur zu einer »rein rollenden« hyperboloidischen Verzahnung gelangen auf Grund einer sonderbaren, von der jetzt üblichen ganz verschiedenen Definition des Rollens. Die von ihm angegebenen Zahnräder sind auch gar nicht geeignet, die Reibungsarbeit zu vermindern.

Aus den Kurven G leitet man die Gleitkurven G_1 durch Integration ab. Die Profilfläche Φ_1 entsteht durch Zusammensetzung aus diesen Gleitkurven G_1, die aber wegen der freien Wahl der Integrationskonstanten noch insofern willkürlich ist, als jede Kurve G_1 noch beliebig um A_1 gedreht werden darf, wenn nur durch die Zusammensetzung der Kurven eine kontinuierliche Fläche entsteht. Man kann etwa eine beliebige Raumkurve wählen, durch welche Φ_1 gehen soll. Dann ist aber die Verzahnung bestimmt, da die Gegenprofilfläche durch die Proportionalität der Drehungswinkel zu finden ist. Am bequemsten und ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit wählt man die Kurve auf der Eingriffsfläche selbst. Sie ist dann eine Kurve gleichzeitigen Eingriffs.

Um alle zu einer beliebigen Eingriffsfläche gehörigen Verzahnungen zu finden, muß man also zuerst diejenigen Kurven G der Fläche bestimmen, welche ihre Achsensekanten senkrecht schneiden [1]).

Auf der Eingriffsfläche geht durch jeden Punkt ein Bogenelement einer Kurve G, welches senkrecht zur zugehörigen Achsensekante gerichtet ist. Singuläre Punkte sind nur die Schnittpunkte der Eingriffsfläche mit den Radachsen, sowie diejenigen Punkte der Eingriffsfläche, in denen die Normale durch beide Radachsen geht. Solche Punkte, die früher mit q bezeichnet wurden, treten auf beliebig gewählten Eingriffsflächen im allgemeinen in endlicher Zahl auf. Geht man dagegen von einer beliebigen Profilfläche aus und bestimmt aus ihr die Eingriffsfläche, so befinden sich auf dieser im allgemeinen unendlich viele Punkte der genannten Eigenschaft, die eine singuläre Kurve (q) bilden, wie aus **8** hervorgeht. Um festzustellen, wie sich die Kurven G in einem singulären Punkt verhalten, kann man die Kurven in der Berührungsebene zum Vergleich heranziehen, welche die zugehörigen Achsensekanten senkrecht schneiden; dieselben müssen in der nächsten Umgebung des singulären Punkts mit den Kurven G zusammenfallen.

Es ist somit das Beispiel zu behandeln, wo die Eingriffsfläche eine beliebige Ebene ist. Die in einer Ebene liegenden Kurven G, durch deren Drehung um zwei Geraden A_1 und A_2 zwei sich berührende Drehungsflächen entstehen, hat Herr G. Scheffers [2]) untersucht und gefunden, daß diese Kurven Orthogonaltrajektorien einer Schar von in der Ebene liegenden Klein-Lieschen W-Kurven sind. Diese W-Kurven schneiden A_1 und A_2 und berühren in den Schnittpunkten die Projektionen von A_1 und A_2 auf die Ebene. Diese Projektionen selbst gehören zu den W-Kurven. Sie schneiden sich in dem singulären Punkt q. Andere W-Kurven gehen nicht durch diesen Punkt. Es gehen daher auch nur zwei Kurven G durch den singulären Punkt q, und im Fall der Existenz einer singulären Kurve (q) geht durch jeden Punkt derselben noch eine Kurve G.

Wenn man die Profilflächen, sowie die Eingriffsfläche einer Verzahnung kennt und auf der letzteren die Eingriffslinien der Gleitkurven sich bestimmen lassen, so kann man leicht alle zu der Eingriffsfläche gehörigen Verzahnungen angeben. Denn dreht man eine Kurve G um A_1, so schneidet die entstehende Drehungsfläche aus der Profilfläche Φ_1 die entsprechende Gleitkurve G_1 aus, so daß man aus den Kurven G alle Gleitkurven G_1 und G_2 und aus diesen alle gesuchten Verzahnungen ableiten kann.

Für einen der unter **7** angedeuteten Fälle (b) waren die Profilflächen abwickelbare Schraubenflächen, die Eingriffsfläche eine zu den Radachsen parallele Ebene. Wenn insbesondere die Radachsen sich senkrecht kreuzen, so ergibt sich für die Kurven G eine Schar von Hyperbeln mit gemeinschaftlichen Asymptoten, welche gegen die Radachsen gleiche Neigung haben [3]). Dreht man diese Hyperbeln um A_1, so entstehen Drehungs-

---

[1]) Dies geschieht durch Integration der Gleichung der Fußn. 1 S. 442 mit der Gleichung $z = f(x, y)$ der Eingriffsfläche. Ist das Integral in der Form $\varphi(x, y, z) = \mu$ gefunden, so liefert das Integral der Fußn. 2 vollends die allgemeine Lösung der Aufgabe, wenn man die Integrationskonstante gleich einer beliebigen Funktion von μ setzt. Damit ist das allgemeine Integral einer partiellen Differentialgleichung für ψ_1 gekennzeichnet, welche man durch eine nicht ganz einfache Rechnung aus der Grundbedingung erhalten kann, daß die Bahntangenten der Punkte der Berührungskurve der Profilflächen die letzteren berühren müssen. Sie lautet, wenn die partiellen Differentialquotienten von z nach x und y mit p und q bezeichnet werden:

$$\left(q\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - p\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)(xz - a\operatorname{ctg}\alpha y) + \left(y\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - x\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)(x - a) + p(-ny + z) + q(nx - a\operatorname{ctg}\alpha) + x - a = 0.$$

Die Gleitkurven sind die Charakteristiken der Differentialgleichung.

[2]) Mathematische Zeitschrift 11 (1921), S. 315.

[3]) Enzykl. der Math. Wiss., III D 4, Nr. 17.

hyperboloide mit gemeinschaftlichem Asymptotenkegel, welche aus der abwickelbaren Schraubenfläche Φ_1, die Gleitkurven G_1 ausschneiden; aus diesen lassen sich beliebig viele neue Profilflächen zusammensetzen, wenn man sie um A_1 dreht, bis sie eine beliebige Raumkurve schneiden.

Diese Schnittkurven von einer abwickelbaren Schraubenfläche mit einem Drehungshyperboloid um die Schraubenachse sind zugleich geeignete Beispiele für Gleitkurven. Die einfachsten unter denselben sind diejenigen, welche eine Gerade (vgl. 4) zur Eingriffslinie haben. Der Kehlkreis des Hyperboloids liegt dann auf dem Zylinder, welcher durch die Rückkehrkurve der Schraubenfläche geht. Die betreffende Kurve gehört zu den von Olivier untersuchten »Developpantes hyperboloidiques«[1]).

10. Verzahnung mit kongruenten Eingriffslinien. Wenn sich ein räumliches System Σ so bewegt, daß jede Momentanbewegung sich aus Drehungen um A_1 und A_2 zusammensetzen läßt, die sich wie $\omega_1 : -\omega_2 \lambda$ verhalten mögen, so beschreibt jeder Punkt p des Systems eine Orthogonaltrajektorie seiner Achsensekanten. Denn die beiden Geschwindigkeitskomponenten, welche dem Punkt durch eine Elementardrehung um jede der beiden Radachsen verliehen werden, stehen senkrecht auf der durch p gehenden Achsensekante, also auch die resultierende Geschwindigkeit. Man kann daher jede Bahnkurve einer solchen Bewegung als Eingriffslinie eines Gleitkurvenpaares ansehen, und wenn man die Bahnfläche einer beliebigen Kurve des Systems Σ als Eingriffsfläche wählt, entstehen Verzahnungen, die besondere Beachtung verdienen.

Die beschriebene Hilfsbewegung des Systems Σ liegt den Untersuchungen von M. Disteli über geradlinigen Eingriff[2]) zu grunde. Die Momentanachsen der Hilfsbewegung bilden bekanntlich ein Zylindroid (Plückersches Konoid)[3]), das Rastaxoid der Bewegung. Das Gangaxoid ergibt sich bei der Betrachtung der umgekehrten Bewegung.

Die umgekehrte Bewegung läßt sich besonders einfach beschreiben mittels der Bahnkurven der Punkte o_1 und o_2, in denen die Radachsen durch ihr gemeinsames Lot getroffen werden. Dieselben sind nämlich ein Paar Bertrandscher Kurven. Die Bahnfläche (A_1) entsteht dadurch, daß A_1 in jedem Moment um die Achse A_2, die aber selbst auch bewegt wird, eine kleine Drehung ausführt. Würde man A_2 festhalten, im übrigen A_1 in jedem Moment ganz ebenso um A_2 drehen, wie es vorher geschah, so würde A_1 ein Drehungshyperboloid um A_2 beschreiben, dessen Erzeugende denen der Regelfläche (A_1) zugeordnet sind und zwar derart, daß die beiden Flächen auf einander abrollen können. Man braucht nur die direkte Bewegung zu betrachten, bei der die Fläche (A_1) sich durch die Radachse A_1 durchbewegt. Sie wird das Drehungshyperboloid stets dabei berühren und man kann dieses mit einer solchen Geschwindigkeit um A_2 drehen, daß ein Punkt desselben, welcher auf der Berührungslinie mit (A_1) liegt, genau dieselbe Geschwindigkeit hat, wie der entsprechende Punkt von (A_1). Daraus geht hervor, daß (A_1) auf das Drehungshyperboloid abwickelbar ist. Entsprechendes gilt von der Bahnfläche, welche A_2 bei der umgekehrten Bewegung beschreibt und nach einem Satze von Laguerre und Bioche[4]) müssen o_1 und o_2 Bertrandsche Kurven beschreiben.

Das Gangaxoid der Hilfsbewegung läßt sich aus der Hauptnormalenfläche der Bertrandschen Kurven leicht ableiten. Die Momentanachse der umgekehrten Bewegung ist die Achse zweier Schraubenlinien, welche die Bertrandschen Kurven in entsprechenden Punkten oskulieren. Durch zwei konsekutive Hauptnormalen ist dieselbe aber als ihr gemeinsames Lot bestimmt. Also gilt: Das Gangaxoid besteht aus den Striktionsstrahlen der Hauptnormalenfläche der Bertrandschen Kurven. Und weiter:[5]) Das Gangaxoid und die Hauptnormalenfläche der Bertrandschen Kurven berühren sich längs ihrer gemeinsamen Striktionslinie und die Erzeugenden der beiden Regelflächen durchschneiden sich dort senkrecht. Die eine Fläche besteht aus den Striktionsstrahlen der anderen.

Die Fläche (M), welche die Zentralachse bei der umgekehrten Bewegung beschreibt, läßt sich leicht aus den Bertrandschen Kurven ableiten, da M gegen A_1 und A_2 eine feste Lage hat.

---

[1]) Th. des engr., S. 48. Die Gleitkurve kann im besonderen auch Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden des Hyperboloids werden. Durch Rechnung ergibt sich, daß dann das Abstandsverhältnis der Eingriffsebene von den Radachsen die dritte Potenz von dem Verhältnis der kürzesten Abstände der Zentralachse von den Radachsen sein muß. Vgl. Satz III.

[2]) Zeitschr. für Math. und Phys. 59, (1911), S. 252.

[3]) Enzykl. der Math. Wiss., IV 2. 16.

[4]) Enzykl. der Math. Wiss., III D 4, Fußn. 119 und Nr. 30.

[5]) Schell-Salkowski, Kap. VIII 1, S. 75.

Die direkte Hilfsbewegung läßt sich jetzt auch ohne die Axoide folgendermaßen darstellen. Zwei starr verbundene Bertrandsche Kurven, deren konstanter senkrechter Abstand gleich dem kürzesten Abstand der Radachsen ist, und deren Tangenten in entsprechenden Punkten denselben Winkel bilden, wie die Achsen A_1 und A_2, werden so durch o_1 und o_2 gezogen, daß ihre Tangenten in diesen Punkten stets senkrecht zu A_2 und A_1 gerichtet sind. Es gehört dann zu der Bahn jedes Punktes des bewegten Systems Σ ein Paar von Gleitkurven G_1 und G_2. Das Verhältnis λ der aneinander hingleitenden Bogenelemente ist zur gleichen Zeit in allen Punkten des Raumes dasselbe. Es läßt sich aus dem Bogenelementen der Bertrandschen Kurven, welche in derselben Zeit durch o_1 bezw. o_2 durchgleiten, einfach ableiten, da jene sich wie $\omega_2 \lambda : \omega_1$ verhalten müssen.

Die Geschwindigkeit der Bewegung des Systems Σ läßt sich insbesondere so regulieren, daß irgend einer seiner Punkte die Geschwindigkeit $\frac{v_1 - \lambda v_2}{1 - \lambda}$ besitzt, wenn er wieder, als Punkt des ersten bzw. zweiten Radkörpers aufgefaßt, die Geschwindigkeit v_1 bzw. v_2 haben würde. Für irgend einen Punkt, der momentan auf der Zentralachse gelegen ist, liegen die Endpunkte der drei Geschwindigkeiten auf einer Parallelen zu M. Die Gerade, welche momentan mit M zusammenfällt, gelangt also bei einer Momentanbewegung mit Σ an dieselbe Stelle, wie bei der entsprechenden kleinen Drehung um eine der Radachsen. Nur erscheinen die Punkte der Geraden in den neuen Lagen in der Geraden selbst gegen einander verschoben. Die Fläche (M) schrotet daher bei der Hilfsbewegung auf den um die Radachsen sich drehenden Grundhyperboloiden ab. Wenn ein Punkt von Σ die Kurve G beschreibt, sind seine Bahnen relativ zu den Radkörpern offenbar die Gleitkurven G_1 und G_2. Schließlich wird eine beliebige Kurve von Σ die Eingriffsfläche zweier Profilflächen beschreiben, welche die Bahnflächen derselben Kurve bezüglich der Radkörper sind. Die entstehende Verzahnung hat die Eigenschaft, daß die Berührungslinie der Profilflächen immer zu sich selbst kongruent bleibt.

11. Windschiefe Regelflächen als Profilflächen. Um zu zeigen, daß die Eingriffsfläche zweier windschiefer Regelflächen stets als Bahnfläche einer Geraden darstellbar ist, welche einem in der angegebenen Weise bewegten System Σ angehört, untersuchen wir das Gleitverhältnis der Gleitkurven längs einer Berührungslinie E der Profilflächen. Die Bahntangenten längs E bilden ein Paraboloid, dessen eine Richtungsebene zur konjugierten Geraden von E senkrecht steht. Dieses Paraboloid wird von beiden Profilflächen längs E berührt. Es müssen daher zwei einander entsprechende, zu E benachbarte Erzeugende der Profilflächen E_1 und E_2 mit E zur zweiten Schar der Erzeugenden des Paraboloids gehören. Die Stücke, welche E und E_1 bezw. E und E_2 auf einer Bahntangente begrenzen, sind die aneinander hingleitenden Elemente der Gleitkurven. Das Verhältnis dieser Elemente ergibt sich also längs E konstant. Daraus folgt aber nach **9**, daß E durch die Kombination zweier kleiner Drehungen um A_1 und A_2 in die Eingriffslage E' von E_1 und E_2 übergeführt werden kann.

Man könnte vermuten, daß auch besondere abwickelbare Profilflächen existieren, deren Eingriffsfläche durch eine Distelische Hilfsbewegung erzeugt werden kann. Die Erzeugenden E_1 und E_2 müssen dann E an derselben Stelle treffen: Sie ist nach dem Früheren mit r zu bezeichnen. Die Rückkehrkurven der beiden Profilflächen berühren sich in r. Nach **6** ist dies nur auf der Geraden D möglich, der Projektion von M auf die durch E parallel zu M gehende Ebene δ. Es ist also r der M nächstgelegene Punkt von E. Die Normale der Eingriffsfläche in r muß beide Radachsen treffen, die Kurve (r) also eine Orthogonaltrajektorie ihrer Achsensekanten sein. Die Rückkehrkurven der Profilflächen bilden dann ein Gleitkurvenpaar, dessen Schmiegungsebenen beim Eingriff zusammenfallen, nämlich in der Ebene ε, welche die Eingriffsgerade E zur Charakteristik hat. Untersucht man durch Rechnung, ob sich die Eingriffsfläche einer so gekennzeichneten Verzahnung durch eine Distelische Hilfsbewegung darstellen läßt, so findet man, daß nur die abwickelbaren Schraubenflächen die verlangte Eigenschaft besitzen, welche durch Verschraubung einer beliebigen Bahntangente um M entstehen. Die Profilflächen würden mit der Eingriffsfläche zusammenfallen, so daß keine eigentliche Verzahnung der verlangten Art existiert.

Die Verzahnungen mit geradlinigem Eingriff lassen sich also in zwei Gruppen trennen, von denen die erste als Profilflächen windschiefe Regelflächen besitzt, während die Profilflächen der zweiten sich in die Ebene abwickeln lassen. Außer dem Verhalten der Striktionslinien, die nur bei der ersten Gruppe miteinander zum Eingriff kommen,

sind noch andere Unterschiede hervorzuheben, welche für die beiden Gruppen charakteristisch sind. Bei der zweiten Gruppe ließ sich auf jeder Eingriffsgeraden ein Punkt finden, in welchem die Eingriffsfläche von den Profilflächen berührt wird. Bei der ersten Gruppe gibt es dagegen immer zwei solche Punkte auf jeder Eingriffsgeraden, weil zwei Regelflächen, welche eine Erzeugende gemein haben, im allgemeinen sich in zwei Punkten derselben berühren. Bei der ersten Gruppe schneiden zwei Gleitkurven einer Profilfläche aus den Erzeugenden gleiche Stücke aus[1]), was bei der zweiten nicht der Fall ist.

Um von einer gegebenen konischen Verzahnung zu einer hyperboloidischen Verzahnung mit windschiefen Profilflächen zu gelangen, untersuchen wir zunächst die Distelische Hilfsbewegung in der sphärischen Abbildung, insbesondere die inverse Bewegung. Den beiden auf Drehungshyperboloide abwickelbaren Bahnflächen (A_1) und (A_2) entsprechen zwei sphärische Parallelkurven. Denn dem Zylindroid entspricht eine Ebene, welche bei der inversen Bewegung auf einer Kegelfläche abrollt. In dieser Ebene liegen die Geraden $A_1^0\, A_2^0\, M^0$, sowie die Parallelen zu den Bahntangenten T_1 und T_2 von o_1 und o_2. Die Schnittpunkte sämtlicher 5 Geraden mit der Bildkugel beschreiben daher sphärische Parallelen. Seien die Bahnen, welche A_1^0 und T_1^0 auf der Bildkugel ausschneiden, durch die in Funktion eines beliebigen Parameters gegebenen Koordinaten eines Bahnpunktes bestimmt. Um die zugehörige Bertrandsche Kurve zu bestimmen, braucht man nur die Richtungskosinus ihrer Tangente $t_x\, t_y\, t_z$, welche zugleich diejenigen von T_1^0 sind, mit $\frac{a}{\sin\alpha}\, d\sigma$ zu multiplizieren und zu integrieren. Dabei bedeutet $d\sigma$ das Bogenelement der sphärischen Indikatrix von A_1, welches sich zum Bogenelement der Bertrandschen Kurve ds wie $\sin\alpha$ zu a verhält $(a = o_1\, o_2;\ \alpha = \sphericalangle\, A_1\, A_2)$. Wenn man nämlich A_1 eine kleine Drehung um A_2 ausführen läßt, beschreibt o_1 das Bogenelement $ds = a\, d\tau$ und A_1 bildet mit der Ausgangslage den Winkel $d\sigma = \sin\alpha\, d\tau$, wo $d\tau$ den kleinen Drehungswinkel bedeutet.

Sind die beiden Bertrandschen Kurven gefunden, dann läßt sich vollends die Eingriffsfläche, sowie die Profilflächen der hyperboloidischen Verzahnung ohne weitere Integration ableiten.

Weil allen Geraden des Systems Σ, welche dieselbe Richtung haben, in der sphärischen Abbildung nur ein einziger Strahl entspricht, gehören hier zu jeder konischen Verzahnung ∞^2 hyperboloidische Verzahnungen.

Wenn man die Ebene $[A_1^0\, A_2^0]$ auf einem Kreiskegel abrollen läßt, so daß die sphärischen Parallelen sphärische Schraubenlinien sind, so ist auch die sphärische Abbildung der gemeinsamen Hauptnormalen der zugehörigen Bertrandschen Kurven ein Kreis und man gelangt zu den von Herrn E. Salkowski[2]) behandelten Bertrandschen Kurven.

12. Praktische Gesichtspunkte. Wenn man die in der vorliegenden Abhandlung genannten räumlichen Verzahnungen auf ihre praktische Verwendbarkeit und Herstellbarkeit prüfen will, springen die Vorzüge der Radialflankenverzahnung erster Art ins Auge. Sind die Radachsen sowie das Uebersetzungsverhältnis gegeben, so können die Hyperboloidräder ganz analog den Stirnrädern mit Zykloidenverzahnung konstruiert werden. Wie bei diesen hat man unendlich viel Möglichkeiten, die Eingriffsfläche auszuwählen und kann, wenn man will, eine solche für Kopf- und Fußprofil unterscheiden. Die Verzahnung ist von dem Mangel frei, welcher die Räder mit abwickelbaren Schraubenflächen als Profilflächen zur praktischen Verwendung unbrauchbar macht, daß sie sich nämlich nur für Drehung in einer Richtung einrichten lassen[3]). Eine der Zahnflanken ist aber konkav. Zur Herstellung der Räder eignet sich das zum Rädersatz gehörige Rad mit ebener Zahnflanke. Wenn man dessen Zahn als Fräser ausbildet, kann man mit demselben alle andern Räder des Satzes nach einem bekannten Verfahren herstellen, welches z. B. bei F. Grashof, Theor. Maschinenlehre II, S. 80, beschrieben ist und jetzt meist als Abwälzverfahren bezeichnet wird[4]).

Aehnliches gilt von der Radialflankenverzahnung zweiter Art, wenn man wieder alle Kegelräder des zugehörigen Satzes in die so bezeichnete Verzahnung einbezieht. Ein kleiner Nachteil gegenüber der Radialflankenverzahnung erster Art ist, daß sich der Eingriff von der Zentralachse M weiter entfernt. 177

---

[1]) Disteli, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 59, 1911, S. 263.

[2]) Math. Ann. 69, 1910, S. 560.

[3]) W. Dyck, Katalog math. Modelle, München 1892, S. 348.

[4]) Diese Herstellungsmethode wird insbesondere für Kegelräder verwendet (Bilgram-, Gleason-, Warrenmaschine u. a. Vgl. C. Barth, Die Grundlagen der Zahnradbearbeitung.)

Über die Genauigkeitssteigerung durch Hinzutreten einer neuen Beobachtung.

Von **A. BASCH** in Wien.

In der Meßtechnik tritt sehr oft die Frage auf, ob und inwieweit durch das Hinzutreten einer neuen Beobachtung zu einer Beobachtungsreihe die Güte dieser Beobachtungsreihe und die Genauigkeit ihres Ergebnisses gesteigert wird. Diese Frage soll hier zunächst für den einfach liegenden Fall der direkten Beobachtungen und sodann für den wichtigsten Fall der vermittelnden Beobachtungen besprochen werden. Es wird insbesondere untersucht, wie die neu hinzutretende Beobachtung gelegen sein muß, damit einesteils die gesamte Beobachtungsreihe als solche, andererseits das Beobachtungsergebnis in seiner Genauigkeit verbessert wird.

1. Direkte Beobachtungen. Für eine gesuchte Größe X mögen n direkte Beobachtungen (Lesungen) l_ν mit den Gewichten p_ν ($\nu = 1, 2 \ldots n$) vorliegen. Dann ist bekanntlich der »vorteilhafteste Wert« der gesuchten Größe X bezw. der »vorteilhafteste Fehler« der Lesung l_ν

$$x = \frac{[p\,l]}{[p]}\ ^{1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1), \qquad v_\nu = l_\nu - x \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

der mittlere Fehler gerechnet auf das Gewicht 1, bezw. der mittlere Fehler des Mittels x

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\,v^2]}{n-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3), \qquad \mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \sqrt{\frac{[p\,v^2]}{(n-1)\,[p]}} = \frac{i}{\sqrt{n-1}} \quad (4).$$

In der letzten Gleichung bedeutet

$$i = \sqrt{\frac{[p\,v^2]}{[p]}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

den Trägheitsradius eines Massensystems in bezug auf seinen Schwerpunkt, das aus den n die Einzelbeobachtungen versinnbildlichenden materiellen Punkten mit den Massen p_ν und den Abszissen l_ν besteht.

Es möge nun eine neue Beobachtung l_{n+1} vom Gewichte p_{n+1} hinzutreten, die von dem bisherigen Mittel x um den Betrag

$$v_{n+1} = l_{n+1} - x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

abweicht. Das neue Mittel

$$x' = \frac{[p\,l] + p_{n+1}\,l_{n+1}}{[p] + p_{n+1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

ist gegenüber dem alten um den Betrag

$$\xi = x' - x = \frac{p_{n+1}\,v_{n+1}}{[p] + p_{n+1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

verschoben. Die neuen Werte der vorteilhaftesten Fehler ergeben sich durch die Beziehung

$$v' = v - \xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9);$$

der vorteilhafteste Fehler der neu hinzugekommenen Lesung ist

$$v_{n+1}' = v_{n+1} - \xi = \frac{[p]\,v_{n+1}}{[p] + p_{n+1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

und die Summe der mit den Gewichten multiplizierten Fehlerquadrate (das Trägheitsmoment)

$$[p\,v'^2] + p_{n+1}\,v_{n+1}'^2 = [p\,v^2] + [p]\,\xi^2 + p_{n+1}\,v_{n+1}'^2$$

$$= \frac{([p] + p_{n+1})\,[p\,v^2] + [p]\,p_{n+1}\,v_{n+1}^2}{[p] + p_{n+1}} \quad (11).$$

---

[1]) Das Zeichen [ ] wird in dieser Arbeit ausschließlich als Summenzeichen verwendet und deutet die von $\nu = 1$ bis $\nu = n$ sich erstreckende Summierung an. Das z. B. in den Gleichungen (52) verwendete Zeichen [ ]' ist ebenfalls Summenzeichen, bedeutet aber eine sich von $\nu = 1$ bis $\nu = n + 1$ erstreckende Summierung.

Der für die Güte der durch das Hinzutreten der $n+1$ten Lesung vervollständigten Beobachtungsreihe charakteristische mittlere Fehler der Gewichtseinheit μ' ist durch die Gleichung gegeben

$$\mu'^2 = \frac{[p\,v'^2] + p_{n+1}\,v_{n+1}'^2}{n} = \frac{([p]+p_{n+1})\,[p\,v^2] + [p]\,p_{n+1}\,v_{n+1}^2}{n\,([p]+p_{n+1})} \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

der neue Trägheitsradius i' durch die Gleichung

$$i'^2 = \frac{[p\,v'^2] + p_{n+1}\,v_{n+1}'^2}{[p]+p_{n+1}} = \frac{([p]+p_{n+1})\,[p\,v^2] + [p]\,p_{n+1}\,v_{n+1}^2}{([p]+p_{n+1})^2} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

und der mittlere Fehler $\mu_{x'}$ des neuen arithmetischen Mittels x' durch die Gleichung

$$\mu_{x'}^2 = \frac{[p\,v'^2] + p_{n+1}\,v_{n+1}'^2}{n\,([p]+p_{n+1})} = \frac{([p]+p_{n+1})\,[p\,v^2] + [p]\,p_{n+1}\,v_{n+1}^2}{n\,([p]+p_{n+1})^2} \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Die Güte der Beobachtungsreihe ist besser geworden, gleich geblieben oder verschlechtert worden, je nachdem $\mu'^2 \lessgtr \mu^2$, was für die Abweichung v_{n+1} der neuen Lesung l_{n+1} vom bisherigen Mittel die Bedingung liefert

$$p_{n+1}\,v_{n+1}^2 \lessgtr \frac{[p]+p_{n+1}}{(n-1)\,[p]}\,[p\,v^2] = \frac{[p]+p_{n+1}}{[p]}\,\mu^2 = \frac{[p]+p_{n+1}}{n-1}\,i^2 = ([p]+p_{n+1})\,\mu_x^2 \quad . \quad (15).$$

Die Genauigkeit des Resultates der Messung hingegen ist eine bessere geworden, gleichgeblieben oder verschlechtert worden, je nachdem $\mu_{x'}^2 \lessgtr \mu_x^2$, was die Bedingung ergibt

$$p_{n+1}\,v_{n+1}^2 \lessgtr \frac{[p]^2 + (n+1)\,[p]\,p_{n+1} + n\,p_{n+1}^2}{(n-1)\,[p]^2}\,[p\,v^2] = \frac{[p]^2 + (n+1)\,[p]\,p_{n+1} + n\,p_{n+1}^2}{[p]^2}\,\mu^2$$

$$= \frac{[p]^2 + (n+1)\,[p]\,p_{n+1} + n\,p_{n+1}^2}{(n-1)\,[p]}\,i^2 = \frac{[p]^2 + (n+1)\,[p]\,p_{n+1} + n\,p_{n+1}^2}{[p]}\,\mu_x^2 \quad (16).$$

Es ist leicht zu erkennen, daß die zuletzt angegebene Schranke immer größer ist als die Schranke der Bedingung (15).

Für das Kleinerwerden, Gleichbleiben oder Größerwerden des Trägheitsradius ($i'^2 \lessgtr i^2$) ist die Bedingung charakteristisch

$$v_{n+1}^2 = \frac{[p]+p_{n+1}}{[p]^2}\,[p\,v^2] = \frac{[p]+p_{n+1}}{[p]}\,i^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Im Falle des Vorliegens von lauter gleichgewichtigen Beobachtungen ist $p_1 = p_2 = \ldots p_n = p_{n+1} = 1$ und $[p] = n$. Für den Vergleich der Güte der vervollständigten und der alten Beobachtungsreihe ist dann die Bedingung kennzeichnend

$$v_{n+1}^2 \lessgtr \frac{n+1}{n\,(n-1)}\,[v^2] = \frac{n+1}{n}\,\mu^2 = \frac{n+1}{n-1}\,i^2 = (n+1)\,\mu_x^2 \quad . \quad . \quad . \quad (15^*),$$

für den Vergleich der Genauigkeit des neuen und des alten Resultates

$$v_{n+1}^2 = \frac{2\,(n+1)}{n\,(n-1)}\,[v^2] = \frac{2\,(n+1)}{n}\,\mu^2 = \frac{2\,(n+1)}{n-1}\,i^2 = 2\,(n+1)\,\mu_x^2 \quad . \quad . \quad (16^*).$$

Der charakteristische Grenzwert der Abweichung der neu hinzugekommenen Beobachtung vom Mittel der bisherigen, der zu einer gleich genauen Bestimmung des Resultates führt, ist demnach im Falle von lauter gleichgewichtigen Beobachtungen $\sqrt{2}$ mal größer als jener Grenzwert der Abweichung, der die Güte der Beobachtungsreihe unverändert läßt.

Schließlich ist der Trägheitsradius kleiner geworden, gleich geblieben oder größer geworden, je nachdem ob

$$v_{n+1}^2 \lessgtr \frac{n+1}{n^2}\,[v^2] = \frac{n+1}{n}\,i^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17^*).$$

Als einfachstes Beispiel möge der Fall betrachtet werden, daß $n = 2$ gleichgewichtige Beobachtungen vorliegen. Ihre Abweichungen vom arithmetischen Mittel seien $v_1 = +1$ und $v_2 = -1$. Dann ist $[v^2] = 2$, $i = \pm 1$, $\mu \pm \sqrt{2}$, $\mu_x = \pm 1$. Soll bei Hinzutreten einer neuen Beobachtung von gleicher Genauigkeit, wie jede der beiden bisherigen der Trägheitsradius i ungeändert bleiben, so muß $v_3 = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$, soll der mittlere Fehler μ

einer Beobachtung sich nicht geändert haben, so muß $v_3 = \pm\sqrt{3}$ und soll schließlich die Genauigkeit des neuen Mittels dieselbe sein wie die des alten, so muß $v_3 = \pm\sqrt{6}$. Die Absolutwerte der drei charakteristischen Schranken verhalten sich somit wie $1 : \sqrt{2} : 2$.

2. Vermittelnde Beobachtungen. Ausgleichsgerade und Fehlerhyperbel. Das Problem der Genauigkeitssteigerung durch Hinzutreten einer neuen Beobachtung soll nun in einem Falle vermittelnder Beobachtungen studiert werden, der in der praktischen Physik und besonders im Eichwesen eine wichtige Rolle spielt. Eine beobachtbare Größe sei in weitem Bereiche als lineare Funktion eines praktisch genommen in fehlerfreier Weise feststellbaren oder a priori bekannten Argumentes vorausgesetzt. Man denke z.B. an den einfachen Fall der Länge eines Metallstabes, deren Wert in vielen Fällen und in gewissen Bereichen eine lineare Funktion der so gut wie fehlerfrei feststellbaren Temperatur bildet, ein Fall, der von mir an andrer Stelle behandelt wurde[1]). Der hier anzustellenden Betrachtung soll insofern ein Fall allgemeinerer Natur zugrunde liegen, als den einzelnen Beobachtungen zunächst verschiedene Gewichte zugeschrieben werden. Es mögen n Paare von Beobachtungen des fehlerfrei bestimmten Argumentes (x_ν) und des mit einem Fehler behafteten Funktionswertes y_ν vorliegen. $(\nu = 1, 2, \ldots n)$. Hierbei ist $n > 2$. Die x_ν sollen mindestens drei voneinander verschiedene Werte annehmen. Versteht man unter v_ν den »vorteilhaftesten Fehler«, unter p_ν das »Gewicht« der Beobachtung y_ν, unter A_0 und B_0 die »vorteilhaftesten Werte« der das lineare Abhängigkeitsgesetz kennzeichnenden Parameter A und B, so erhält man aus n »Fehlergleichungen« von der Form

$$v_\nu = A_0 + B_0 x_\nu - y_\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

nach der Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate die »Normalgleichungen«

$$[p]\,A_0 + [px]\,B_0 = [py], \qquad [px]\,A_0 + [px^2]\,B_0 = [pxy] \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

und das System der »Gewichtsgleichungen«

$$\left.\begin{aligned} [p]\,Q_{11} + [px]\,Q_{12} &= 1, & [p]\,Q_{21} + [px]\,Q_{22} &= 0 \\ [px]\,Q_{11} + [px^2]\,Q_{12} &= 0, & [px]\,Q_{21} + [px^2]\,Q_{22} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (20).$$

Um im weiteren die analytischen Ausdrücke kürzer und durchsichtiger zu gestalten, möge der Anfangspunkt der Zählung des Argumentes x und der Funktion y derart gewählt werden, daß

$$[px] = 0, \qquad [py] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21),$$

wodurch die Allgemeinheit der Betrachtung keine Einbuße erleidet. Argument und Funktion werden einfach durch die Abweichung von ihrem Mittelwerte gekennzeichnet. Versinnbildlicht man jedes Beobachtungspaar durch eine Punktmasse p_ν mit den Rechtwinkelkoordinaten x_ν, y_ν, so bewirkt die Festsetzung (21), daß der Schwerpunkt des aus diesen Punktmassen bestehenden Massensystems, des sogenannten »Beobachtungsbildes« Ursprung des Koordinatensystems wird. Die Normalgleichungen und die Gewichtsgleichungen besitzen sodann die einfachen Lösungen

$$A_0 = 0, \qquad B_0 = \frac{[pxy]}{[px^2]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22);$$

$$Q_{11} = \frac{1}{[p]}, \quad Q_{12} = Q_{21} = 0, \quad Q_{22} = \frac{1}{[px^2]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Die das vorteilhafteste Abhängigkeitsgesetz versinnbildlichende »Ausgleichsgerade«

$$y = A_0 + B_0 x = \frac{[pxy]}{[px^2]}\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

ist der zur y-Achse konjugierte Diameter der als »Standardellipse« bezeichneten Zentralellipse des Beobachtungsbildes

$$[p]\,\{[py^2]\,x^2 - 2\,[pxy]\,xy + [px^2]\,y^2\} = [px^2]\,[py^2] - [pxy]^2 \quad ^2) \quad (25).$$

---

[1]) A. Basch, die Gleichung eines Meterstabes, ihre Darstellung und deren Fehlerhyperbel. Oesterr. Zeitschr für Vermessungswesen 19, 1921, S. 38 bis 46.

[2]) Vergl. A. Basch, Ueber eine Anwendung der graphostatischen Methode auf den Ausgleich von Beobachtungsergebnissen. Mitteilungen des Technischen Versuchsamtes I, 1912, 2. H., S. 25 bis 30; 3. H., S. 32 bis 41. Oesterr. Zeitschr. für Vermessungswesen 11, 1913, S. 11 bis 18 und S. 42 bis 46. Daselbst auch weitere Literaturangaben über diesen auf Bravais (1846) rückführbaren Satz und seine Anwendungen. Vergl. a. P. Werkmeister, diese Zeitschr. 1, 1921, S. 491 bis 494.

Die zum Minimum gemachte Fehlerquadratsumme

$$[pv^2] = \frac{[px^2]\,[py^2] - [pxy]^2}{[px^2]} = [p]\,\bar{i}_y^{\,2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

ist das Binetsche (nicht das orthogonale!) Trägheitsmoment des Beobachtungsbildes in bezug auf die Ausgleichsgerade. (Die Abstände werden nicht in der zu der betreffenden Geraden senkrechten, sondern in der zu ihr vermittelst der Zentralellipse konjugierten Richtung gemessen.) $\bar{i}_y$ ist der Binetsche Trägheitsradius in bezug auf die Ausgleichsgerade oder die Größe des Halbdiameters in der y-Richtung.

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-2}} = \bar{i}_y \sqrt{\frac{[p]}{n-2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

und der mittlere Fehler in den Bestimmungen A_0 und B_0 der unbestimmten und unbestimmt bleibenden Parameter A und B

$$\mu_A = \mu \sqrt{Q_{11}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{\bar{i}_y}{\sqrt{n-2}}, \quad \mu_B = \mu \sqrt{Q_{22}} = \frac{\mu}{\sqrt{[px^2]}} = \frac{1}{\sqrt{n-2}} \cdot \frac{\bar{i}_y}{i_x} \quad . \quad (28).$$

Hierbei ist i_x der durch die Gleichung

$$i_x^2 = \frac{[px^2]}{[p]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

definierte Trägheitsradius des Beobachtungsbildes in bezug auf die y-Achse.

Der mittlere Fehler μ_η in der Bestimmung des Funktionswertes

$$\eta = Ax + B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30),$$

dessen vorteilhaftester Wert durch Gleichung (24) gegeben ist, wird nach dem Fehlerübertragungsgesetz durch die Gleichung bestimmt

$$\mu_\eta^2 = \mu_A^2 + \mu_B^2 x^2 = \mu^2 \left\{ \frac{1}{[p]} + \frac{x^2}{[px^2]} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31).$$

Für $x = 0$ ist die in der Bestimmung der Funktion erzielte Genauigkeit dieselbe, wie wenn alle Beobachtungen bei diesem Argumente stattgefunden hätten.

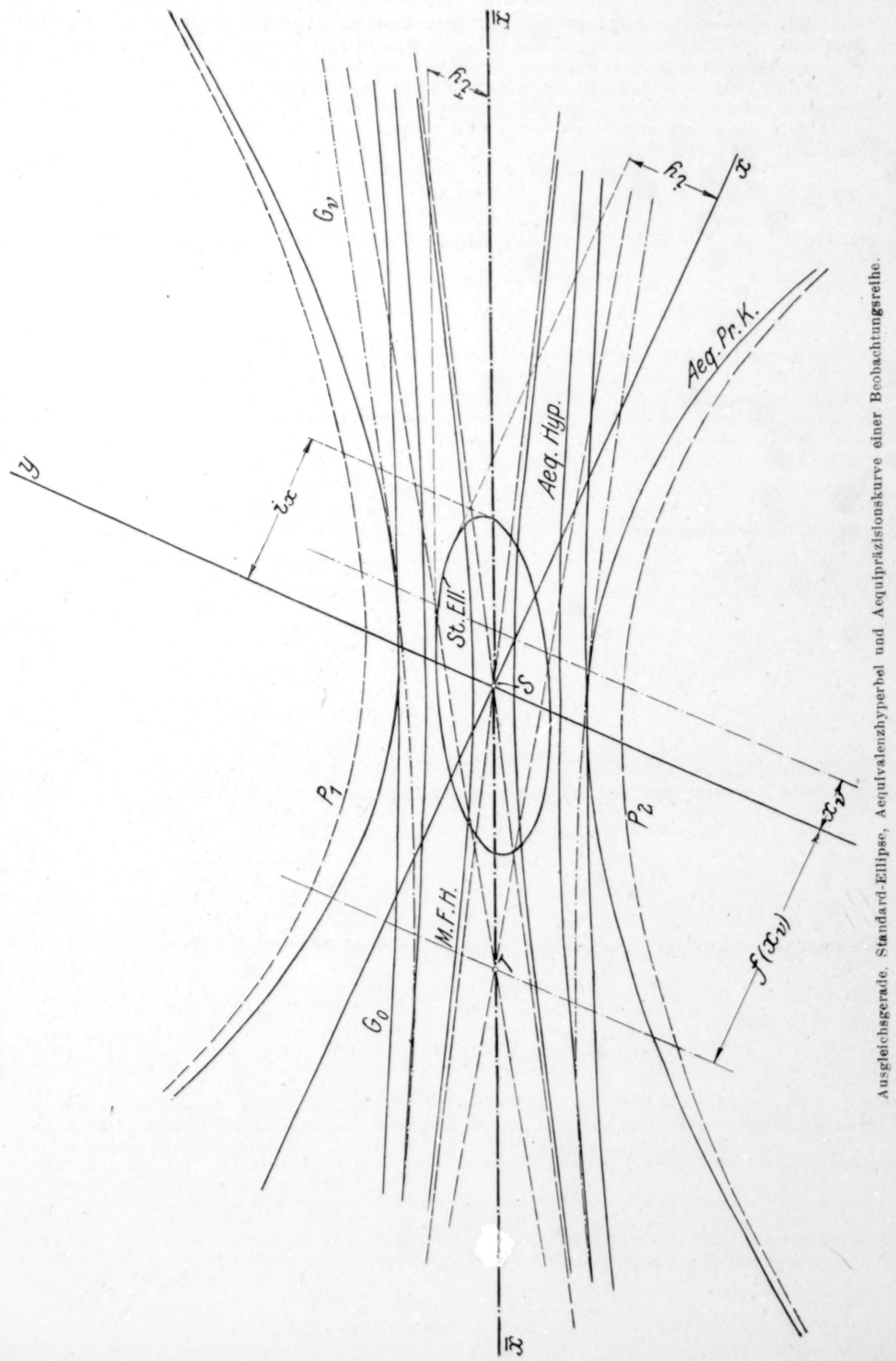
Führt man in (31) die Trägheitsradien i_x und $\bar{i}_y$ ein so erhält man nach einfacher Umformung

$$\frac{\mu_\eta^2}{\frac{1}{n-2}\bar{i}_y^{\,2}} - \frac{x^2}{i_x^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32),$$

die Gleichung der »mittleren Fehlerhyperbel«, die sinngemäß derart einzuzeichnen wäre, daß unter der Abszisse x, μ_η von der Ausgleichsgeraden nach oben und unten hin parallel zur y-Achse aufgetragen wird[1]).

In der Abbildung stellt *St.Ell.* die »Standardellipse« einer Beobachtungsreihe vor. S ist der Schwerpunkt des Beobachtungsbildes. Der zur y-Achse konjugierte Diameter $\bar{x}\,\bar{x}$ ist dann die »Ausgleichsgerade«. Unter der auch weiterhin festzuhaltenden Annahme, daß die Beobachtungsreihe aus $n = 10$ gleichgewichtigen Beobachtungen besteht, ist der Halbdiameter der y Richtung der mittleren Fehlerhyperbel (*M. F. H.*) $\frac{1}{\sqrt{8}}\bar{i}_y = 0{,}354\,\bar{i}_y$.

[1]) Die »mittlere Fehlerhyperbel« wird hier als »Punktort« bestimmt. Vergl. auch R. Schumann, »Bestimmung einer Geraden durch Ausgleichung der beobachteten Koordinaten ihrer Punkte nach der Methode der kleinsten Quadrate«. Sitzungsber. Akad. Wien, Bd. CXXV, Abt. IIa, 1916, S. 1429 bis 1466. Bezüglich ihrer Bedeutung als »Strahlort« vergl. A. Basch, »Ueber Hyperbeln beziehungsweise Hyperboloide als Präzisionscharakteristika empirisch bestimmter linearer Funktionen«. Sitzungsber. Akad. Wien, Bd. CXIII, Abt. IIa, 1914, S. 1659 bis 1678. In dieser Arbeit wurden die »Normalgleichungen [hier mit (19), dort mit (7) bezeichnet] in vollkommen zulässiger Weise durch $[p]$ dividiert. Unzulässigerweise wurden aber die mittleren Fehler der Parameter A und B aus dem Koeffizientensystem dieser durch $[p]$ dividierten »Normalgleichungen« und nicht aus den richtigen, hier mit (20) bezeichneten »Gewichtsgleichungen« bestimmt. Hierdurch hat der Diameter der y-Richtung der »mittleren Fehlerhyperbel« einen $\sqrt{[p]}$ mal zu großen Wert erhalten. Dieser Irrtum ist auch in meine früher zitierte Arbeit »Die Gleichung eines Meterstabes, ihre Darstellung und deren Fehlerhyperbeln«, Oesterr. Zeitschr. für Vermessungswesen 19, 1921, S. 38 bis 46 übergegangen.



Ausgleichsgerade, Standard-Ellipse, Aequivalenzhyperbel und Aequipräzisionskurve einer Beobachtungsreihe.

3. Genauigkeitssteigerung des errechneten gegenüber dem unmittelbar beobachteten Funktionswert. Es soll zunächst gezeigt werden, daß die Genauigkeit des berechneten Wertes der Funktion für irgend einen beliebigen Wert des Argumentes x_ν **auf jeden Fall, d. h. bei beliebiger Verteilung der Argumente, bei denen Beobachtungen angestellt wurden, und bei beliebiger Verteilung der Gewichte größer ist, als wenn einzig und allein die eine Beobachtung bei dem Argument x_ν erfolgt wäre, d. h.**

$$\underset{y_\nu}{\mu^2} > \underset{\mathfrak{y}_\nu}{\mu^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Es ist

$$\underset{y_\nu}{\mu^2} = \frac{\mu^2}{p_\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34), \qquad \underset{\mathfrak{y}_\nu}{\mu^2} = \mu^2 \left\{ \frac{1}{[p]} + \frac{x_\nu^2}{[p x^2]} \right\} \quad . \quad . \quad (35).$$

Somit müßte die Richtigkeit der Ungleichung

$$\frac{1}{p_\nu} > \frac{1}{[p]} + \frac{x_\nu^2}{[p x^2]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

erwiesen werden, was geschehen ist, wenn der Beweis für das Maximum des Ausdruckes auf der rechten Seite oder für das Minimum von $[p x^2]$ erbracht worden ist, wobei aber die Bedingung $[p x] = 0$ eingehalten werden muß. Es handelt sich demnach, der Lagrangeschen Methode der unbestimmten Koeffizienten entsprechend, zunächst darum, das absolute Minimum von

$$[p x^2] - 2\,\lambda\,[p x] = F(x_1, x_2, \ldots x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots x_n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

zu bestimmen. $x_1, x_2, \ldots x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots x_n$ sind hierbei als die variablen Argumente der Funktion F anzusehen, während x_ν als von vornherein gegeben betrachtet werden muß. Nunmehr ergeben sich

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_1} = p_1 x_1 - \lambda p_1 = 0\,, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_2} = p_2 x_2 - \lambda p_2 = 0\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_{\nu-1}} = p_{\nu-1} x_{\nu-1} - \lambda p_{\nu-1} = 0\,, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_{\nu+1}} = p_{\nu+1} x_{\nu+1} - \lambda p_{\nu+1} = 0\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_n} = p_n x_n - \lambda p_n = 0\,, \\
&p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_{\nu-1} x_{\nu-1} + p_{\nu+1} x_{\nu+1} + \ldots + p_n x_n = -\,p_\nu x_\nu
\end{aligned}\right\} \quad (38),$$

demnach im ganzen n lineare, nicht homogene Gleichungen zur Bestimmung der $n-1$ gesuchten Abszissen und des unbestimmten Multiplikators λ und die Lösung lautet

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{\nu-1} = x_{\nu+1} = \ldots x_n = \lambda = -\frac{p_\nu x_\nu}{[p] - p_\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39).$$

Da ferner

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_s^2} = p_s > 0\,, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_s\,\partial x_t} = 0\,, \qquad (s, t = 1, 2, \ldots \nu-1, \nu+1, \ldots n) \quad (40),$$

so liegt tatsächlich ein Minimum vor von dem Betrage

$$\text{Min}\,[p x^2] = \frac{[p]\,p_\nu}{[p] - p_\nu}\,x_\nu^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

und es ist weiter

$$\text{Max}\left\{\frac{1}{[p]} + \frac{x_\nu^2}{[p x^2]}\right\} = \frac{1}{[p]} + \frac{x_\nu^2}{\text{Min}\,[p x^2]} = \frac{1}{p_\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42).$$

In diesem äußersten Falle tritt somit in (36) an Stelle des Ungleichheitszeichens das Gleichheitszeichen und es ist $\underset{y_\nu}{\mu^2} = \underset{\mathfrak{y}_\nu}{\mu^2}$. In jedem anderen Falle, d. h. bei jeder anderen Argumentverteilung, ist tatsächlich $\underset{y_\nu}{\mu^2} > \underset{\mathfrak{y}_\nu}{\mu^2}$. Der extreme Fall scheint aber von vornherein ausgeschlossen, da in ihm nur zwei voneinander verschiedene Werte des Argumentes, nämlich x_ν und $\lambda = -\frac{p_\nu x_\nu}{[p] - p_\nu}$ vorliegen. Es wäre dies eben kein »über-

bestimmter« Fall, sondern der »bestimmte« Grenzfall, in dem eine Genauigkeitssteigerung nicht eintreten kann. Für den Fall von lauter gleichgewichtigen Beobachtungen ist der mittlere Fehler eines berechneten Wertes durch die Gleichung gegeben

$$\underset{y_\nu}{\mu^2} = \mu^2 \left\{ \frac{1}{n} + \frac{x_\nu^2}{[x^2]} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35^*).$$

Bei einer Reihe solcher in bezug auf das Argument x äquidistanter Beobachtungen mit dem Abstand a ist bei ungerader Anzahl n der Beobachtungen

$$[x^2] = 2\,a^2 \left\{ 1^2 + 2^2 + \ldots \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \right\} = \frac{1}{12}\,n\,(n^2-1)\,a^2 \quad . \quad . \quad (43\,\text{a})$$

und bei gerader Anzahl im Endergebnis übereinstimmend

$$\begin{aligned}
[x^2] &= \frac{1}{2}\left\{ 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots (n-1)^2 \right\} a^2 \\
&= \frac{1}{2}\left\{ \left\{ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots (n-1)^2 \right\} - 4 \left\{ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots \left(\tfrac{n}{2} - 1\right)^2 \right\} \right\} a^2 \\
&= \frac{1}{12}\,n\,(n^2-1)\,a^2 \quad (43\,\text{b}).
\end{aligned}$$

Der Abstand des νten Punktes, von der Mitte an gerechnet, ist bei ungerader bezw. gerader Zahl der Beobachtungen

$$x_\nu = \nu a \quad . \quad . \quad . \quad (44\,\text{a}), \qquad x_\nu = \pm\,\frac{2\,|\nu| - 1}{2}\,a \quad . \quad . \quad (44\,\text{b});$$

somit gilt für ungerade bezw. gerade n

$$\underset{\mathfrak{y}_\nu}{\mu^2} = \frac{\mu^2}{n}\left\{ 1 + \frac{12\,\nu^2}{n^2-1} \right\} \quad . \quad (45\,\text{a}), \qquad \underset{\mathfrak{y}_\nu}{\mu^2} = \frac{\mu^2}{n}\left\{ 1 + \frac{3\,(2\,|\nu| - 1)^2}{n^2-1} \right\} \quad (45\,\text{b}).$$

Naturgemäß ist die Genauigkeitssteigerung für die Randpunkte am geringsten. Für diese ist bei ungerader Beobachtungszahl $|\nu| = r = \frac{n-1}{2}$ und bei gerader Beobachtungszahl $|\nu| = r = \frac{n}{2}$. Es ergibt sich somit übereinstimmend für ungerade und für gerade Beobachtungszahlen für den mittleren Fehler des berechneten Funktionswertes für die Randpunkte

$$\underset{\mathfrak{y}_r}{\mu^2} = \frac{2\,(2\,n-1)}{n\,(n+1)}\,\mu^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46).$$

Die folgende Zahlentafel gibt das Verhältnis $\underset{\mathfrak{y}_r}{\mu} : \mu$ für verschiedene Beobachtungszahlen.

n	$\underset{\mathfrak{y}_r}{\mu} : \mu$	n	$\underset{\mathfrak{y}_r}{\mu} : \mu$
1	1,0000	7	0,6814
2	1,0000	8	0,6455
3	0,9129	9	0,6146
4	0,8367	10	0,5878
5	0,7746	11	0,5641
6	0,7237	12	0,5430

Daß in den nicht »überbestimmten« Fällen $n = 1$ und $n = 2$ keine Genauigkeitssteigerung eintritt, daher $\underset{\mathfrak{y}_r}{\mu} = \mu$ ist, war ja von vornherein selbstverständlich. Für sehr große Beobachtungszahlen wird

$$\underset{\mathfrak{y}_r}{\mu} = \frac{2}{\sqrt{n}}\,\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

also doppelt so groß, wie wenn alle Beobachtungen bei dem Argumente des Randpunktes stattgefunden hätten.

4. Verbesserung der gesamten Beobachtungsreihe. Aequivalenzhyperbel. Für den mittleren Fehler μ der Gewichtseinheit besteht, wie aus der Verbindung von (26) und (27) hervorgeht, die Gleichung

$$\mu^2 = \frac{[p\,v^2]}{n-2} = \frac{[p\,x^2]\,[p\,y^2] - [p\,x\,y]^2}{(n-2)\,[p\,x^2]} = \frac{[p]}{n-2}\,\bar{i}_y^{\,2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48).$$

Tritt nun eine neue Beobachtung vom Gewichte p_{n+1} hinzu mit den Koordinaten x_{n+1}, y_{n+1} in bezug auf den alten Schwerpunkt S des Beobachtungsbildes, so verschiebt sich der Schwerpunkt nach dem Punkt S' mit den Koordinaten

$$\xi = \frac{p_{n+1}}{[p] + p_{n+1}}\,x_{n+1}\,, \qquad \eta = \frac{p_{n+1}}{[p] + p_{n+1}}\,y_{n+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49).$$

Die Koordinaten in bezug auf ein zu dem alten System $x\,y$ paralleles System $x'\,y'$ durch den neuen Schwerpunkt S' sind

$$x' = x - \xi\,, \qquad y' = y - \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50),$$

somit

$$x_{n+1}' = \frac{[p]}{[p] + p_{n+1}}\,x_{n+1}\,, \qquad y_{n+1}' = \frac{[p]}{[p] + p_{n+1}}\,y_{n+1} \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

und das neue Beobachtungsbild besitzt in bezug auf das neue Achsensystem die Massenmomente zweiten Grades

$$\left.\begin{aligned}
[p\,x'^2]' &= [p\,x^2] + [p]\,\xi^2 + p_{n+1}\,x_{n+1}'^2 &&= \frac{([p] + p_{n+1})\,[p\,x^2] + [p]\,p_{n+1}\,x_{n+1}^2}{[p] + p_{n+1}} \\
[p\,y'^2]' &= [p\,y^2] + [p]\,\eta^2 + p_{n+1}\,y_{n+1}'^2 &&= \frac{([p] + p_{n+1})\,[p\,y^2] + [p]\,p_{n+1}\,y_{n+1}^2}{[p] + p_{n+1}} \\
[p\,x'\,y']' &= [p\,x\,y] + [p]\,\xi\,\eta + p_{n+1}\,x_{n+1}\,y_{n+1} = &&\frac{([p] + p_{n+1})\,[p\,x\,y] + [p]\,p_{n+1}\,x_{n+1}\,y_{n+1}}{[p] + p_{n+1}}
\end{aligned}\right\} \quad (52).$$

Der neue mittlere Fehler μ' der Gewichtseinheit wird bestimmt durch

$$\begin{aligned}
\mu'^2 &= \frac{[p\,x'^2]'\,[p\,y'^2]' - [p\,x'\,y']'^2}{(n-1)\,[p\,x'^2]'} \\
&= \frac{([p] + p_{n+1})\,([p\,x^2]\,[p\,y^2] - [p\,x\,y]^2) + [p]\,p_{n+1}\,([p\,y^2]\,x_{n+1}^2 + [p\,x^2]\,y_{n+1}^2 - 2\,[p\,x\,y]\,x_{n+1}\,y_{n+1})}{(n-1)\,\{([p] + p_{n+1})\,[p\,x^2] + [p]\,p_{n+1}\,x_{n+1}^2} \\
&= \frac{[p]}{n-1} \cdot \frac{([p] + p_{n+1})\,\bar{i}_y^{\,2} + p_{n+1}\,([p\,y^2]\,x_{n+1}^2 + [p\,x^2]\,y_{n+1}^2 - 2\,[p\,x\,y]\,x_{n+1}\,y_{n+1})}{([p] + p_{n+1})\,[p\,x^2] + [p]\,p_{n+1}\,x_{n+1}^2} \quad . \quad . \quad (53).
\end{aligned}$$

Setzt man diesen Ausdruck für μ'^2 dem letzten Ausdruck in (48) für μ^2 gleich und sieht x_{n+1}, y_{n+1} als laufende Koordinaten an, so erhält man die Gleichung des Ortes aller Punkte, die solche Beobachtungen vom Gewichte p_{n+1} veranschaulichen, die durch ihr Hinzutreten zu den bisherigen Beobachtungen an der Güte der Beobachtungsreihe nichts ändern. Es erweist sich hierbei als vorteilhaft zu dem durch die Gleichungen

$$x = x_{n+1}\,, \quad \bar{y} = y_{n+1} - B_0\,x_{n+1} = y_{n+1} - \frac{[p\,x\,y]}{[p\,x^2]}\,x_{n+1} \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

definierten schiefwinkligen Koordinatensystem überzugehen, das heißt die Lage eines jeden Punktes wird durch seine bisherige Abszisse und durch seinen in der Richtung der y-Achse gemessenen Abstand $\bar{y}$ von der »Ausgleichsgeraden« $\bar{x}\bar{x}$ gekennzeichnet. Dann ist

$$\mu'^2 = \frac{[p]}{n-1} \cdot \frac{([p] + p_{n+1})\,i_x^{\,2}\,\bar{i}_y^{\,2} + p_{n+1}\,(\bar{i}_y^{\,2}\,x^2 + i_x^{\,2}\,\bar{y}^2)}{([p] + p_{n+1})\,i_x^{\,2} + p_{n+1}\,x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

und das Gleichsetzen mit $\mu^2 = \dfrac{[p]}{n-2}\,\bar{i}_y^{\,2}$ ergibt als Gleichung der Ortskurve

$$\frac{\bar{y}^2}{\dfrac{[p] + p_{n+1}}{(n-2)\,p_{n+1}}\,\bar{i}_y^{\,2}} - \frac{x^2}{\dfrac{[p] + p_{n+1}}{p_{n+1}}\,i_x^{\,2}} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56),$$

die demnach eine Hyperbel ist, die als »Aequivalenzhyperbel« bezeichnet werden möge. Vergleicht man die Gleichungen (56) und (32), so ersieht man: »die Aequivalenzhyperbel geht aus der mittleren Fehlerhyperbel durch zentrische

Streckung (Aehnlichkeits-Transformation) aus dem Mittelpunkte im Verhältnis $\sqrt{([p]+p_{n+1}):p_{n+1}}$ hervor«.

In dem besonderen Fall von lauter gleichgewichtigen Beobachtungen lautet die Gleichung der »Aequivalenzhyperbel«

$$\frac{\bar{y}^2}{\frac{n+1}{n-2}\,\bar{i}_y^{\,2}} - \frac{x^2}{(n+1)\,i_x^{\,2}} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56^*).$$

Die Aequivalenzhyperbel ergibt sich in diesem besonderen Falle aus der mittleren Fehlerhyperbel durch zentrische Streckung im Verhältnis $\sqrt{n+1}$.

In der Abbildung ist *Aeq. Hyp.* die Aequivalenzhyperbel. Sie ist die $\sqrt{11}$fache Vergrößerung der mittleren Fehlerhyperbel und mit ihr ähnlich liegend, hat daher mit ihr gemeinsame, in der Figur strichlierte Asymptoten. Ihr Halbdiameter in der y-Richtung ist $\sqrt{\frac{11}{8}}\,\bar{i}_y = 1{,}173\,\bar{i}_y$.

Liegt der eine neue Beobachtung vom Gewichte p_{n+1} veranschaulichende Punkt derart, daß von ihm aus reelle Tangenten an die Aequivalenzhyperbel gezogen werden können, so ist die Güte der Beobachtungsreihe verbessert, im entgegengesetzten Falle ist sie verschlechtert worden.

Der Vollständigkeit halber sei noch Folgendes erwähnt: Hätte man nach dem Ort von Massenpunkten p_{n+1} gefragt, die durch ihr Hinzutreten zu dem Massensystem der n Punkte p_1 bis p_n den Diameter der Zentralellipse des Systems in der y-Richtung der Größe nach nicht ändern, so hätte man die Gleichung erhalten

$$\frac{\bar{y}^2}{\frac{[p]+p_{n+1}}{[p]}\,\bar{i}_y^{\,2}} - \frac{x^2}{\frac{[p]+p_{n+1}}{p_{n+1}}\,i_x^{\,2}} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (57),$$

also die Gleichung einer Hyperbel, die durch lineare Dilatation im Verhältnis $\sqrt{(n-2)\,p_{n+1}:[p]}$ (bei gleichgewichtigen Beobachtungen $\sqrt{(n-2):n}$) in der Richtung der y-Achse bei ungeänderten Strecken in der Richtung der Ausgleichsgeraden aus der Aequivalenzhyperbel hervorgeht.

5. Genauigkeitssteigerung des errechneten Funktionswertes. Grenzkurven und Aequipräzisionskurve. Der mittlere Fehler $\underset{\eta_v}{\mu}$ des vorteilhaftesten Wertes η_v, der durch Ausgleichung aus n Beobachtungen gerechnet wurde, ist zufolge (35) und (48) unter Berücksichtigung von (29) durch die Gleichung gegeben

$$\underset{\eta_v}{\mu^2} = \mu^2 \left\{ \frac{1}{[p]} + \frac{x_v^{\,2}}{[px^2]} \right\} = \frac{(i_x^{\,2} + x_v^{\,2})\,\bar{i}_y^{\,2}}{(n-2)\,i_x^{\,2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (58).$$

Durch Hinzutreten der neuen Beobachtung p_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1} entsteht für das Argument x_v der neue vorteilhafteste Wert η_v' mit dem mittleren Fehler $\underset{\eta_v'}{\mu}$, der sich aus der Gleichung ergibt

$$\underset{\eta_v'}{\mu^2} = \mu'^2 \left\{ \frac{1}{[p]+p_{n+1}} + \frac{x_v^{\,2}}{[px'^2]'} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (59).$$

Hierbei ist

$$x_v' = x_v - \xi = x_v - \frac{p_{n+1}}{[p]+p_{n+1}}\,x_{n+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (60).$$

$[px'^2]'$ geht aus (52), μ'^2 aus (55) hervor. Hieraus ergibt sich

$$\underset{\eta_v'}{\mu^2} = \frac{\{([p]+p_{n+1})\,i_x^{\,2}\bar{i}_y^{\,2} + p_{n+1}\,(\bar{i}_y^{\,2}x^2 + i_x^{\,2}\bar{y}^2)\}\,\{[p]i_x^{\,2} + ([p]+p_{n+1})\,x_v'^{\,2} - 2\,p_{n+1}\,x_v\,x + p_{n+1}\,x^2\}}{(n-1)\,\{([p]+p_{n+1})\,i_x^{\,2} + p_{n+1}\,x^2\}^2} \quad (61)$$

(die auf das schiefwinklige System $\bar{x}y$ bezogenen Koordinaten des neu hinzugekommenen Punktes $(x, \bar{y})$ sind hier schon als »laufende« betrachtet). Setzt man die Ausdrücke für $\underset{\eta_v}{\mu^2}$ und $\underset{\eta_v'}{\mu^2}$ in (58) und (61) einander gleich, so erhält man die Gleichung des Ortes aller Punkte, die solche Beobachtungen vom Gewichte p_{n+1} veranschaulichen, die durch

ihr Hinzutreten zu den bisherigen Beobachtungen an der Genauigkeit des zu dem Argumente x_ν gehörigen Funktionswertes y_ν nichts ändern. Diese Gleichung lautet

$$p_{n+1}{}^2 \bar{i}_y{}^2 (i_x{}^2 + (n-1)\, x_\nu{}^2)\, x^4 - (n-2)\, p_{n+1}{}^2 i_x{}^4 x^2 \bar{y}^2 + 2\,(n-2)\, p_{n+1}{}^2 i_x{}^2 \bar{i}_y{}^2 x_\nu\, x^3$$
$$+ 2\,(n-2)\, p_{n+1}{}^2 i_x{}^4 x_\nu\, x\, \bar{y}^2 + p_{n+1}\, i_x{}^2 \bar{i}_y{}^2 \{(2\,[p] + n\, p_{n+1})\, i_x{}^2 + n\,([p] + p_{n+1})\, x_\nu{}^2\}\, x^2$$
$$- (n-2)\, p_{n+1}\, i_x{}^4 \{[p]\, i_x{}^2 + ([p] + p_{n+1})\, x_\nu{}^2\}\, \bar{y}^2 + 2\,(n-2)\, p_{n+1}\,([p] + p_{n+1})\, i_x{}^4 \bar{i}_y{}^2 x_\nu\, x$$
$$+ ([p] + p_{n+1})\, i_x{}^4 \bar{i}_y{}^2 \{([p] + (n-1)\, p_{n+1})\, i_x{}^2 + ([p] + p_{n+1})\, x_\nu{}^2\} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (62).$$

Die durch sie gekennzeichnete »Grenzkurve« (G_ν in der Abbildung) ist eine nicht zerfallende Kurve vierter Ordnung. Sie besitzt neben zwei imaginären, zur Ordinatenachse parallelen Asymptoten, die durch die Gleichung

$$p_{n+1}\, x^2 - 2\, p_{n+1}\, x_\nu\, x + [p]\, i_x{}^2 + ([p] + p_{n+1})\, x_\nu{}^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

gegeben sind, zwei reelle, zur Ordinatenachse geneigte Asymptoten, deren Richtungskoeffizienten α bezogen auf das schiefwinklige Koordinatensystem aus der Gleichung hervorgehen

$$\varphi_4(\alpha) = p_{n+1}{}^2 \{\bar{i}_y{}^2 (i_x{}^2 + (n-1)\, x_\nu{}^2) - (n-2)\, i_x{}^4 \alpha^2\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

als

$$\alpha = \pm \frac{\bar{i}_y}{i_x{}^2} \sqrt{\frac{i_x{}^4 + (n-1)\, x_\nu{}^2}{n-2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65);$$

ihr Schnitt auf der Ordinatenachse ist

$$\beta = -\frac{\varphi_3(\alpha)}{\varphi_4{}'(\alpha)} = \pm \frac{(n-1)\, \bar{i}_y\, (i_x{}^2 + x_\nu{}^2)}{i_x{}^2 \sqrt{(n-2)\, \{i_x{}^2 + (n-1)\, x_\nu{}^2\}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66).$$

Die Gleichung der reellen Asymptoten lautet demnach:

$$\bar{y} = \alpha\, x + \beta = \pm \frac{\bar{i}_y}{i_x{}^2} \sqrt{\frac{i_x{}^2 + (n-1)\, x_\nu{}^2}{n-2}} \left\{ x + \frac{(n-1)\,(i_x{}^2 + x_\nu{}^2)}{i_x{}^2 + (n-1)\, x_\nu{}^2}\, x_\nu \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (67).$$

Diese Asymptoten schneiden einander in einem Punkte (T) der Ausgleichsgeraden; die Abszisse des Schnittpunktes $f(x_\nu)$ hat immer das entgegengesetzte Vorzeichen wie x_ν. Die »Grenzkurve« besteht aus zwei Aesten. Die Punkte gleicher Abszisse haben, da $\bar{y}$ in der Kurvengleichung (62) nur in zweiter Potenz vorkommt, von der Ausgleichsgeraden gleichen Abstand. Beobachtungen vom Gewichte p_{n+1}, deren Bildpunkte zwischen den beiden Aesten der zu einem bestimmten Werte von x_ν gehörigen Grenzkurve G_ν liegen, vergrößern die Genauigkeit des zu diesem Argumentwerte x_ν gehörigen Funktionswertes y_ν; Beobachtungen, deren Bildpunkte außerhalb der beiden Aeste liegen, verkleinern diese Genauigkeit.

Zwei bestimmte Fälle sind von besonderem Interesse:

1. $x_\nu = 0$, d. h.: Wie muß die neue Beobachtung beschaffen sein, damit die Genauigkeit des zum Mittelwert der Argumente gehörigen Funktionswertes vergrößert wird, gleich bleibt oder verkleinert wird? Die Gleichung der Grenzkurve G_0 lautet in diesem Falle

$$p_{n+1}{}^2 \bar{i}_y{}^2 x^4 - (n-2)\, p_{n+1}{}^2 i_x{}^2 x^2 \bar{y}^2 + p_{n+1}\,(2\,[p] + n\, p_{n+1})\, i_x{}^2 \bar{i}_y{}^2 x^2$$
$$- (n-2)\,[p]\, p_{n+1}\, i_x{}^4 \bar{y}^2 + ([p] + p_{n+1})\,([p] + (n-1)\, p_{n+1})\, i_x{}^4 \bar{i}_y{}^2 = 0 \quad (68).$$

Diese Grenzkurve, die als »zentrale Grenzkurve« bezeichnet werden möge, besitzt neben zwei imaginären zur y-Achse parallelen und von ihr gleich weit entfernten Asymptoten

$$p_{n+1}\, x^2 + [p]\, i_x{}^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69).$$

zwei reelle Asymptoten

$$\bar{Y} = \pm \frac{1}{\sqrt{n-2}} \frac{\bar{i}_y}{i_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70),$$

die, wie leicht zu ersehen ist, mit den Asymptoten der mittleren Fehlerhyperbel und der Aequivalenzhyperbel identisch sind. Diese beiden Hyperbeln sind daher auch asymptotische Kurven der zentralen Grenzkurve. Die Schnitte der mittleren Fehlerhyperbel, der Aequivalenzhyperbel und der zentralen Grenzkurve auf der y-Achse sind der Reihe nach

$$\pm \frac{\bar{i}_y}{\sqrt{n-2}},\ \pm \sqrt{\frac{[p] + p_{n+1}}{p_{n+1}}}\, \frac{\bar{i}_y}{\sqrt{n-2}},\ \pm \sqrt{\frac{([p] + (n-1)\, p_{n+1})\,([p] + p_{n+1})}{[p]\, p_{n+1}}}\, \frac{\bar{i}_y}{\sqrt{n-2}} \quad . \quad (71).$$

Es ist somit jeder später genannte dem Absolutbetrag nach größer als der früher angeführte. Die zentrale Grenzkurve selbst hat ein vollends hyperbelartiges Aussehen.

2. $x_\nu = x$, d. h.: Wie müssen Beobachtungen beschaffen sein, damit die Genauigkeit des zu dem beobachteten Argumentwerte gehörigen Funktionswertes vergrößert wird, gleich bleibt oder verkleinert wird? Die Gleichung des Ortes der Bildpunkte der Beobachtungen, die gleiche Genauigkeit ergeben, der als »Aequipräzisionskurve« bezeichnet werden möge, erscheint zunächst als von sechster Ordnung und lautet

$$(n-1)\,p_{n+1}^{\,2}\,\bar{i}_y^{\,2}\,x^6 + p_{n+1}\{n[p] + 3(n-1)p_{n+1}\}\,i_x^{\,2}\,\bar{i}_y^{\,2}\,x^4 - (n-2)[p]\,p_{n+1}\,i_x^{\,4}\,x^2\,\bar{y}^2 + \{[p]^2 + 2n[p]p_{n+1} + 3(n-1)p_{n+1}^{\,2}\}\,i_x^{\,4}\,\bar{i}_y^{\,2}\,x^2 - (n-2)[p]\,p_{n+1}\,i_x^{\,6}\,\bar{y}^2 + ([p] + p_{n+1})\{[p] + (n-1)p_{n+1}\}\,i_x^{\,6}\,\bar{i}_y^{\,2} = 0 \quad (72).$$

Sie zerfällt aber in die Gleichung des imaginären Parallelgeradenpaares

$$x^2 + i_x^{\,2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

und in die Gleichung

$$\bar{y}^2 = \frac{\bar{i}_y^{\,2}}{(n-2)[p]\,p_{n+1}\,i_x^{\,4}}\Big\{(n-1)p_{n+1}^{\,2}\,x^4 + p_{n+1}(n[p] + 2(n-1)p_{n+1})\,i_x^{\,2}\,x^2 + ([p] + p_{n+1})([p] + (n-1)p_{n+1})\,i_x^{\,4}\Big\} \quad (74).$$

Die Aequipräzisionskurve (*Aeq. Pr. K.* in der Abbildung) ist somit eine zweiästige Kurve vierter Ordnung. Zu jedem Wert von x gehören zwei reelle, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte, dem Absolutbetrag nach gleiche Werte von $\bar{y}$. Ebenso gehören zu jedem dem Absolutbetrage nach die Ordinaten der Schnittpunkte mit der y-Achse (die mit jenen der »zentralen Grenzkurve« identisch sind) überschreitenden Werte von $\bar{y}$ zwei reelle, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte, dem Absolutbetrage nach gleich große Werte von x.

Entwickelt man $\bar{y}$ für große Werte von x und vernachlässigt hierbei Glieder, die $\frac{i_x^{\,2}}{x^2}$ als Faktor enthalten, so ist zu erkennen, daß die »Aequipräzisionskurve« die beiden Parabeln

$$\bar{Y} = \pm\sqrt{\frac{(n-1)p_{n+1}}{(n-2)[p]}}\,\bar{i}_y\left\{\frac{n[p] + 2(n-1)p_{n+1}}{2(n-1)p_{n+1}} + \frac{x^2}{i_x^{\,2}}\right\} = \pm\sqrt{\frac{(n-1)p_{n+1}}{[p]}}\,\underset{A}{\mu}\left\{\frac{n[p] + 2(n-1)p_{n+1}}{2(n-1)p_{n+1}} + \frac{x^2}{i_x^{\,2}}\right\} \quad (75)$$

(P_1 und P_2 in der Abbildung) als asymptotische Kurven besitzt. Beobachtungen vom Gewichte p_{n+1}, deren Bildpunkte zwischen den beiden Aesten der Aequipräzisionskurve liegen, vergrößern die Genauigkeit des zu ihrer Argumentenabszisse berechneten Funktionswertes, Beobachtungen, deren Bildpunkte außerhalb liegen, verkleinern sie.

Für den besonderen Fall, daß lauter gleichgewichtige Beobachtungen vorliegen, ist der mittlere Fehler des zum Argumente x_ν nach Hinzutreten einer $n+1$ten Beobachtung x, $\bar{y}$ vom Gewichte Eins gehörigen Funktionswertes durch die Gleichung gegeben

$$\underset{\mathfrak{y}_\nu}{\mu}^2 = \frac{\{(n+1)\,i_x^{\,2}\,\bar{i}_y^{\,2} + \bar{i}_y^{\,2}\,x^2 + i_x^{\,2}\,\bar{y}^2\}\;\{n\,i_x^{\,2} + (n+1)\,x_\nu^{\,2} - 2\,x_\nu\,x + x^2\}}{(n-1)\,\{([p] + p_{n+1})\,i_x^{\,2} + x^2\}} \quad . \quad . \quad (61^*),$$

während für den mittleren Fehler des aus den n ersten Beobachtungen errechneten Funktionswertes die Gleichung (58) ungeändert bleibt. Die Gleichung der aus der Bedingung $\underset{\mathfrak{y}_\nu}{\mu}^2 = \underset{\mathfrak{y}_\nu'}{\mu}^2$ hervorgehenden allgemeinen Grenzkurve G_ν lautet

$$(i_x^{\,2} + (n-1)\,x_\nu^{\,2})\,\bar{i}_y^{\,2}\,x^4 - (n-2)\,i_x^{\,4}\,x^2\,\bar{y}^2 + 2(n-2)\,i_x^{\,2}\,\bar{i}_y^{\,2}\,x_\nu\,x^3 + 2(n-2)\,i_x^{\,4}\,x_\nu\,x\,\bar{y}^2 + n\{3\,i_x^{\,2} + (n+1)\,x^2\}\,i_x^{\,2}\,\bar{i}_y^{\,2}\,x^2 - (n-2)(n\,i_x^{\,2} + (n+1)\,x_\nu^{\,2})\,i_x^{\,4}\,\bar{y}^2 + 2(n+1)(n-2)\,i_x^{\,4}\,\bar{i}_y^{\,2}\,x_\nu\,x + (n+1)\{(2n-1)\,i_x^{\,2} + (n+1)\,x_\nu^{\,2}\}\,i_x^{\,4}\,\bar{i}_y^{\,2} = 0 \quad (62^*).$$

In der Abbildung ist die Grenzkurve G_v für $x_v = +\frac{1}{3} i_x$ eingezeichnet. Die Abszisse des Schnittpunktes T der Asymptoten $f(x_v) = -\frac{(n-1)(i_x^2 + x_v^2)}{i_x^2 + (n-1) x_v^2} x_v$ ist (vergl. Gl. (67)), da $n = 10$, $f(x_v) = -\frac{5}{3} i_x$.

Die zentrale Grenzkurve G_0 hat die Gleichung

$$\bar{i}_y^2 x^4 - (n-2) i_x^2 x^2 \bar{y}^2 + 3n i_x^2 \bar{i}_y^2 x^2 - n(n-2) i_x^4 \bar{y}^2 + (n+1)(2n-1) i_x^4 \bar{i}_y^2 = 0 \quad (68^*).$$

Die Abschnitte der mittleren Fehlerhyperbel, der Aequivalenzhyperbel und der zentralen Grenzkurve auf der Ordinatenachse (der letztgenannte stimmt überein mit jenem der Aequipräzisionskurve) sind der Reihe nach

$$\pm \frac{\bar{i}_y}{\sqrt{n-2}}, \qquad \pm \sqrt{\frac{n+1}{n-2}}\, \bar{i}_y, \qquad \pm \sqrt{\frac{(n+1)(2n-1)}{n(n-2)}}\, \bar{i}_y \quad . \quad . \quad (71^*).$$

Das ist im Fall $n = 10$ wie in der Abbildung

$$\pm 0{,}354\, \bar{i}_y, \qquad \pm 1{,}173\, \bar{i}_y, \qquad \pm 1{,}616\, \bar{i}_y.$$

Die Gleichung der »Aequipräzisionskurve« lautet

$$\bar{y}^2 = \frac{\bar{i}_y^2}{n(n-2) i_x^4} \left\{ (n-1) x^4 + (n^2 + 2n - 2) i_x^2 x^2 + (n+1)(2n-1) i_x^4 \right\} (74^*)$$

und die der beiden Parabeln, die ihre asymptotischen Kurven bilden,

$$\bar{Y} = \pm \sqrt{\frac{n-1}{n(n-2)}}\, \bar{i}_y \left\{ \frac{n^2 + 2n - 2}{2(n-1)} + \frac{x^2}{i_x^2} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75^*).$$

Die Abschnitte dieser beiden Parabeln auf der Ordinatenachse sind für $n = 10$ (Abbildung) $\pm 2{,}199\, \bar{i}_y$.

Auch bei »bedingten Beobachtungen« können analoge Untersuchungen angestellt werden, wie es hier für »direkte« und in dem wichtigsten Fall »vermittelnder« Beobachtungen geschehen ist. Doch gelangt man da schon bei den einfachsten Problemen nicht mehr zu leicht durchblickbaren Ergebnissen. 174

Wien, im April 1922.

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Neuere Integraphen.

Von **A. GALLE** in Potsdam.

Die Instrumente, welche Integrationen ausführen, zerfallen in zwei Klassen. Beiden gemeinsam ist, daß die zu integrierende Funktion aufgezeichnet vorliegt. Bei den Kurvenmessern, Planimetern, Analysatoren wird das Ergebnis an einer Registriervorrichtung, etwa an einer Skala oder an der Zeigerstellung einer Zählscheibe abgelesen. Sie dienen dazu, bestimmte Integrale zwischen gegebenen Grenzen zu ermitteln. Sollen dagegen unbestimmte Integrationen ausgeführt werden, so muß auch das Resultat graphisch dargestellt werden. Die Instrumente, die dazu dienen, nennt man Integraphen.

Das Prinzip eines Integraphen hat bereits Coriolis 1836 angegeben, Zmurko (1861), J. Thomson und Cayley (1876) haben sich damit beschäftigt, 1878 haben dann Abdank-Abakanowicz und ziemlich gleichzeitig Boys Integraphen konstruiert. Das Instrument von Abdank-Abakanowicz ist aber erst in der Gestalt, die ihm Coradi in Zürich gegeben hat, in allgemeineren Gebrauch gekommen.

Ganz neue Gesichtspunkte hat Professor Ernst Pascal in Neapel für die Konstruktion von Integraphen aufgestellt. Hierbei handelte es sich noch besonders um die Integration von Differentialgleichungen[1]). Es gelang ihm nicht nur, verschiedene Instru-

[1]) Außer Lord Kelvin (1876) haben Torris (1895), Petrowitsch (1897) und L. Jacob (1911) Apparate für diesen Zweck konstruiert.

mente zu erfinden, die besondern Problemen angepaßt waren, sondern auch einzelnen Instrumenten Einrichtungen zu geben, die sie zur Lösung ganz verschieden gearteter Aufgaben befähigen. In seinem Buche »I miei Integrafi«[1]) sind sie in systematischer Ordnung beschrieben.

Im folgenden soll die von Pascal getroffene Einteilung in zwei Gruppen beibehalten und demgemäß zwischen cartesischen und Polarintegraphen unterschieden werden, wobei der Apparat von Abdank-Abakanowicz sich den ersteren eingliedert. Im übrigen soll für einen zu vielseitiger Anwendung geeigneten Apparat jeder Gruppe das Prinzip und die Wirkungsweise etwas ausführlicher auseinander gesetzt werden. Für die andern möge ein kurzer Hinweis auf ihre Verwendung genügen.

1. Cartesische Integraphen. Die Grundform der cartesischen Integraphen wird von einem rechteckigen Metallrahmen gebildet, der sich auf zwei an seinen kürzeren Seiten angebrachten gleich schweren Rollen und außerdem auf ein scharfrandiges Rädchen stützt, von dem noch die Rede sein wird (Abb. 1). Auf den beiden Rollen kann das Instrument vorwärts und rückwärts mit sich selbst parallel auf der Ebene der Zeichnung hin und her gefahren werden. Ein cartesisches Koordinatensystem orientieren wir so, daß die Fahrtrichtung die Richtung der Abszissenachse ist; um die Vorstellung zu erleichtern, nehmen wir die positive Richtung nach rechts an. Die Längsseiten des Rechtecks bleiben der Ordinatenachse parallel, die nach hinten positiv sei. Die langen Seiten dienen zugleich als Schienen für zwei kleine Wagen, den Differentialwagen auf der rechten und den Integralwagen auf der linken Schiene. Mit dem ersteren ist ein Stift in fester Verbindung, der mit Hilfe eines am Differentialwagen angebrachten Griffes auf der gegebenen Kurve entlang geführt wird. Am Integralwagen ist das genannte Rädchen befestigt, das nur in der nach Belieben veränderbaren Richtung seiner vertikalen Ebene auf der Unterlage rollen kann. Neben diesem Rädchen befindet sich, in starrer Verbindung mit ihm, eine Schreibfeder, welche die Integralkurve aufzeichnet.

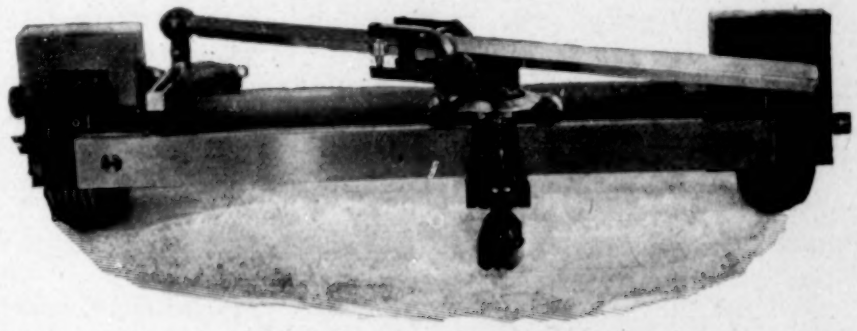


Abb. 1

Die beiden Wagen stehen bei dem zunächst betrachteten Apparate durch eine geradlinige Stange in Zusammenhang, die ich Lineal[2]) nennen will. Dieses Lineal ist an einem Zapfen des Integralwagens drehbar befestigt, während es einen am Integralwagen befindlichen Zapfen in einer Nute oder einem Schlitz umfaßt, so daß dieser sich in der Richtung des Lineals in ihm verschieben kann. Das Rädchen ist so mit dem Lineal verbunden, daß seine Ebene stets in der Richtung desselben steht.

Die erste Aufgabe, die mit dem Apparate ausgeführt wird, besteht in der Aufzeichnung der Koordinatenachsen. Man klemmt mit einer Schraube den Differentialwagen auf seiner Schiene fest, drückt den Stift auf das Papier, wo er einen Punkt kenntlich macht. Dann läßt man das Instrument auf seinen Rollen laufen und bringt den Auflagepunkt des Rädchens (oder auch die Schreibfeder) genau auf diesen Punkt, wozu der Integralwagen auf seiner Schiene verschoben werden muß. Indem man nun das Instrument rollen und die Schreibfeder herab läßt, zeichnet sie die x-Achse. Noch einfacher kann man beide Wagen an das vordere Ende der Schienen bringen und dann das Instrument rollen lassen, dann wird die Schreibfeder die Abszissenachse am vorderen Rande des Zeichenblattes zeichnen.

Um die Ordinatenachse zu erhalten, ist nur erforderlich, eine der Rollen des Instrumentes festzuklemmen. Das Rädchen wird ein wenig in die Höhe gehoben und der Integralwagen auf seiner Schiene bewegt, so beschreibt die Zeichenfeder die y-Achse.

---

[1]) Neapel 1914. Eine deutsche Uebersetzung von A. Galle erschien in der Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1922, S. 232 bis 243, 253 bis 277, 300 bis 311, 326 bis 337.

[2]) Meist Directrix genannt.

Verfolgt man mit dem Stift eine gegebene Kurve, die Differentialkurve, so kann man sich die Bewegung aus zwei Komponenten zusammengesetzt denken. In der Richtung der x-Achse wird das ganze Instrument gerollt, die Bewegung in der Ordinatenrichtung wird durch Verschiebung des Differentialwagens auf seiner Schiene hervorgebracht. Betrachten wir die letztere zuerst, so hat sie zur Folge, daß das Lineal und damit die Ebene des Rädchens um den Zapfen des Integralwagens gedreht wird. Wenn dagegen das ganze Instrument gefahren wird, so wird das Rädchen danach streben, seine Rollrichtung mit der Richtung, in der es gezogen wird, in Uebereinstimmung zu bringen und hierbei einen Zug auf den Integralwagen ausüben, der dadurch auf seiner Schiene bewegt wird. Das Rädchen bewegt sich dabei stets in der Tangentenrichtung der Kurve, die sein Auflagepunkt beschreibt.

In der praktischen Ausführung wird diese Kurve nicht von dem Rädchen, sondern von der Schreibfeder aufgezeichnet, was aber nur die Verschiebung der Kurve um eine konstante Länge in der Abszissenrichtung zur Folge hat. Ebenso wird die gegebene Kurve nicht vom Zapfen des Differentialwagens, sondern von dem Stift durchfahren, was ebenfalls eine konstante Verschiebung dieser Kurve im Sinne der x-Koordinaten zur Folge hat. Die Abszissendifferenz der Zapfen der beiden Wagen ist eine Instrumentalkonstante, die auch als Maßeinheit (a) des Instrumentes bezeichnet wird, im Gegensatz zur Maßeinheit der Zeichnung. Von ihr unterscheidet sich die Projektion des Abstandes von Stift und Feder auf die x-Achse nur durch eine Konstante.

2. Theorie der cartesischen Integraphen. Die Gleichungen der Kurven schreiben wir in der Form $y = f(x)$. Für die gegebene Differentialkurve sei diese Funktion $Q(x)$, während die Ordinate der Integralkurve y sein möge. Ist H das Zentrum des Integralwagens (Zapfen des Rädchens), G der Zapfen des Differentialwagens, so möge das Lineal GH und ebenso die Ebene des Rädchens den Winkel φ mit der x-Achse einschließen. Dann ist $y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$ und $Q(x) - y = a \operatorname{tg}\varphi = y'$ und $y' + y = Q(x)$ ist die kanonische Form einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung, die also von dem Apparat integriert wird.

Ist für zwei entsprechende Punkte beider Kurven die Ordinate dieselbe: $Q(x) = y$, so ist $y' = \operatorname{tg}\varphi = 0$, also die Tangente der Integralkurve der x-Achse parallel und ihre Ordinate hat einen größten oder kleinsten Wert. Ist auch $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$, so hat die Integralkurve (im allgemeinen) einen Wendepunkt. Dies tritt dann ein, wenn $y' = \operatorname{tg}\varphi$ = konstans ist. Das ist aber der Fall, wenn sich der Stift in der Richtung GH bewegt, d. h. wenn die Tangente der Differentialkurve ebenfalls unter dem Winkel φ gegen die x-Achse geneigt ist. Wenn also die Tangenten an entsprechenden Stellen parallel sind, so hat die Integralkurve einen Wendepunkt.

Verfolgt man mit dem Stift die Kurve $Q(x)$ bis zu einem gewissen Punkte und gibt dann dem Differentialwagen einen Ruck, damit er sich bei festgestelltem Instrument auf seiner Schiene bewegt, so ändert sich die Tangente der Integralkurve sprungweise. Wenn also die Ordinate der Differentialkurve unstetig wird, so wird die Tangente der Integralkurve unstetig. Wenn dagegen die Tangente der Differentialkurve unstetig wird, während ihre Ordinate stetig bleibt, so bleibt die Tangente der Integralkurve stetig. Wenn man daher dem ganzen Instrument eine plötzliche Rückwärtsbewegung erteilt, so entsteht eine Spitze der Integralkurve, da bei unveränderter Stellung des Differentialwagens die Tangente unverändert bleibt, also bei der Rückwärtsbewegung nur in entgegengesetzter Richtung beschrieben wird.

Zu einer gegebenen Differentialkurve gehören unendlich viele Integralkurven, die dadurch entstehen, daß dem Integralwagen beliebige Anfangsstellungen auf seiner Leitschiene zugewiesen werden. Die lineare Differentialgleichung $a y' + y = Q(x)$ hat das allgemeine Integral $y = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{a}} \left[\int Q e^{\frac{x}{a}} dx + C \right]$. Dieser Ausdruck wird also durch die Integralkurve des Apparats dargestellt. Bringt man die Schreibfeder auf einen Anfangspunkt mit der Ordinate y_0 und der Abszisse x_0, so wird $C = a y_0 e^{\frac{x_0}{a}}$ und für $x_0 = 0$ und $a = 1$ wird die Integrationskonstante $C = y_0$.

Die aufgezeichnete Kurve macht verschiedene Eigenschaften des Integrals anschaulich. Wenn zwei Integralkurven beschrieben werden, so nähern sie sich nach der Seite

der wachsenden x einander asymptotisch entsprechend der Ordinatendifferenz $\frac{C_1 - C_2}{a} e^{-\frac{x}{a}}$. Sind drei oder mehr partikuläre Integrale y_1, y_2, y_3 ... aufgezeichnet, so zeigt sich, daß die Sehnen der Bogen aller dieser Kurven, die von zwei beliebig gewählten Senkrechten auf der x-Achse begrenzt werden, sich verlängert in einem Punkte schneiden, der Beziehung $\frac{y_3 - y_1}{y_1 - y_2} = \text{konst.}$ entsprechend, welche aussagt, daß das Verhältnis der Ordinatendifferenzen von x unabhängig ist.

Auch einige lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + y = Q(x)$ können mit dem Apparate integriert werden, insbesondere wenn die a numerische Koeffizienten der algebraischen Gleichung $\xi^n - a_1 \xi^{n-1} + a_2 \xi^{n-2} \ldots + (-1)^n a_n = 0$ mit reellen Wurzeln sind[1]). Hierzu ist eine Vorkehrung nötig, den Abstand der Schienen zu verändern, d. h. der Instrumentalkonstanten verschiedene Werte geben zu können. Bei dem betreffenden Instrument kann a von 7 bis 16 cm geändert werden. Es ersetzt dann gewissermaßen mehrere Instrumente mit verschiedenen Maßeinheiten.

Eine andre Erweiterung der Anwendbarkeit wird dadurch erreicht, daß die Ebene des Rädchens auch unter von null verschiedenen Winkeln gegen das Lineal mit Hilfe eines geteilten Kreises gestellt werden kann (Abb. 2). Bezeichnet man diesen Winkel mit $\alpha = \text{arctg } m$, so heißt die Differentialgleichung, da $\text{tg}(\alpha - \varphi) = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\varphi}{1 + \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\varphi}$ ist, $y' = \frac{-am + Q(x) - y}{a + m[Q(x) - y]}$.

Von dieser Integration kann man zu einem besonderen Zwecke Gebrauch machen. Stellt man das Rädchen senkrecht zum Lineal, ist also $\alpha = 90^0$ und $m = \infty$, so wird $y = \frac{a}{y'}$. Diese Gleichung integriert man, indem der Differentialwagen auf seiner Schiene festgestellt und das ganze Instrument (in diesem Falle vorteilhafter nach links) gerollt wird. Man erhält einen Parabelbogen $y^2 = 2ax$, dessen Achse parallel zur x-Achse liegt. Den Scheitel dieser Parabel kann allerdings die Feder nicht erreichen, weil das Rädchen sich senkrecht zur x-Achse zu stellen strebt und daher schließlich eine weitere Bewegung unmöglich macht.

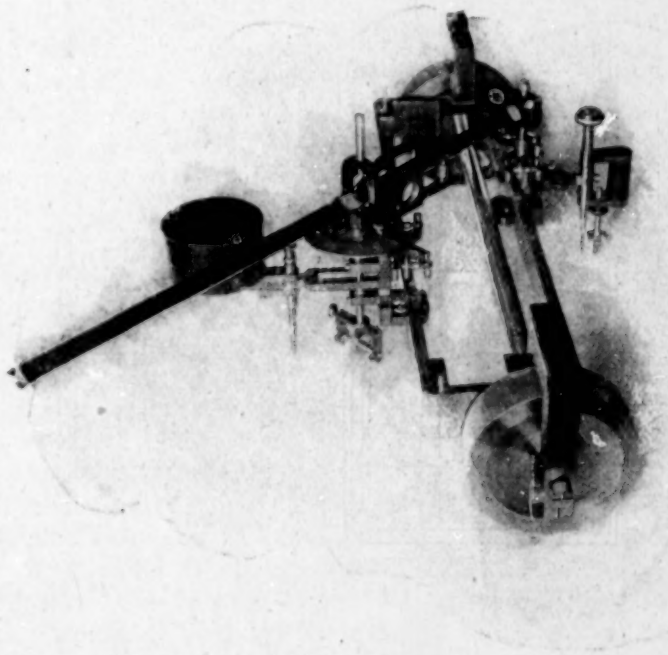


Abb. 2

Mit demselben Instrument kann man die Exponentialkurve, die Kettenlinie, die hyperbolische Kosinuskurve und die Wahrscheinlichkeitskurve zeichnen.

Zum Schluß wollen wir auf die Auflösung der algebraischen Gleichungen hinweisen, die das Instrument leistet. Wenn man $Q = e^{-x}$ setzt, eine Gleichung, die man, wie erwähnt, mit dem Instrument zeichnen kann, so erhält man $y = (x + C)e^{-x}$. Wird diese Kurve wieder integriert, so folgt $y = \left(\frac{1}{2}x^2 + Cx + C^1\right)e^{-x}$ usw.

Ist also z. B. die Gleichung $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}px^2 + qx + r = 0$ vorgelegt, deren Ableitungen der Reihe nach $\frac{1}{2}x^2 + px + q$ und $x + p$ sind, so integriert man zunächst

[1]) Ein Beispiel ist $980\,y''' + 208\,y'' + 31\,y' + y = Q(x)$, wo $\xi^3 - 31\,\xi^2 + 208\,\xi - 980$ die 3 reellen Wurzeln 14, 10, 7 hat. Die algebraische Gleichung hat eine Aehnlichkeit mit der »charakteristischen Gleichung«.

$y = e^{-x}$, indem der Stift im Anfang auf den Punkt mit der Ordinate 1 und der Abszisse 0 gestellt wird. Dann integriert man wiederum, indem man als Anfangsbedingung einführt, daß dem Punkte mit der Ordinate p der Punkt mit der Ordinate q entspricht, endlich die dann erhaltene Kurve so, daß dem Punkte mit der Ordinate q der Punkt der Integralkurve mit der Ordinate r entspricht. Die Schnittpunkte der letzten Kurve mit der x-Achse liefern die reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung.

3. Die Pascalschen Konstruktionen. Beim Integraphen von Abdank-Abakanowicz ist in der Mitte des Instruments ein fester Zapfen vorhanden, um den sich das Lineal dreht. Auf letzterem läuft nun ein dritter Wagen, der dazu dient, mit Hilfe eines Gelenkparallelogramms die Ebene des Rädchens immer parallel dem Lineal zu halten. Auch hier bringt Pascal die Aenderung an, daß das Rädchen unter einem beliebigen konstanten Winkel gegen die Linealschiene gehalten werden kann, wodurch der Aufgabenkreis erweitert wird, dem dieser Apparat dient. Bei der Einstellung des Rädchens senkrecht zur Schiene ($\alpha = 90^0$) findet man den Integrallogarithmus $\int \frac{dx}{\lg x}$, der die Anzahl der Primzahlen zwischen 2 und x mit großer Annäherung darstellt.

Ein andres Instrument hat zwei feste Zapfen; mit ihm kann die Riccatische Gleichung integriert werden. Auf einer Schiene, die den einen festen Zapfen O mit dem Differentialwagen G verbindet, läuft auch hier ein dritter Wagen S, durch den zwei Stangen vom andern Zapfen E und vom Integralwagen H aus geführt sind. Dadurch wird erreicht, daß die Verbindung des Differential- und Integralwagens immer parallel des Stange ES bleibt, wodurch die gegenseitige Lage der beiden Wagen geregelt wird.

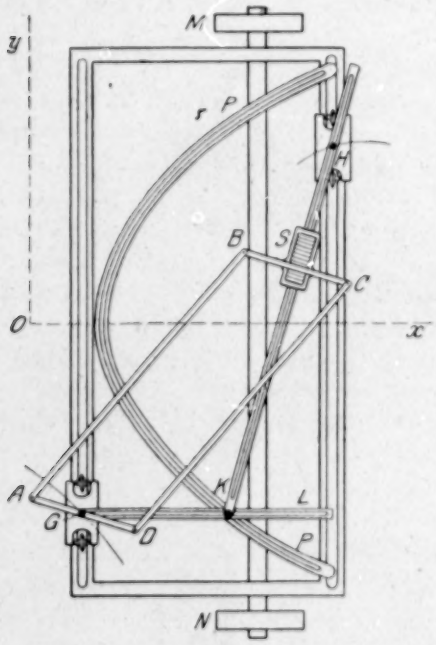


Abb. 3

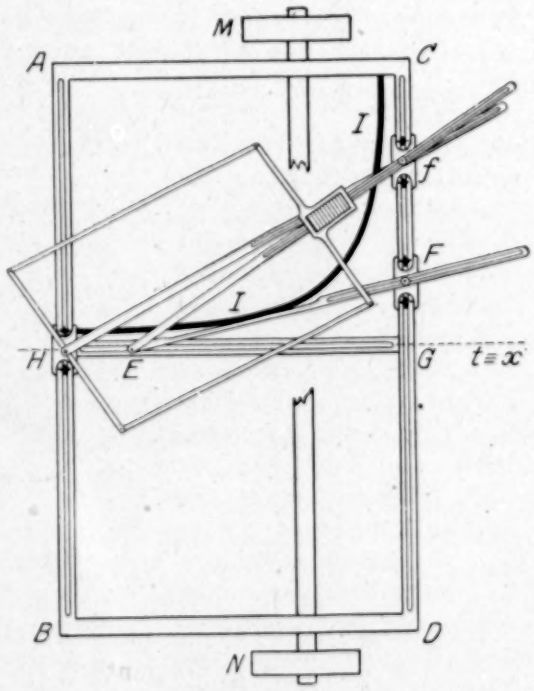


Abb. 4

Von besonderer Bedeutung ist dann noch ein Instrument (Abb. 3), bei dem ein beweglicher Zapfen K (statt des festen bei Abdank) angebracht ist, um den sich das Lineal dreht. Entweder wird der Zapfen durch den Differential- oder durch den Integralwagen bewegt. Hängt die Bewegung von letzterem ab, so gelingt es, damit die natürliche Differentialgleichung der Geschoßbewegung zu integrieren[1]), d. h. die differentielle Beziehung zwischen Neigungswinkel und Geschwindigkeit in der Geschoßbahn. Diese Aufgabe kann man theoretisch nur für gewisse Fälle des Gesetzes der Abhängigkeit vom Luftwiderstande lösen, dieses Instrument löst sie für ein beliebiges Gesetz, wenn dieses graphisch dargestellt wird. Hängt aber die Bewegung des Zapfens vom Differentialwagen ab, so ist ein solches Instrument (Abb. 4) imstande, Integralgleichungen (Volterra) zu lösen. Um

[1]) L. Jacob beschäftigte sich auch mit dieser Aufgabe, der von ihm erdachte Apparat ist aber komplizierter. — In Abb. 3 sind G und H vertauscht.

die lineare Differentialgleichung mit allgemeinen Koeffizienten $y' = F(x)\,y + \psi(x)$ zu integrieren, ist noch ein Gelenkparallelogramm erforderlich, durch welches die Schiene Hf (Abb. 5) der von der Mitte K der Seite AB ausgehenden Stange $K\varphi$ parallel gehalten wird.

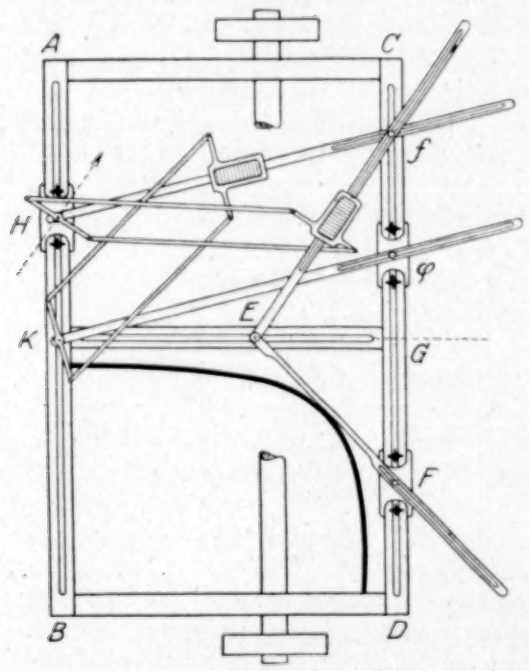


Abb. 5

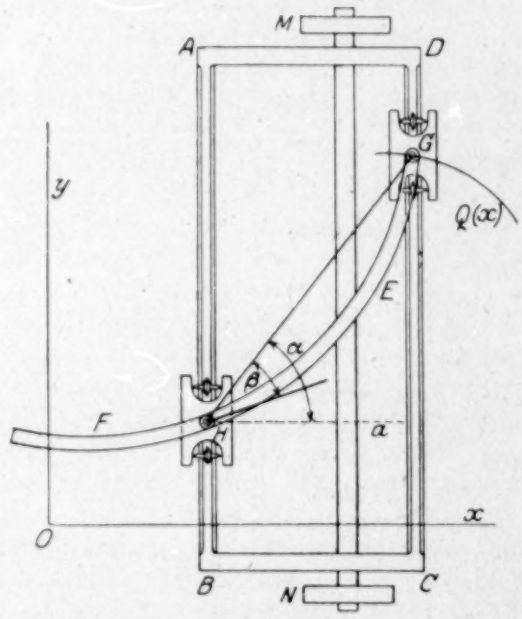


Abb. 6

Die Integration der Riccatischen und ebenso der Abelschen Gleichung wird aber auch durch ein Instrument (Abb. 6) geleistet, bei dem an Stelle des geraden Lineals, das die beiden Wagen verbindet, ein Kurvenlineal eingesetzt ist. Bei dieser Art von Instrumenten sind zwei Möglichkeiten vorhanden. Entweder ist das gekrümmte Lineal am Differential- oder am Integralwagen drehbar befestigt, während der andre Wagen mit seinem Zapfen in einem Schlitz des Lineals sich verschiebt. Die Ebene des Integrierrädchens muß sich im ersteren Falle immer in die Richtung der Tangente der Linealkurve stellen. Die Form der Differentialgleichung, die integriert wird, ist $y' = \Phi(Q(x) - y)$ und man kann für eine gegebene Funktion Φ die Gestalt der Kurve bestimmen, die das Lineal haben muß.

Die zweite Anordnung verlegt den Drehpunkt des Lineals in den Zapfen des Integralwagens (Abb. 7). Das Integrierrädchen ist so mit dem Lineal verbunden, daß seine Ebene in die Richtung der Kurventangente fällt. Die Form des Kurvenlineals, das wieder über den Zapfen des andern, hier des Differentialwagens, verschiebbar ist, ist bei diesem Instrument eine andre. Die Kurve ist sozusagen die längere Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Drehpunkt die gegenüberliegende Ecke des Dreiecks ist. Diese Ausführung ist in mancher Beziehung, namentlich auch in bezug auf die Herstellung der Kurve sehr vorteilhaft, hat aber den Nachteil, daß die Beweglichkeit bei gewissen Wagenstellungen versagt, und nur mittels eines besondern Handgriffs gelingt es, den nötigen Antrieb hervorzubringen.

Noch zwei andre Formen hat Pascal seinen Apparaten gegeben. Bei der einen läßt er die eine Schiene, nämlich die, auf der der Differentialwagen gleitet, ganz fort. Das Instrument (Abb. 8) hat dann eine gewisse Aehnlichkeit mit dem Schneidenplanimeter, aber nur insofern, als der Stift, der am Ende des Lineals oder der Stange sitzt, die gegebene Kurve entlang geführt wird. Aber an Stelle der Schneide tritt hier der Integralwagen auf seiner Schiene und sein Rädchen.

Endlich hat Prof. Pascal noch Integraphen ausgedacht, bei denen die Schiene, auf welcher der Integralwagen läuft, nicht geradlinig ist, sondern in einer bestimmten Kurvenform gebogen (Abb. 9). Dann können noch bei diesem neuen Typus wieder alle andern Verschiedenheiten eingeführt werden, die bei dem Instrument mit geraden Schienen erwähnt wurden. Auch mit diesem Apparate läßt sich die Differentialgleichung der Geschoßbewegung im widerstehenden Mittel integrieren, aber es muß hier für jedes Widerstands-

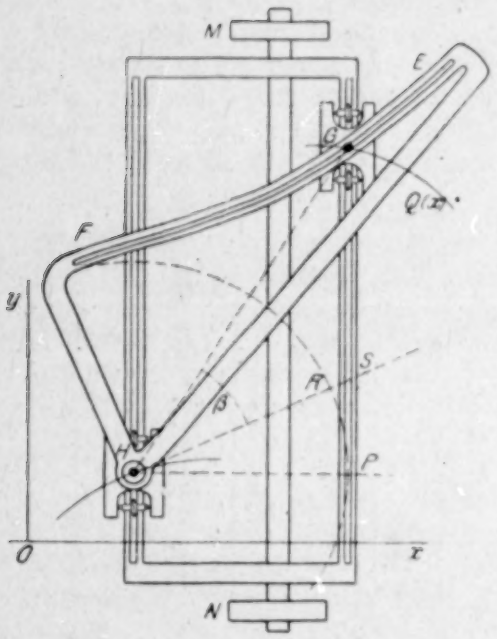


Abb. 7

gesetz eine anders geformte Schiene angefertigt werden, während in dem früheren Falle es nur nötig war, eine andere Kurve zu zeichnen.

4. Polarintegraphen. Wesentlich verschieden von den bisher besprochenen cartesischen Inte-

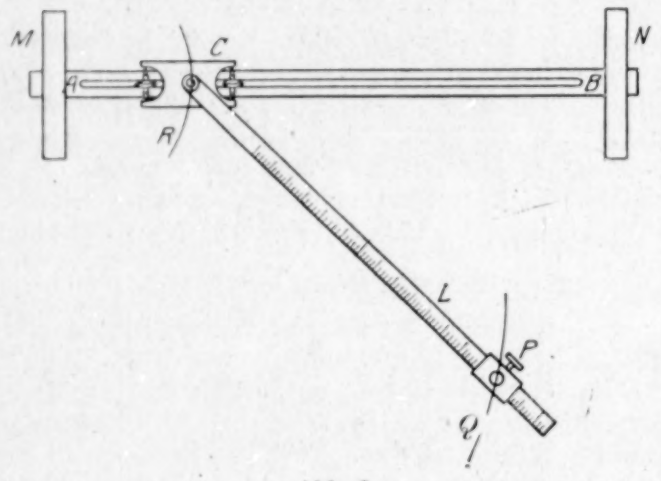


Abb. 8

graphen ist der Polarintegraph. Auf seine Erfindung hat wohl Prof. Pascal besondern Wert gelegt, und eine Abbildung desselben schmückt das Titelblatt seines Buches.

Das Instrument (Abb. 10) hat die Gestalt eines Kreissektors mit einem festen und einem drehbaren Schenkel, deren Winkelstellung an einem geteilten Quadranten abgelesen und durch eine Klemmschraube fixiert wird. Beide Schenkel dienen als Schienen, der erste für den Differentialwagen, der drehbare für den Integralwagen, die im einfachsten Falle durch eine gerade Stange verbunden sind. Die drei Stützpunkte des Instruments werden durch den Zapfen O im Kreiszentrum, durch eine Walze, deren Achse mit dem Ende des festen Schenkels zusammenfällt, und durch den Rand des mit dem Integralwagen verbundenen Rädchens gebildet. Das Lineal, die Verbindungsstange der Wagen, ist um den Zapfen des Integralwagens drehbar und verschiebt sich über den Zapfen des Differentialwagens. Die Ebene des Rädchens bildet einen konstanten, aber verstellbaren Winkel mit dem Lineal.

Die Wirkungsweise des Apparates übersieht man wieder am besten, wenn man ihn zunächst einfache Operationen ausführen läßt. Klemmt man die Walze fest und hebt den Stift des Differentialwagens und das Rädchen des Integralwagens etwas an, so daß

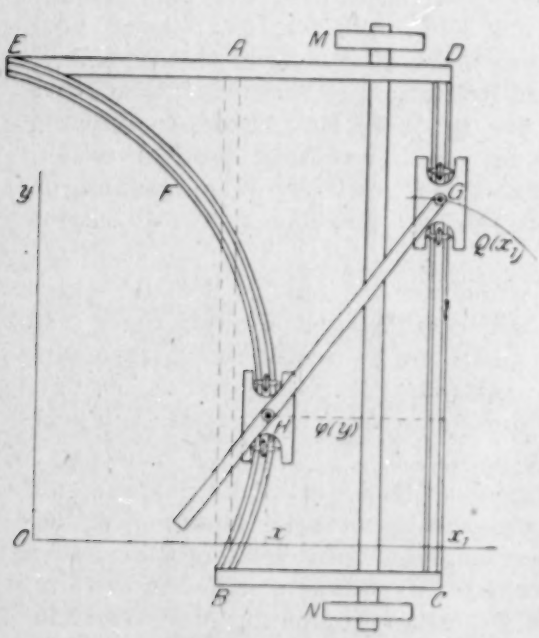


Abb. 9

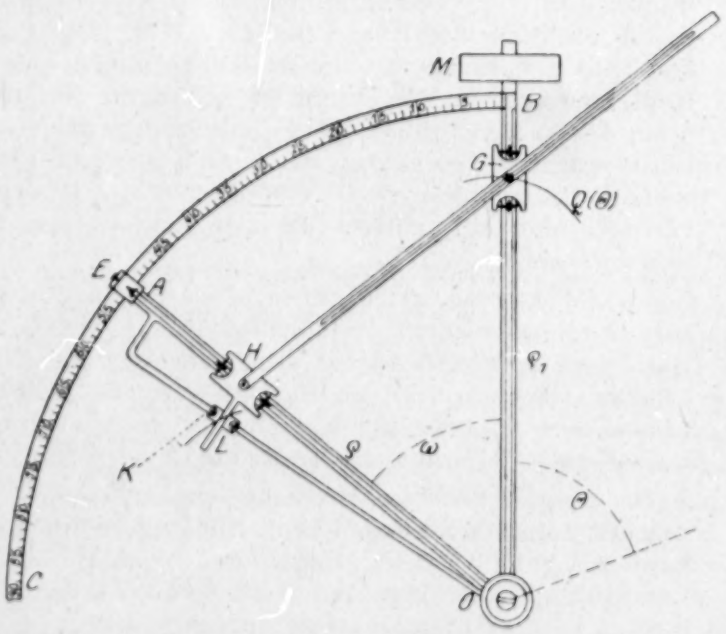


Abb. 10

sie die Ebene der Zeichnung nicht berühren, so zieht die Schreibfeder, wenn man den Integralwagen rollen läßt, eine durch das Zentrum gehende Gerade. Stellt man den drehbaren Schenkel unter verschiedenen Winkeln gegen den festen, so erhält man auf diese Weise in O konvergierende Gerade. Die Winkel, die sie untereinander bilden, kann man an der Quadrantenteilung ablesen.

Stellt man dagegen den Integralwagen auf seiner Schiene fest und läßt das ganze Instrument auf der Walze um das Zentrum rollen, so beschreibt die Ziehfeder einen Kreis um das Zentrum. Durch Veränderung der Stellung des Wagens auf seiner mit einer Teilung versehenen Schiene bekommt man konzentrische Kreise, deren Halbmesserlängen auf der Schiene des Integralwagens abgelesen werden können.

Da sich die Wagen nicht bis zum Zentrum verschieben lassen, kann man das Lineal vom Differentialwagen abheben und über das Zentrum legen. Stellt man dann das Rädchen normal zum Lineal ($\alpha = 90^0$), so wird bei der Drehung des Apparates die Schreibfeder einen Kreis um den Mittelpunkt beschreiben. Wenn man aber $\alpha = 75^0$, 60^0 usw. macht, so erhält man logarithmische Spiralen, da in diesem Falle das Rädchen einen Zug auf den Integralwagen ausübt.

Während das Rädchen sich unter dem Integralwagen befindet, ist die Schreibfeder seitlich gegen ihn verrückt, in der Weise, daß beide den gleichen Abstand vom Zentrum haben, aber ihre beiden Radien einen konstanten Winkel, bei Pascal von 15^0, miteinander einschließen. Dadurch wird die Integralkurve, ohne ihre Gestalt zu ändern, um das Zentrum gedreht.

Stellt man den Stift des Differentialwagens auf einen Punkt der Zeichenebene ein und klemmt man ihn fest, dreht dann das ganze Instrument um 15^0 rückwärts, so kann man nach diesem Punkte konvergierende Gerade, Kreise um ihn als Mittelpunkt, Spiralen usw. ziehen, indem man bei feststehendem Apparate den beweglichen Schenkel, der den Integralwagen trägt, nach Lösung der Schraube längs des Quadranten gleiten läßt und das Rädchen auf Stellungen von $\alpha = 0^0$, 90^0 usw. gegen das Lineal bringt.

Man kann leicht Tangenten oder Normalen an eine Kurve mit dem Apparat zeichnen. Hat die Schreibfeder eine Kurve bis zu einem gewissen Punkte gezogen, so hält man die Bewegung des Instrumentes an, löst die Schraube, mit der die Schiene des Integralwagens am Quadranten geklemmt ist und dreht die Schiene um den Mittelpunkt. Ist $\alpha = 0$, d. h. das Rädchen in der Richtung des Lineals, so beschreibt die Feder die Tangente; ist $\alpha = 90^0$, so zeichnet sie die Normale an die Kurve in dem betreffenden Punkte. Man kann auf diese Weise auch eine beliebig gegen die Tangente geneigte Gerade ziehen, wenn man das Rädchen unter einem andern Winkel gegen das Lineal einstellt.

5. Theorie der Polarintegraphen. Eine gegebene Kurve beziehen wir bei diesem Apparate auf Polarkoordinaten und stellen sie in der Form $\varrho_1 = Q(\theta)$ vor. Als Pol gilt das Zentrum O, und von einer beliebig gewählten Richtung durch O wird der Polarwinkel θ gezählt. Ist der Winkel des Sektors, der am Quadranten abgelesen wird, ω, so bildet die Schiene des Integralwagens mit ihr den Winkel $\theta + \omega$.

Ist $\alpha = 0^0$, also die Rollrichtung des Rädchens mit der Linealrichtung zusammenfallend, so ist der Winkel φ der Tangente der Integralkurve (von der Normale auf dem Radius Vektor im positiven Sinne gezählt) durch $\operatorname{tg}\varphi = \frac{d\varrho}{\varrho\, d\,(\theta+\omega)} = \frac{d\varrho}{\varrho\, d\,\theta}$ gegeben. Da andererseits $\cos\varphi = \frac{\varrho_1 \sin\omega}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho_1{}^2 - 2\varrho\varrho_1\cos\omega}}$ ist, so wird $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\varrho - \varrho_1\cos\omega}{\varrho_1\sin\omega}$, und die durch den Apparat integrierte Differentialgleichung lautet $\frac{d\varrho}{d\theta} = \frac{\varrho^2}{\sin\omega\, Q(\theta)} - \varrho\operatorname{ctg}\omega$, worin Q eine willkürliche Funktion und ω eine Konstante ist. Ist α von 0 verschieden, so erhält man statt dessen ($\operatorname{tg}\alpha = m$ gesetzt)

$$\frac{d\varrho}{d\theta} = \frac{\varrho^2 + \varrho\, Q(\theta)\,(m\sin\omega - \cos\omega)}{Q(\theta)\,(m\cos\omega + \sin\omega) - m\varrho} \quad \text{oder} \quad \frac{\varrho^2 + m\varrho\varrho'}{\varrho'\,(m\cos\omega + \sin\omega) - \varrho\,(m\sin\omega - \cos\omega)} = Q(\theta).$$

Für $\alpha = 0^0$ erhält man natürlich die vorige Gleichung, für $\alpha = 90^0$ erhält man $\frac{d\varrho}{d\theta} = \frac{\sin\omega \cdot Q(\theta)\cdot\varrho}{\cos\omega\cdot Q(\theta) - \varrho}$. Endlich leistet der Apparat die polare Quadratur, indem man aus der ersten und letzten Gleichung für $\omega = 90^0$ die Gleichungen bekommt: $\frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{d\theta} = -\frac{1}{Q(\theta)}$

und $\frac{d\varrho}{d\theta} = -Q(\theta)$. Ferner kann der Apparat lineare Differentialgleichungen, Bernoullische und kompliziertere Differentialgleichungen integrieren.

Von andern Anwendungen sei, abgesehen von Kurvenzeichnungen, die z. T. schon erwähnt wurden, auf die graphische Konstruktion der Zahl π, die der Integraph von Abdank-Abakanowicz umständlicher zustande bringt, und auf die Winkelteilung hingewiesen. Ferner stellt der Apparat die Kurven für die elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung her und kann zur Berechnung der besonders in der Ballistik auftretenden Integrale $\int_0^{\varrho} \frac{d\theta}{\cos^n \theta}$ verwendet werden.

Für die Auflösung algebraischer Gleichungen kann nicht die Gleichung $\varrho = f(\theta)$ ohne weiteres zugrunde gelegt werden, weil der Integralwagen sich nicht dem Zentrum über einen gewissen Abstand nähern kann. Man muß daher zwei Kurven zeichnen $\varrho = f(\theta) + \varphi(\theta)$ und $\varrho = \varphi(\theta)$, und die Aufgabe läuft dann darauf hinaus, die Werte von θ zu bestimmen, für die $f(\theta) = 0$ wird. Dazu können dann zwei verschiedene Verfahren verwendet werden, die indessen etwas umständlicher erscheinen als die mit den cartesischen Integraphen ausgeführten.

Ich bin im vorstehenden nur auf die Instrumente von Pascal eingegangen, einmal weil man sich über andre Apparate dieser Art durch das Werk von L. Jacob, le calcul mécanique (Paris 1911) und den von mir herausgegebenen Band 15 »Mathematische Instrumente« der Sammlung Jahnke (Berlin 1912) orientieren kann, dann aber auch, weil diese andern Konstruktionen meist wesentlich komplizierter sind und nicht so vielseitige Anwendungen zulassen. Als einen recht einfachen Apparat möchte ich nur noch den von L. Jacob zur Lösung der Riccatischen Differentialgleichung erwähnen, der einem Prytzschen Stangenplanimeter nachgebildet ist. An Stelle der Schneide tritt hier ein scharfrandiges Rädchen. Die Stange ist durch den Mittelpunkt eines geteilten Kreises hindurchgeführt; ein Durchmesser dieses horizontalen Kreises wird durch zwei miteinander verbundene Gelenkparallelogramme stets einer bestimmten gegebenen Richtung parallel gehalten, wenn der Fahrstift auf der gegebenen Kurve entlang geführt wird. Der ganze Mechanismus wird von kleinen Rollen getragen, damit der Kreis und die Parallelogramme sich mit möglichst wenig Reibung bewegen können. An der Stange ist ein Nonius angebracht, der an dem Kreise gleitet und den Winkel, den die Stange in irgend einem Augenblick mit der Anfangsrichtung einschließt, abzulesen gestattet. Die Richtung der Stange ist jederzeit Tangente der vom Berührungspunkte des Schneidenrades beschriebenen Kurve. Allerdings ist dieser Apparat kein eigentlicher Integraph, da er die Integrationskurve nicht aufzeichnet, sondern Ablesuugen erfordert, indessen scheint es mir nicht schwierig, ihn noch mit einer Schreibfeder auszustatten. Zunächst liefert der Apparat die Integration der Riccatischen Gleichung $\frac{du}{dt} = Pu^2 + Qu + R$ nur in dem besonderen Fall, daß $P + R = 0$ ist. Aber Jacob führt in geschickter Weise den allgemeinen Fall auf den besonderen zurück. Für die Abelsche Gleichung $\frac{du}{dt} = pu^3 + qu^2 + ru + s$ hat er ein andres Instrument konstruiert, das dem Prinzipe nach dem vorigen ähnlich ist, aber an Stelle der Parallelführung tritt die Führung der Kurvenschiene in einer durch die Koeffizienten der Gleichung vorgeschriebenen Weise. Der Vergleich mit der von Pascal und Ajello angegebenen Integration durch den Apparat mit gekrümmtem Lineal dürfte aber zugunsten des letzteren ausfallen, zumal dabei beide Gleichungen, wenn auch durch verschieden geformte Lineale, integriert werden.

Der Nutzen, den die Anwendung von Instrumenten, wie die Integraphen, stiften kann, wird besonders bei häufiger Wiederholung derselben Operation hervortreten und sich vornehmlich in Zeitersparnis zeigen. Es wurde ferner bereits darauf hingewiesen, daß die graphische Darstellung manche Eigenschaften des Resultats ungesucht und deutlicher zeigt, als die rechnerische Behandlung einer Aufgabe. Endlich bieten Instrumente dieser Art auch ein hohes wissenschaftliches Interesse, worauf Henry S. H. Shaw in seinem kleinen Werke »Mechanical Integrators« (New York 1886) hinweist, indem er sagt: Aside from the labor-saving quality which most of them possess, they have a value arising from the fact that they represent thoughts of more or less complexity expressed in mechanism. 227

Potsdam, Oktober 1922.

KURZE AUSZÜGE

Festigkeitslehre.

Ueber die Festigkeit von angeschweißten Deckeln hat R. J. Roarck (Mech. Engineering, New-York, 44. S. 225—230, 1922) Versuche angestellt. Er setzte röhrenförmige Gefäße von 400 mm Durchmesser, 3 m Länge und 9,5 mm Wandstärke unter Druck. Den Verschluß der Röhren bildeten gewölbte Deckel. Die Krempe der Böden war auf ihrer Stirnseite, wo sie verstemmt zu werden pflegt, elektrisch an den Mantel angeschweißt. Einige Deckel waren angenietet. Von den untersuchten Gefäßen waren zwei Eisenbetonröhren mit drei Armaturen. Als Folge der übermäßigen Beanspruchung der Gefäße durch den Druck sprangen bei zwei Behältern die Deckel wegen der Ueberschreitung der Biegungsfestigkeit in dem abgebogenen Rand ab, in fünf Fällen riß die geschweißte Längsnaht der Rohre auf, in zwei Fällen mußten die Versuche wegen der Undichtigkeit unterbrochen werden. Die Risse begannen in den Längsnähten dort, wo Flanschen auf dem Mantel befestigt waren. Die Verschärfung der Beanspruchung des Zylindermantels durch die Biegung an seinen Enden, die von der gehinderten Querausdehnung wegen der angenieteten oder angeschweißten Deckel herrührt, deutet der Verfasser an, ohne auf ihre genauere Abschätzung einzugehen. Die schwächsten Stellen waren entweder die Längsnaht oder die Stellen der stärksten Umbiegung in den gewölbten Deckeln, während die Schweißstellen zwischen Mantel und Boden bis zu den angewandten Drucken standhielten.

Für die Biegungsbeanspruchung ebener Deckel gibt G. D. Fish (Mech. Engineering, New-York, 44. S. 165—170, 1922) Formeln an, die er zur Berechnung der Köpfe großer Gasmaschinenzylinder verwendet. Er bestimmt die Durchbiegungen und die Spannungen einer freiaufliegenden kreisförmigen Platte, die unter einer ringförmig verteilgten Last verbogen wird. Aus diesem Belastungsfall können alle Sonderfälle abgeleitet werden, die eine Bedeutung für die Beanspruchung der Zylinderdeckel haben. Da er sich auf die Platten konstanter Stärke beschränkt, sind seine Formeln mit den schon von Clebsch und Grashof angegebenen identisch.

Die Elastizitätskonstanten von Holz hat H. Carrington (Phil. Mag. 43. S. 871—878, 1922) in weiteren Versuchen bestimmt[1]). Die Probekörper wurden aus den Holzstämmen mit verschiedener Orientierung ihrer Hauptträgheitsachsen zu den ausgezeichneten Wachstumsrichtungen des Holzes herausgeschnitten. Der Durchmesser der Stämme war so groß, daß die Jahresschichten innerhalb der Versuchskörper als ein Bündel von parallelen Ebenen betrachtet werden konnten. Diesem Fall elastischer Aelotropie entsprechen neun elastische Konstanten, die Carrington tatsächlich aus der Beobachtung der Längs- und der Querverkrümmung der auf Biegung beanspruchten Holzkörper bestimmt hat. Er erhält drei Werte des Elastizitätsmoduls und sechs Querdrehungsverhältnisse. Sein Bericht enthält ferner Angaben über die Festigkeit des Holzes und den Einfluß des Feuchtigkeitsgehaltes auf die untersuchten Eigenschaften.

[1]) Vergl. auch diese Zeitschrift 1, 1921, S. 482.

Das Elastizitätsproblem der kreisförmigen Platte veränderlicher Dicke beschäftigt G. D. Birkhoff (Phil. Mag. 43. S. 953—962, 1922). Er nimmt zwei zu ihrer Ebene symmetrisch gelegene Umdrehungsflächen $z = \alpha t$ als ihre Begrenzung an, wo α eine Funktion der radialen Koordinate r und t eine im Vergleich zum Halbmesser der Platte kleine Zahl bedeutet. Die Rechnung bezieht sich also auf kleine Plattendicken. Es werden in ihr alle Größen nach Potenzen von t entwickelt. Er betrachtet zuerst eine Scheibe, die in ihrer Ebene durch einen auf einem innern Kreisumfang ausgeübten Sprengdruck belastet ist, während ihr äußerer Rand eingeklemmt ist. Eine derart belastete Platte gerät bei einem bestimmten Wert des Druckes in ein labiles Gleichgewicht, was auch erwähnt wird. Aus den anstellten Rechnungen lassen sich keine Einzelheiten über den kritischen Wert des Druckes oder die Form oder die Spannungen der Platte entnehmen. Die Biegung einer Platte durch eine Einzelkraft, die in ihrer Mitte angreift, wird als zweites Beispiel betrachtet, auch hier ohne daß das Problem bis zu einer Differentialgleichung oder einer andern Angabe entwickelt würde, die für die Anwendung weiter verwertbar erscheinen würde.

Brückenschwingungen. Einen Anhaltspunkt, wie man die größte Durchbiegung einer in erzwungene Schwingungen geratenen Brücke berechnen kann, gibt Timoschenko (Phil. Mag. 43. S. 1018—1019, 1922) an. Als eine der Hauptursachen für die Erzitterungen von eisernen Brücken großer Spannweite wird der unvollkommene Massenausgleich des Triebwerkes der Lokomotive betrachtet. Man kann in erster Näherung die Brücke als einen frei aufliegenden Stab konstanten Trägheitsmomentes betrachten und nach den Biegungsschwingungen fragen, die eine über den Stab mit einer konstanten Geschwindigkeit dahinfahrende Last von periodisch veränderlicher Stärke in ihm erzwingt. Wenn die Periode der Grundschwingung, die wohl als die maßgebendste zu betrachten ist,

mit dieser Periode zusammenfällt, tritt Resonanz ein. Die Amplituden wachsen bis zum Augenblick, in dem die Lokomotive die Brücke verläßt. Die den Praktiker interessierende größte Durchbiegung der Brücke ist durch die in diesem Zeitpunkt auftretende Schwingungsamplitude gegeben; für ihren Wert kann Timoschenko einen einfachen Ausdruck angeben.

Um die **Randwertaufgabe einer durch zwei sich schneidende Kreisbogen begrenzten elastischen Platte** zu lösen, bedarf es der Kenntnis der Greenschen Funktion der Plattengleichung $\Delta\Delta w = o$ für eine von zwei Kreisbogen begrenzte Sichel, deren Ränder vollkommen eingespannt sind. A. C. Dixon (Proc. of the London Math. Soc. Ser. 2, Vol. 19, Part. 5, 1921, P. 373–386) hat sie aufgestellt. Mit ihrer Hilfe läßt sich nach Hadamard die Durchbiegung einer Platte w, die zu gegebenen Randwerten $\bar{w}$ und zu gegebenen Randneigungen $\frac{\partial \bar{w}}{\partial n}$ gehört, durch das über die Randkurve genommene Integral

$$\int \left(\bar{w}\frac{\partial \Delta G}{\partial n} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial n}\Delta G\right) ds$$

darstellen, sofern unter G die Greensche Funktion des eingespannten Randes oder die elastische Fläche verstanden wird, nach der sich die eingespannte Platte unter der im fraglichen innern Punkte angebrachten Lasteinheit verbiegt. Dixon benutzt zu seiner Rechnung Koordinaten, die zur Entstehung der bekannten orthogonalen Kreisscharen führen. Zur Aufstellung des Ausdruckes von G verschafft er sich einen Ausdruck einer allgemeinen Lösung w in der Gestalt eines bestimmten Integrales und setzt ihn dem obigen gleich. Das Integral für G, das er zunächst erhält, verwandelt er sodann unter Benutzung der Residuenrechnung in eine unendliche Reihe von Funktionen, die die Randbedingungen erfüllen. Aus der Sichel folgt in der Grenze, wenn ihre Breite klein wird, ein bemerkenswerter Sonderfall, nämlich die Lösung eines unendlich langen Plattenstreifens mit eingespannten Randgeraden, der eine Einzelkraft trägt. Auch für diesen Belastungsfall kann Dixon eine Reihe angeben, welche nach Exponentialfunktionen $e^{\vartheta x}$, $e^{i\vartheta y}$ fortschreitet, wo ϑa die Wurzeln der Gleichung in der komplexen Ebene $\mathfrak{Sin}\,\vartheta a = \pm\,\vartheta a$ und a die Breite des Streifens bedeuten. Die Frage nach der Natur der Singularität, wenn eine solche überhaupt in Betracht kommt, in der Ecke einer Platte mit zwei vollkommen eingespannten Rändern dürfte durch die schöne Untersuchung Dixons klargestellt worden sein. Er deutet diesen Punkt nur an, ohne auf ihn näher einzugehen.

Torsion mit eben bleibenden Querschnitten. In der St. Venantschen Theorie der Verdrehung von stabförmigen Körpern beschränkt man sich auf die Angabe der Spannungsverteilung ohne Rücksicht darauf, in welcher Weise die Momente sich auf den Stab übertragen. Die Querschnitte verwinden sich mit Ausnahme des kreisförmigen Querschnittes. Gelegentlich der Untersuchung der Spannungszustände von symmetrisch belasteten auf Torsion beanspruchten Stäben, auf die ein Drehmoment im mittleren Querschnitt wirkt, das mit zwei in den Endquerschnitten des Stabes übertragenen halb so großen Momenten Gleichgewicht hält, hat man bemerkt, daß hier ein Fall der Torsion vorliegt, bei dem ein Querschnitt des Stabes eben bleibt. Aus Symmetriegründen muß nämlich der mittlere Querschnitt eines derart belasteten Stabes eben bleiben. Dieser vermeintliche Widerspruch mit den Aussagen der St. Venantschen Theorie hat in der technischen Literatur Anlaß zu verschiedenen Bemerkungen (man vergleiche die Aufsätze von Eggenschwieler[1]) und von Maillart[2])) gegeben. S. Timoschenko (Proc. of the London Math. Soc. Ser. 2, Vol. 20, Part. 5, 1922, S. 389–397) weist darauf hin, daß hier das Ebenbleiben des mittleren Querschnittes durch gewisse Spannungen erzwungen wird, mit denen man sich sonst bei der Behandlung von Torsionsaufgaben nicht näher zu beschäftigen pflegt[3]). So muß beispielsweise bei dem von Timoschenko herausgegriffenen Fall ein zusätzliches System von Kräften oder Spannungen in Betracht gezogen werden, das über einen Querschnitt verteilt sich selbst das Gleichgewicht hält. Es ist über den mittleren Querschnitt derart verteilt anzubringen, daß die Verwindung desselben verschwindet. Aus zwei in entgegengesetzter Richtung verdrillten Stäben, deren Endquerschnitte künstlich eben erhalten werden, läßt sich nach ihrer Zusammenfügung der von Timoschenko ins Auge gefaßte Beanspruchungsfall erzeugen (wobei allerdings die Torsionsspannungen im Innern des Stabes, wo sie verschwinden müßten, verbleiben!). In der Praxis spielt die Verdrehung eines flachen Stabes von rechteckigem Querschnitt bei der Biegung des Doppel-T-Trägers eine Rolle. Timoschenko berechnet unter einfachen Annahmen über das Verteilungsgesetz der Zusatzspannung, die aus einem Gleichgewichtssystem von über den mittleren Stabquerschnitt verteilten Normalspannungen besteht, die Störung im St. Venantschen Spannungszustand und insbesondere die Verminderung des Verdrehungswinkels des flachen Stabes, der sich als eine für die Praxis zu merkende Folge der verhinderten Verwindung des Mittelquerschnittes ergibt.

Biegungsbroblem und gespannte Membran. Die Lösung des Torsionsproblems eines Stabes hat L. Prandtl auf die Be-

[1]) »Bauingenieur«, Heft 1 und 2, 1922.

[2]) »Schweizerische Bauzeitung« 79, S. 254, 1922.

[3]) Dieselbe Bemerkung macht auch R. Maillart in seinem eben angeführten Aufsatz.

stimmung der Gestalt einer dünnen durch einen gleichmäßigen Druck belasteten Haut zurückgeführt, die man sich über einen mit der Randkurve des Querschnittes zusammenfallenden Rahmen ausgespannt zu denken hat. S. Timoschenko bringt (Proc. of the London Math. Soc. Ser. 2, Vol. 20, Part. 5, 1922, P. 398—408) auch das Biegungsproblem eines Stabes mit der Randwertaufgabe einer dünnen Haut in Beziehung. Wenn die Hauptträgheitsachsen des Querschnittes in die Biegungsrichtung fallen, sind die beiden Schubspannungskomponenten nämlich bis auf eine willkürliche Funktion die partiellen Ableitungen einer »Spannungsfunktion« φ. Diese genügt der Differentialgleichung einer dünnen Haut, die einem veränderlichen Druck auszusetzen ist. Im Falle einer Ellipse, eines Rechtecks und eines Dreiecks kann die willkürliche Funktion so gewählt werden, daß die Spannungsfunktion φ auf der Randkurve des Querschnittes konstante Werte annimmt. Recht brauchbare Ausdrücke für φ lassen sich nach Ritz-Rayleigh aufstellen. Man schreibt die die Grenzbedingungen befriedigenden Ansätze für φ an und bestimmt ihre Beiwerte so, daß die potentielle Energie des auf der Membran lastenden Druckes und ihre Oberflächenenergie ein Minimum werde. Timoschenko vergleicht die so erhaltenen Werte der Spannung mit den aus den strengen Lösungen berechneten und findet eine sehr gute Uebereinstimmung. Bei dieser Gelegenheit stellt er einige Zahlen in den von St. Venant berechneten Tafeln für die Spannungsverteilung im rechteckigen Querschnitt richtig.

Zur **Bestimmung der Schlaghärte** eines Werkstoffes läßt G. Moreau (Journal de Physique, II. Ser. 6, P. 329—340, 1921) eine an einem dünnen Kupferdraht aufgehängte Stahlkugel wie ein Pendel gegen eine lotrecht gestellte Platte aus dem zu untersuchenden Stoff aufprallen und mißt die Fall- und die Rücksprunghöhe, ferner mittels eines ballistischen Galvanometers den Stromstoß eines durch den Aufhängedraht und den Versuchskörper während der Berührung hindurchgehenden Stromes. Aus der Beobachtung des Strommessers kann er entweder die Zeitdauer der Berührung oder den elektrischen Widerstand des Kontaktes bestimmen. Bei einer Auftreffgeschwindigkeit von 1 m/s findet er bei verschiedenen Stoffen für die Dauer der Berührung Zeiten von einer Zehntausendstel bis zu einer Fünfzigstel Sekunde. Die Berührungszeit setzt sich zusammen aus der Eindringungszeit τ_1 bis die Geschwindigkeit der Kugel von ihrem Anfangswert v bis Null abgenommen hat, der Rückfederungsdauer τ_2, während der sie von Null wieder auf v' zunimmt und den Zeiten, die zur Ausbildung und zur Unterbrechung des elektrischen Kontaktes noch ehe die Metalle sich berühren oder sich voneinander gänzlich getrennt haben, verstreichen. Um ein Maß für die Schlaghärte zu bilden, berechnet er die mittlere Schlagkraft während der Eindringungsdauer τ_1 mv/τ_1 (m Masse der Kugel) und dividiert sie durch die Hälfte der bleibenden Eindruckfläche. Diese Schlaghärte soll nach seinen Angaben unabhängig von der Auftreffgeschwindigkeit der Kugel sein.

A. Nádai. 200

KLEINE MITTEILUNGEN

Bemerkungen über eine besondere Art von Rechentafeln. Die allgemeine Form einer Gleichung mit drei Veränderlichen t, u, v, welche durch eine ausschließlich aus geradlinigen Skalen bestehende Rechentafel gelöst werden kann, ist

$$A\varphi + B\psi + C\chi + D\varphi\psi + G\varphi\chi + H\psi\chi + L = 0 \quad \ldots \quad (1),$$

wobei φ, ψ und χ Funktionen von t, u und v der Reihe nach sind und A, B usw. konstante Koeffizienten bedeuten. Diese Gleichung kann auf die Form einer Determinante überführt werden

$$\begin{vmatrix} 0 & \varphi & 1 \\ mD\psi + 1 & m\dfrac{B - mDL}{1 - mA}\psi & 1 \\ -mG\chi + 1 - mA & -mC\chi - mL & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2),$$

in welcher m durch die Bedingung

$$m^2 D(AC - GL) + m(GB - AH - CD) + H = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

bestimmt ist. Wird m komplex oder gleich $\frac{1}{A}$, so ist die Anwendung einer Rechentafel angegebener Art auf die Lösung von (1) ausgeschlossen. Ist dies nicht der Fall, so besteht die die Gl. (1) lösende Rechentafel aus drei Geraden, die in einem recht- oder schiefwinkeligen Koordinatensystem x, y durch die Gleichungen

1) $x = \vartheta$ $\quad y = \varphi$

2) $x = mD\psi + 1$ $\quad y = m\dfrac{B - mDL}{1 - mA}\psi$

3) $x = -mG\chi + 1 - mA$ $\quad y = -mC\chi - mL$

bestimmt sind. Die auf diese drei Geraden aufzutragenden Skalen hängen nur von der Gestalt der Funktionen φ, ψ, χ ab. Im Falle einer linearen Skalierung, d. h. $\varphi = t$, $\psi = u$, $\chi = v$, löst die Rechentafel eine Gleichung von der Form

$$At + Bu + Cv + Dtu + Gtv + Huv + L = 0 \quad \ldots \quad (4),$$

im Falle logarithmischer oder teilweise logarithmischer und teilweise linearer Skalierung entsprechende, aus Gl. (1) sich ergebende Gleichungsformen. Die Bedingung für die Lösbarkeit liegt in allen Fällen nur in der Gl. (3) für m.

Andere als die hier angegebenen Gleichungen sind nicht durch die einfache Grundoperation (d. h. Anlegen eines Lineals) auf nur geradlinigen und nur linearen oder logarith-

mischen Skalen lösbar. Will man andere Gleichungsformen mit diesen einfachen Mitteln behandeln, so kann es nur in der Weise geschehen, daß die Grundoperation noch einmal auf anderen Skalen wiederholt wird, die den schon einmal benutzten Funktionen entsprechen. Dieser Umstand ermöglicht gleichzeitig eine einfache und leichte Konstruktion der Tafel und führt zu einer größeren Uebersichtlichkeit des Rechnungsvorganges bei der Benutzung der Tafel.

Fügen wir den obigen Funktionen φ, ψ, χ zwei Hilfsfunktionen τ_1 und τ_2 zu, und bilden zwei Gleichungen von der Form (1), d. h.

$$A\tau_1 + B\psi + C\chi + D\tau_1\psi + G\tau_1\chi + H\psi\chi + L = 0 \quad \ldots \quad (5),$$

$$A'\tau_2 + B'\varphi + C'\chi + D'\tau_2\varphi + G'\tau_2\chi + H'\varphi\chi + L' = 0 \quad \ldots \quad (6),$$

die durch zwei einfache Rechentafeln gelöst werden können, und verbinden diese beiden Tafeln so, daß der Uebergang einer Beziehung $\tau_1 = f(\tau_2)$ entspricht, so löst die so entstehende Rechentafel eine Gleichung

$$-\frac{B\psi + C\chi + H\psi\chi + L}{A + D\psi + G\chi} = f\left(-\frac{B'\varphi + C'\chi + H'\varphi\chi + L'}{A' + D'\varphi + G'\chi}\right) \quad \ldots \quad (7).$$

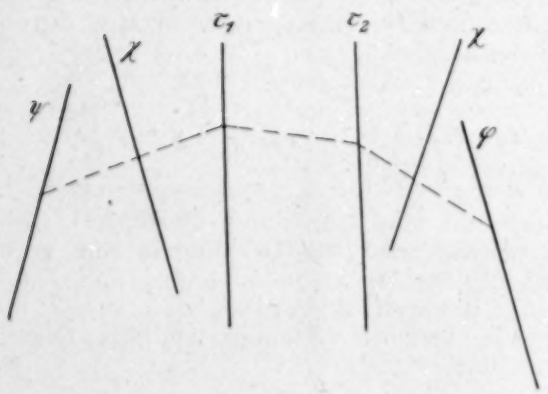


Abb. 1

Eine Tafel dieser Art enthält, wie schematisch in Abb. 1 angedeutet, die Skalen ψ, χ und τ_1, welche die Gl. (5), und die Skalen τ_2, χ, φ, welche die Gl. (6) lösen. Da die Skalierung sämtlicher Skalen nur von den Funktionen φ usw. abhängt und da die Funktion f beliebig ist, so gibt (7) eine allgemeine Form einer Gleichung an, die durch eine zweifache Rechentafel mit nur geradlinigen Skalen gelöst werden kann. Um aber den Uebergang von τ_1 auf τ_2 möglichst einfach durchführen zu können, muß die Funktion f auch nur einfache Form annehmen; z. B. kann $\tau_1 = \tau_2$, $\tau_1 = \log \tau_2$, $\tau_1 = \tau_2 + 1$ usw. gesetzt werden.

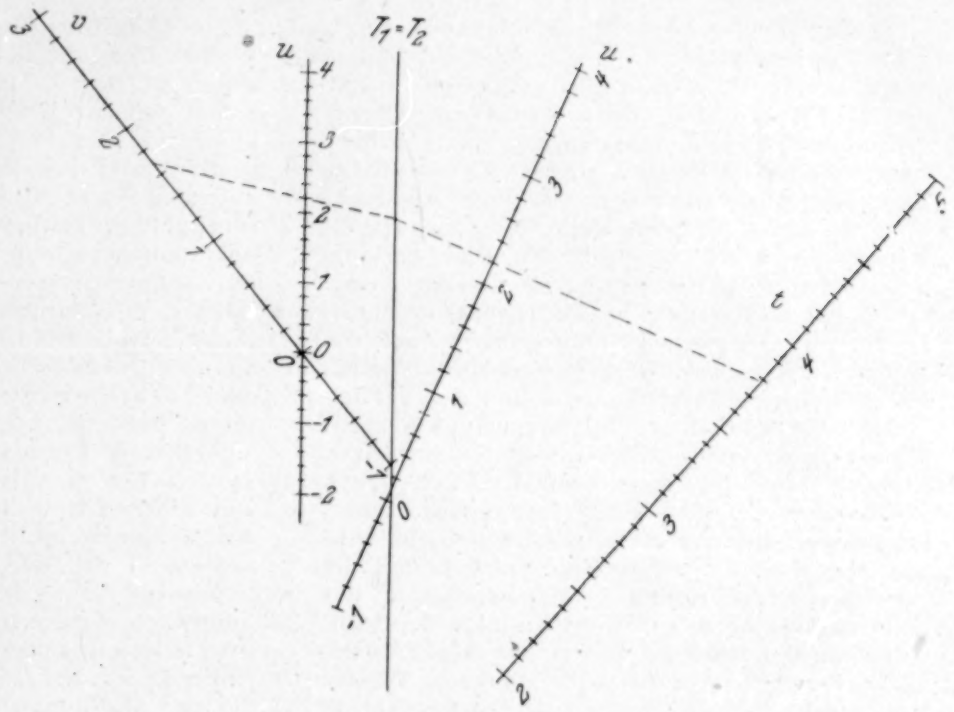


Abb. 2

Sind sämtliche Skalen der Tafel linear, d. h. $\varphi = t$, $\psi = u$, $\chi = v$, $\tau_1 = T_1$, $\tau_2 = T_2$, und ist der Uebergang durch $T_1 = T_2$ bestimmt, so kann die Gl. (7) bei entsprechend geänderter Bezeichnung der Koeffizienten auf die Form

$$t = -\frac{Au^2v + Du^2 + Euv + Hu + Lv + N}{Bu^2 + Cuv + Fu + Gv + M} \quad (8)$$

transformiert werden, und sie wird mit Hilfe von zwei einfachen Rechentafeln gelöst, welche den auf die Form (4) überführbaren Gleichungen

$$-T_1 = \frac{b_1u + c_1v + h_1vu + l_1}{a_1 + d_1u + g_1v},$$

$$-T_2 = \frac{b_2u + c_2v + h_2uv + l_2}{a_2 + d_2u + g_2v}$$

entsprechen.

Die Koeffizienten a_1, b_1 usw. und a_2, b_2 usw. sind zu berechnen aus einem System von 11 Gleichungen, die man erhält, wenn man die Gleichung $T_1 = T_2$ auf die Form (8) bringt und die entsprechenden Koeffizienten einander vergleicht. Eine allgemeine Lösung dieser Aufgabe wird hier nicht angegeben, da sie auf verwickelte Ausdrücke führt. Wenn aber einige von den Koeffizienten der Gl. (8) verschwinden, so wird die Lösung erleichtert; so z. B. können für eine Gleichung

$$t = -\frac{Au^2v + Du^2 + Euv + Hu + Lv}{Cvu + Fu + Gv} \quad (9)$$

die gesuchten Koeffizienten gleich gesetzt werden:

$$a_1 = 0,\ b_1 = D,\ c_1 = 0,\ d_1 = 1,$$
$$g_1 = -\frac{A}{D},\ h_1 = A,\ {}_1 = 0,$$
$$a_2 = \frac{H}{D},\ b_2 = E\frac{D}{A} - L,\ c_2 = G\frac{D}{A},\ d_2 = 1,$$
$$g_2 = \frac{F}{D},\ h_2 = C\frac{D}{A} - F,\ l_2 = L\frac{D}{A}.$$

Dabei ist in den entsprechenden Determinanten nach (2) der Faktor m zu setzen $m_1 = 1$, $m_2 =$ einer Wurzel von (3), wo a_2 statt A usw. gesetzt wird.

Anwendungsbeispiele.

1. Die Gleichung

$$t = \frac{u^2v + u^2 + 5{,}65\,uv + 3{,}5\,u + 1{,}25\,v}{0{,}75\,uv + 3\,u + 1{,}33\,v}$$

kann nach dem für die Gl. (9) angegebenen Verfahren gelöst werden. Den beiden Determinanten entspricht die Tafel Abb. 2. Für $u = 2{,}2$, $v = 1{,}7$ erhält man in der durch punktierte Linien angegebenen Weise den gesuchten Wert $t = 3{,}78$.

2. Die Gleichung

$$x^\alpha + px^\beta - q = 0$$

kann geschrieben werden in der Form

$$\log q = \log x^\alpha + \log\left(1 + \frac{p}{x^{\alpha-\beta}}\right).$$

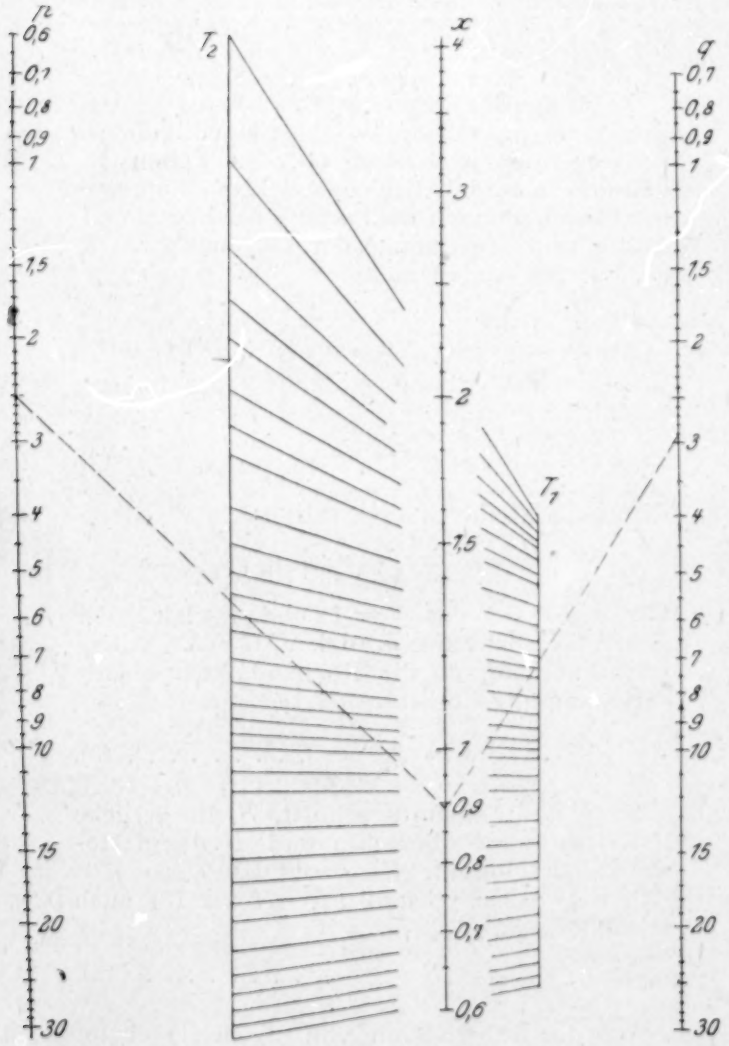


Abb. 3

Setzt man

$$\log T_1 = \log q - \log x^\alpha,$$
$$\log T_2 = \log p - \log x^{\alpha-\beta},$$

so ist der Uebergang zwischen den beiden Systemen gegeben durch

$$T_1 = T_2 + 1.$$

Nach diesen Beziehungen ist für $\alpha = 3$, $\beta = 2$ die Tafel (Abb. 3) konstruiert worden. Für gegebene Werte von p und q bestimmt man den Wert von x in folgender Weise: Verbindet man den Punkt q mit x, so erhält man auf der Skala T_2 einen nicht abzulesenden Wert T_2; von T_2 ausgehend, geht man längs den eingezeichneten Richtungslinien auf die Skala T_1 über, um den Punkt T_1 zu erhalten. Durch weitere Verbindung von T_1 mit x ergibt sich auf der q-Skala der Wert q. Findet man durch Versuch einen Wert x so, daß der gefundene Wert q mit dem gegebenen q übereinstimmt, so ist die Lösung der Gleichung $x^3 + px^2 - q$ durchgeführt. Der Gang der Rechnung ist auf einem Schema (Abb. 3) unten angedeutet. Die eingezeichneten Geraden entsprechen einem Fall $p = 2{,}5$, $q = 2{,}9$, für welchen sich $x = 0{,}885$ ergibt.

3. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens gelangt man im Falle einer vollständigen Gleichung 3ten Grades

$$x^3 + px^2 + qx - r = 0$$

zu den Ausdrücken

$$\log\frac{r}{q} = \log x + \log\left(1 + \frac{x^2}{r} + \frac{x}{r}p\right)$$
$$= \log x + \log A,$$
$$\log B = \log\frac{x^2}{r} + \log\left(1 + \frac{p}{x}\right) = \log\frac{x^2}{r} + \log C,$$
$$\log D = \log p - \log x,$$
$$A = B + 1,$$
$$C = D + 1.$$

Die entsprechende Tafel und der Gang der Rechnung ist schematisch in Abb. 4 angegeben. Die Lösung der Gleichung geschieht, wie im vorgehenden Falle, versuchsweise, d. h. man bestimmt für ein gewähltes x den Wert p $\left(\text{oder } \frac{r}{q}\right)$.

4. Die zur Berechnung von Hohlzylindern dienende Formel

$$r_a = r_i\sqrt{\frac{K + 0{,}6\,p}{K - 1{,}3\,p}},$$

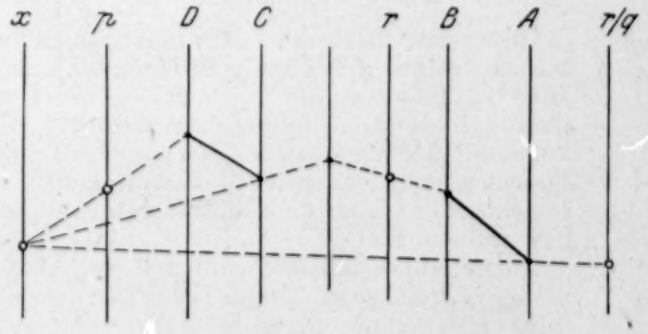


Abb. 4

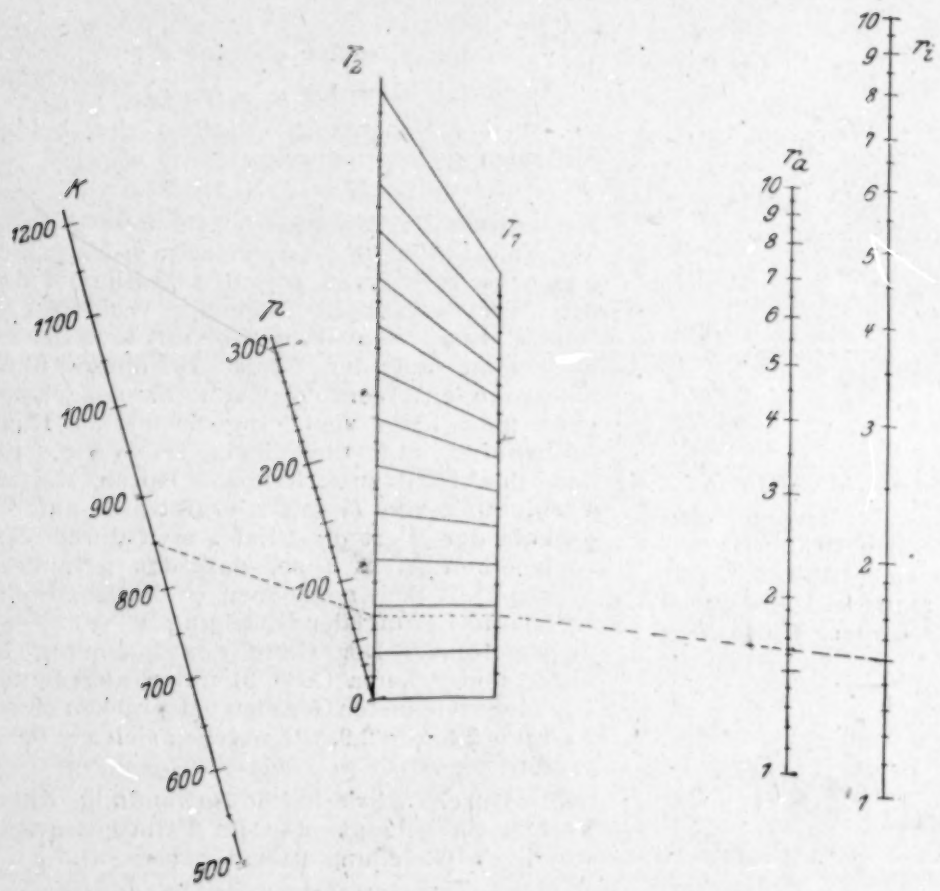


Abb. 5

in welcher bedeutet K = Beanspruchung des Materials in kg/cm², p = innerer Ueberdruck in kg/cm², r_i = innerer, i_a = äußerer Halbmesser des Zylinders, kann zerlegt werden in

$$T_1 = \frac{r_a}{r_i}, \qquad T_2 = \frac{K + 0{,}6\,p}{K - 1{,}3\,p},$$

so daß die Gleichung für den Uebergang wird $T_1 = \sqrt{T_2}$. Der Wert T_2 wird mit Hilfe von zwei linearen Skalen K und p gefunden; die Skalen für T_1, r_a, r_i sind logarithmisch. Es ist also in diesem Falle $\tau_2 = T_2$, $\tau_1 = \log T_2$ und $\tau_1 = \frac{1}{2}\log \tau_2$, so daß die zum Uebergang dienenden Richtungslinien leicht durch Verbindung der entsprechenden Punkte der logarithmischen Skala T_1 und der linearen Skala T_2 konstruiert werden können (Abb. 5). Für $K = 850$, $p = 80$, $r_i = 15$ ergibt sich z. B. $r_a = 16{,}3$. J. Hak. 207

Gleichgewichtsform eines elastisch dehnbaren Fadens (elastische Kettenlinie). Als »gemeine Kettenlinie« bezeichnet man bekanntlich die Gleichgewichtsform eines vollkommen biegsam gedachten unelastischen Fadens gleichen Querschnittes aus homogenem Material, der unter dem Einfluß seines Eigengewichtes steht.

Dieser Kurve läßt sich nun mit verhältnismäßig einfacher mathematischer Gedankenfolge eine andere, mit ihr sehr verwandte Linie gegenüberstellen, indem man die elastische Deformation der Fadenelemente in der Längsachse des Fadens berücksichtigt. Der aus dieser Annahme hervorgehenden neuen Kurve, der wir zur Unterscheidung von der gemeinen Kettenlinie den Namen »Elastische Kettenlinie« geben wollen, dürfte, wie später angedeutet werden wird, in der Technik eine gewisse Bedeutung nicht abgesprochen werden können. Ihre Gleichung soll daher hier entwickelt werden.

I. Gleichung der elastischen Kettenlinie.

Ist E die Elastizitätszahl des Materials und s die Normalspannung in einem beliebigen Fadenpunkt P_i, so ist die auf das betreffende Fadenelement dl entfallende Längenänderung (Abb. 1 und 2):

$$d\lambda = \frac{s}{E}\,dl \quad . \quad (1).$$

Faßt man im Sinne der Abb. 2 P_i als Knotenpunkt einer Gliederkette mit vollkommen reibungslosen Gelenken auf, so gelten für diesen die beiden Gleichgewichtsbedingungen der Ebene, wonach die Summe der Horizontalkräfte und die Summe der Vertikalkräfte für sich verschwinden müssen

Die erste Bedingung gibt:

$$-s\cos\varphi + (s + ds)\cos(\varphi + d\varphi) = 0$$

oder nach Weglassung der Glieder höherer Kleinheitsordnung:

$$0 = ds\cos\varphi - s\sin\varphi\,d\varphi \text{ bezw. } \frac{ds}{s} = \operatorname{tg}\varphi\,d\varphi \quad (2).$$

Daraus folgt durch Integration:

$$\ln s = \int_0^{\varphi} \operatorname{tg}\varphi\,d\varphi + \ln C.$$

Für $\varphi = 0$ ist $\cos\varphi = 1$ und s gleich der Horizontalspannung h, daher $C = h$. Allgemein hat man, da die Horizontalkomponente der Spannung konstant h ist:

$$s = \frac{h}{\cos\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Ist F der Fadenquerschnitt, S die örtliche Kraft in der Fadenachse und H deren Horizontalkomponente (Horizontalzug), so läßt sich wegen $Fs = S$ und $Fh = H$ für (3) auch schreiben:

$$S = \frac{H}{\cos\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a).$$

Aus der Substitution von (3) in (1) ergibt sich:

$$\frac{d\lambda}{dl} = \frac{h}{E}\frac{1}{\cos\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots (4).$$

Aus der zweiten Gleichgewichtsbedingung folgt, wenn γ das spezifische Gewicht des Fadenmaterials bedeutet:

$$-s\sin\varphi + (s+ds)\sin(\varphi+d\varphi) + \gamma\, dl = 0,$$

oder nach Weglassung der Glieder höherer Ordnung:

$$0 = ds\sin\varphi + s\cos\varphi\, d\varphi + \gamma\, dl,$$

woraus mit Rücksicht auf (2) und (3), d. i. wegen

$$\frac{ds}{d\varphi} = s\,\mathrm{tg}\,\varphi = h\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi},\quad s\cos\varphi = h$$

nach einfacher Rechnung sich ergibt:

$$\frac{dl}{d\varphi} = -\frac{h}{\gamma}\frac{1}{\cos^2\varphi} \quad \ldots (5).$$

Durch die beiden Differentialbeziehungen (4) und (5) ist die Gleichgewichtsform des elastischen Fadens analytisch definiert. Multipliziert man aber (4) mit (5), so wird

$$\frac{d\lambda}{dl}\frac{dl}{d\varphi} = \frac{d\lambda}{d\varphi} = -\frac{h^2}{\gamma E}\frac{1}{\cos^3\varphi} \quad (6).$$

An Stelle von (4) tritt so eine neue Differentialgleichung, in der l und φ statt λ und l vorkommen. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{h}{\gamma} = k_1;\quad \frac{h^2}{\gamma E} = k_2;\quad \frac{h}{E} = k_3 \quad (7),$$

wobei k_1 und k_2 die Dimensionen einer Länge haben, während k_3 eine unbenannte Zahl ist, so erhält man aus (5) und (6)

$$dl = -k_1\frac{1}{\cos^2\varphi}\,d\varphi \quad . \quad (5\,a)$$

$$d\lambda = -k_2\frac{1}{\cos^3\varphi}\,d\varphi \quad . \quad (6\,a)$$

An Stelle von l und λ lassen sich leicht die rechtwinkligen Koordinaten x und y einführen, denn es ist:

$$dx = (dl + d\lambda)\cos\varphi = -k_1\frac{d\varphi}{\cos\varphi} - k_2\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \quad (8)$$

$$dy = (dl+d\lambda)\sin\varphi$$

$$= -k_1\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}d\varphi - k_2\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}d\varphi \quad \ldots (9).$$

Das allgemeine Integral von (8) ist:

$$x = -k_1\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) - k_2\,\mathrm{tg}\,\varphi + C_x,$$

woraus sich für das in Abb. 1 dargestellte, durch die Spannweite $2W$, die Pfeilhöhe f und die Fadenlänge $2l$ (im spannungslosen Zustand) definierte Beispiel $C_x = W$ ergibt, so daß man für die vom linken Auflager aus gezählte Abszisse

$$x = W - k_1\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) k_2\,\mathrm{tg}\,\varphi \quad (\mathrm{I\,a})$$

erhält und für $\varphi = \varphi_1 =$ dem Auflagerwinkel

$$W = k_1\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_1}{2}\right) + k_2\,\mathrm{tg}\,\varphi_1 \quad (\mathrm{I\,b})$$

wird.

In ähnlicher Weise erhält man aus (9)

$$y = -k_1\frac{1}{\cos\varphi} - k_2\frac{1}{2\cos^2\varphi} + C_y,$$

wobei für Abb. 1 $C_y = f + k_1 + k_2$ wird, wes-

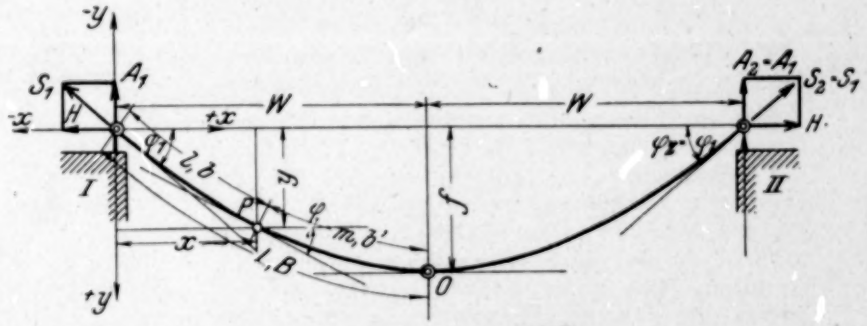


Abb. 1

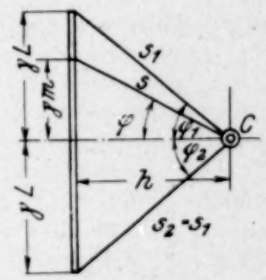


Abb. 1a

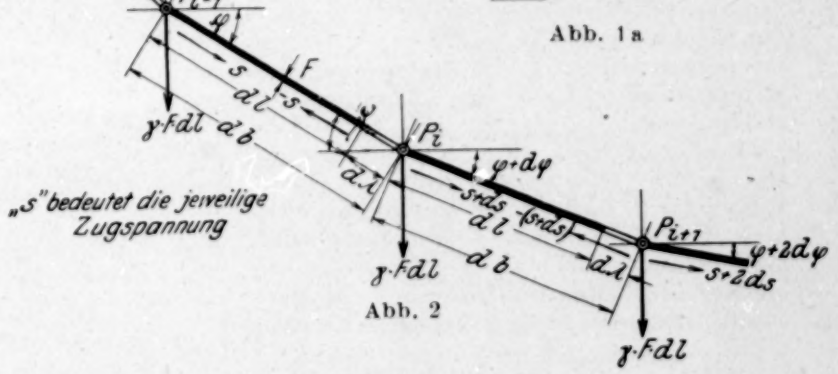


Abb. 2

halb die vom Niveau des linken Auflagerpunktes nach unten als positiv gezählte Ordinate den Wert

$$y = f + k_1\left(1 - \frac{1}{\cos\varphi}\right) + k_2\left(1 - \frac{1}{\cos^2\varphi}\right) \quad (\mathrm{II\,a})$$

hat und die Pfeilhöhe sich mit

$$f = k_1\left(\frac{1}{\cos\varphi_1} - 1\right) + k_2\left(\frac{1}{2\cos^2\varphi_1} - 1\right) \quad (\mathrm{II\,b})$$

ergibt.

Damit ist die Gleichung der elastischen Kettenlinie in aller Strenge aufgestellt und zwar zunächst so, daß die Koordinaten x und y als Funktionen des Parameters φ erscheinen.

Außer den Koordinaten x und y und deren Sonderwerten W und f ist noch eine weitere Größe von Interesse, nämlich die Längenänderung (»Reckung«) eines beliebigen Kurvenstückes gegenüber der spannungslosen (»starren«) Länge.

Die Integration von (6 a) gibt allgemein:

$$\lambda = -\frac{k_2}{2}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{k_2}{2}\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) + C_\lambda.$$

Speziell für die in Abb. 1 gezeichnete Kurve ist $C\lambda = \Delta$, d. i. gleich der gesamten Reckung vom linken Auflager I bis zur Kurvenmitte (Scheitel 0). Dabei wird die Reckung von I bis zu einem beliebigen Punkt:

$$\lambda = \Delta - \frac{k_2}{2}\frac{\sin\varphi_1}{\cos^2\varphi_1} - \frac{k_2}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_1}{2}\right) \quad \text{(IIIa)}$$

und

$$\Delta = \frac{k_2}{2}\frac{\sin\varphi_1}{\cos^3\varphi_1} + \frac{k_2}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_1}{2}\right) \quad \text{(IIIb)}.$$

II. Umformung und mechanische Deutung der analytischen Ergebnisse.

Die im Vorstehenden gewonnenen Formeln für die Spannweite $2W$ und die Pfeilhöhe f der elastischen Kettenlinie, sowie für die elastische Längenänderung (Reckung) Δ des Fadens sind in allen Fällen, in denen der Winkel φ als Angabe vorliegt, sofort anwendbar. Die verschiedenen technischen Aufgaben, für welche die Gleichung der elastischen Kettenlinie in Betracht kommt, erfordern aber je nach der Gruppierung der gegebenen und der gesuchten Bestimmungsstücke Umformungen der in den Ausdrücken (I) bis (III) festgehaltenen analytischen Beziehungen. Die durch den Zweck der jeweils vorliegenden speziellen Aufgabe bestimmte Umformung geschieht bei der elastischen Kettenlinie ganz analog wie bei der gemeinen Kettenlinie und es ist auch hier möglich entweder an Stelle des Winkels φ die Bogenlänge l als Parameter zu verwenden oder die Kurvenordinaten als Exponentialfunktion der Abszissen darzustellen, usw.

Hier soll nur die Transformation der Gl. (I) bis (III) vom Parameter φ auf den Parameter l bzw. L (Bogenlänge) kurz behandelt werden, da in dieser Darstellung der Unterschied zwischen der gemeinen und der elastischen Kettenlinie am augenfälligsten ist.

Mit Hilfe der goniometrischen Beziehung

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}\varphi + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi} \quad (10)$$

und des aus der Abb. 1a zu entnehmenden Zusammenhanges

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\gamma L}{h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11),$$

sowie auf die in (7) angegebene Bedeutung der Konstanten k_1, k_2, k_3 erhält man aus (Ib), (IIb), (IIIb):

$$W = \frac{h}{\gamma}\ln\frac{\gamma L+\sqrt{h^2+\gamma^2L^2}}{h} + \frac{h}{E}L \quad \text{(IV)},$$

$$f = \frac{1}{\gamma}\left(\sqrt{h^2+\gamma^2L^2}-h\right) + \frac{\gamma}{2E}L^2 \quad \text{(V)},$$

$$\Delta = \frac{L}{2E}\sqrt{h^2+\gamma^2L^2} + \frac{h^2}{2\gamma E}\ln\frac{\gamma L+\sqrt{h^2+\gamma^2L^2}}{h} \quad \ldots \quad \text{(VI)}.$$

In den Formeln (IV) und (V) sind die ersten Glieder rechts genau die gleichen wie bei der gemeinen Kettenlinie, während die letzten Addenden jene Zusatzglieder bedeuten, die man an die für die gemeine Kettenlinie geltenden Werte der Spannweite bzw. Pfeilhöhe anfügen muß, um jene der elastischen Kettenlinie zu erhalten. Die Formel (VI) besteht natürlich zur Gänze nur bei der elastischen Kettenlinie.

Die in (IV) und (V) auftretenden Zusatzglieder, die wir auch sinngemäß als »elastische Korrekturen« bezeichnen können, haben ebenso wie die in Formel (VI) definierte Längenänderung (Reckung) $\Delta = \varepsilon L$ anschauliche Bedeutung. Wenn wir unter $2\overline{W}$ und $\overline{f}$ die Spannweite bzw. die Pfeilhöhe der zugehörigen gemeinen Kettenlinie verstehen, so ist $\varepsilon\overline{W} = \frac{h}{E}L =$ der elastischen Längenänderung eines unter der Spannung h stehenden Fadens von der Länge L; $\varepsilon\overline{f} = \frac{\gamma}{2E}L^2 =$ der elastischen Längenänderung eines frei herabhängenden Fadens infolge der Wirkung des Eigengewichtes.

Endlich kann die Reckung Δ, da die Spannung am Auflager $s_1 = \sqrt{h^2+\gamma^2L^2}$ und $\overline{W} = \frac{h}{\gamma}\ln\frac{\gamma L+\sqrt{h^2+\gamma^2L^2}}{h}$ ist, auch geschrieben werden:

$$\Delta = \frac{1}{2}\frac{L}{E}s_1 + \frac{1}{2}\frac{h}{E}\overline{W} = \Delta_1 + \Delta_2,$$

woraus man erkennt, daß Δ_1 die elastische Längenänderung eines Fadens von der Länge L ist, welcher unter der Wirkung einer Zugspannung s_1 steht, während Δ_2 die elastische Längenänderung eines durch eine Zugspannung h beanspruchten Fadens von der Länge $\overline{W}$ bedeutet.

III. Bemerkung über die Anwendung der vorstehenden Entwicklungen.

Die hier der Kürze halber nur für den einfachsten Fall gleich hoher Auflager entwickelten Formeln können unschwer auf ungleich hohe Auflager erweitert werden. Ebenso lassen sich übersichtliche Formeln für den Fall aufstellen, daß der elastisch dehnbare Faden durch örtlich fixierte oder durch bewegliche Einzelgewichte (etwa Seilbahnwagen) belastet ist.

Damit ist die Möglichkeit gegeben, die theoretischen Ergebnisse in der technischen Praxis anzuwenden, und zwar dürfte sich zunächst in der Geodäsie hierzu Gelegenheit bieten. Vergl. hierzu: Regierungsbaumeister Schuster, Zürich, »Längenmessung der Brücke über den Firth of Forth«, Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, 1907, S. 506, auf welche Veröffentlichung ich im Jahre 1917 durch Herrn Prof. A. F. Zschetzsche in Wien aufmerksam gemacht wurde. Neuerdings hat auch Herr Prof. R. Findeis in Wien mir gegenüber die Ausgestaltung der hier wiedergegebenen strengen Theorie der Kettenlinie für direkte Längenmessung mittels Drähten als wünschenswert hingestellt.

Wien. F. Skrobanek. 208

BUCHBESPRECHUNGEN

Dipl.-Ing. CONSTANTIN **WEBER,** Die Lehre der Drehungsfestigkeit. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 249. Verlag des Vereines deutscher Ingenieure, Berlin 1921. 70 S.

Die Ergebnisse der theoretischen Mechanik vermögen nur dann ihre volle Bedeutung auch in technisch-wirtschaftlicher Hinsicht zu erweisen, wenn es gelingt, sie jenen Personen in einer brauchbaren Gestalt bekannt zu machen, die sie unmittelbar konstruktiv zur Anwendung bringen können. Dies trifft insbesondere für die Ergebnisse der neueren Elastizitäts- und Festigkeitslehre zu, die die Einsicht in das Kräftespiel in den einzelnen Konstruktionsteilen vertiefen und durch Erzielung einer vollen Ausnutzung aller Teile das in technischer und wirtschaftlicher Hinsicht gleich schädliche Ueberdimensionieren vermeiden sollen. Immerhin ist es erstaunlich, wie lange Zeit es braucht, bis theoretisch gefundene Ergebnisse sich in der Praxis eingebürgert haben und für alle praktischen Bedürfnisse ausgebaut sind. Nicht selten begegnet man dann voreiligen Verallgemeinerungen empirischer Formeln, die späterhin zu Widersprüchen mit ausgeführten Versuchen führen und dadurch dem in manchen Kreisen der Praktiker noch bestehenden Mißtrauen gegen die »Theorie« neue Nahrung geben. Ein besonders augenfälliges Beispiel dafür bildet die »Lehre von der Drehungsfestigkeit« (müssen wir in unserem demokratischen Zeitalter auch auf dieses »von« verzichten? — der Titel ist übrigens irreführend und trifft nicht den Inhalt), deren theoretische Grundlagen zwar seit mehr als 70 Jahren fertig vorliegen, die aber erst in der allerjüngsten Zeit für die technisch wichtigen Walzeisenquerschnitte zu einigermaßen gesicherten Formeln geführt haben. Was Wunder, wenn heute noch in sehr verbreiteten Ingenieur-Handbüchern Formeln empfohlen werden, die vielfach ganz unzutreffend sind?

Angesichts dieser Tatsache ist die Frage nicht von der Hand zu weisen, ob die theoretischen Ergebnisse immer in einer solchen Form und mit allen vor unzulässigen Verallgemeinerungen schützenden Einschränkungen dargeboten werden, die sie für den ausführenden Ingenieur tauglich machen. Trotz mancher schätzenswerten Ansätze und aller Fortschritte, die in der Ordnung des Tatsachenmaterials erreicht wurden, glauben wir diese Frage keineswegs bedingungslos bejahen zu dürfen, es scheint vielmehr notwendig, die Frage der Nutzbarmachung der gesicherten theoretischen Ergebnisse fortgesetzt im Auge zu behalten und durch besondere Einrichtungen zu fördern. Uebersichtlich und klar geschriebene Bearbeitungen von Sondergebieten mit Angabe der Bedeutung der einzelnen Ergebnisse und Hinweis auf die Einschränkungen werden zu einer solchen Nutzbarmachung vor allem dienlich sein können.

Das vorliegende Heft der Forschungsarbeiten enthält eine ausführliche Darstellung des Torsionsproblems für prismatische Körper mit verschiedenen Querschnitten, insbesondere bringt sie für die technisch wichtigen »Profile« (streifenartige Querschnitte) eine Reihe angenäherter Formeln, über deren Uebereinstimmung mit ausgeführten Versuchen darin allerdings noch keine Angaben gemacht werden, da zuverlässiges Versuchsmaterial nur in sehr geringem Ausmaße vorhanden ist und das Heft vor Veröffentlichung der neuen Versuche von A. Föppl erschienen ist. Im ersten Abschnitt werden in anschaulicher Weise die Grundgleichungen entwickelt, der zweite enthält deren Anwendung für die exakt behandelbaren Sonderfälle, wie Kreis, Kreisring, Ellipse, gleichseitiges Dreieck, Rechteck, Kreis mit Halbkreisrille und mit scharfer Einkerbung am Umfange u. dergl.; dabei ist als neu auf die bisher auf direkte Weise nicht behandelten Vielecke mit geraden Seiten hinzuweisen, für die der Verfasser einen auch für die numerische Berechnung brauchbaren, durch Erweiterung der Saint-Venanschen Lösung für das Quadrat gefundenen Reihenansatz verwendet.

Im dritten Abschnitt werden die ringförmigen und streifenartigen Querschnitte behandelt, unter die auch die technisch wichtigen Profile fallen. Die Hilfsmittel hierfür sind im wesentlichen die schon von A. Föppl für diese Fälle gegebenen Formeln für das Torsionsmoment und die Schubspannung.

Durch Einführung von mittleren Spannungslinien, deren »theoretische Längen« l_i passend abgeschätzt werden, gelangt der Verfasser für »streifenartige« Querschnitte von konstanter Breite s zu der angenäherten Formel für das Torsionsmoment

$$M \sim \frac{1}{3} G \vartheta l_i s^3 ,$$

die für mehrere Beispiele wie **L**-, **T**-, **+**-, **Z**-, **⅂**- und **[**-Eisen ausgewertet wird. (Nach denselben Erwägungen wird auch eine Formel für Streifenquerschnitte mit veränderlicher Breite aufgestellt.) Für zusammengesetzte Streifenquerschnitte mit verschiedenen Breiten der einzelnen Streifen ist die Formel durch die folgende zu ersetzen

$$M \sim \frac{1}{3} G \vartheta \Sigma l_i s^3$$

somit das Torsionsmoment durch die Summe der Torsionsmomente für die einzelnen Streifen dargestellt. Die neueren Versuche von A. Föppl haben gezeigt, daß dieses Additionsgesetz i. a. nicht zutrifft und durch Hinzufügung von Faktoren berichtigt werden muß. In verstärktem Maße dürfte sich dieser Umstand bei den zusammengesetzten Querschnitten von der Art der Schienenprofile geltend machen, die der Verfasser, ohne auf einschlägige Versuche Bezug nehmen zu können, auf dieselbe Weise untersucht.

Leider beeinträchtigt das Fehlen des Vergleiches der Formeln mit den Ergebnissen ausgeführter Versuche wesentlich den Wert des vorliegenden Heftes, dem am Ende eine übersichtliche Zusammenstellung der erhaltenen Formeln beigegeben ist; an Lesbarkeit und Uebersichtlichkeit erfüllt es jedoch die eingangs an derartige Darstellungen gestellten Forderungen im weitem Ausmaße.

Von Druckfehlern sind mir bei der Durchsicht folgende Stellen aufgefallen:

S. 44 Z. 3 v. u. soll heißen

$$\frac{\varrho_a^2}{2} - \frac{\varrho_i^2}{2} = (\varrho_a - \varrho_i)\frac{\varrho_a + \varrho_i}{2} = s_a \varrho_m.$$

S. 46 in Z. 2 v. o. soll es heißen

$$F_i / F_a = 0{,}444.$$

Die Uebersicht in § 2 ist nicht klar, z. B. bezügl. IV., da die Schubspannungen in I doch ebenfalls senkrecht zur z-Achse sind. In Seite 10, 3. Absatz wäre auf den Fall hinzuweisen, daß die innere Spannungslinie auch aus mehreren Punkten bestehen kann, ein Fall, der gerade für zusammengesetzte Querschnitte von Bedeutung ist.

Prag, April 1922. Pöschl. 179

Dr.-Ing. GEORG **WELTER,** Elastizität und Festigkeit von Spezialstählen bei hohen Temperaturen. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 230.

Die fortwährend wachsenden Anforderungen, die von der Technik an die Güte der Konstruktionsmaterialien gestellt werden, erfordern immer wieder neue Versuchsreihen über die Festigkeit der verschiedenen, in der Praxis gebrauchten Materialien. Die Untersuchung über den Einfluß der Temperatur auf die Festigkeitseigenschaften von Spezialstählen bildet den Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Nach Ueberwindung großer versuchstechnischer Schwierigkeiten ist es dem Verfasser gelungen, einen Apparat zu bauen, mit dem er eine Reihe neuer, für die Beurteilung der untersuchten Stähle wichtiger Versuche anstellen konnte. So wurden für die verschiedenen Stahlsorten die bisher noch nicht bekannten bleibenden Dehnungen sowie die Elastizitätsgrenze nicht nur bei Zimmertemperatur, sondern auch bei höheren Temperaturen bestimmt. Es zeigte sich dabei, daß die Festigkeit der Kohlenstoffstähle bei etwa 200° auf einen Höchstwert steigt, der erheblich über der Festigkeit bei Zimmertemperatur liegt. Bei noch höherer Temperatur wird die Fließgrenze um so eher erreicht, je höher die Temperatur ist. Der Einfluß des Mangangehaltes bei hohen Temperaturen auf die Dehnbarkeit und die Festigkeit der Kohlenstoffstähle ist gering. Von den Spezialstählen, die untersucht worden sind und die zumeist die gleichen Eigenschaften wie die Kohlenstoffstähle aufweisen, verdient die Beobachtung, daß die Chrom-Wolfram-Stähle bis 400° annähernd die gleiche Festigkeit behalten, besondere Beachtung. Die Arbeit verdient als einer von den vielen Grundpfeilern, die das Gebäude der Festigkeitslehre tragen, Anerkennung und sie weckt zugleich den Wunsch nach weiteren Versuchsreihen, die von anderen Gesichtspunkten aus die Materialgüte von Spezialstählen untersuchen. L. Föppl. 168

Dr. JOSEF **GEITLER,** Elektromagnetische Schwingungen und Wellen. Zweite vermehrte Auflage. Braunschweig 1921 (Sammlung Wissenschaft).

Nach einem einleitenden Kapitel über die Fernwirkungstheorien, wie sie sich im Anschluß an Newton, aber wohl entgegen dessen eigenen tieferen Ansichten, gebildet haben, behandelt das Buch die Theorie der vermittelten Fernwirkungen bis zu ihrer praktischen Entwicklung, der drahtlosen Telegraphie. In klarer Form werden die Gedanken von Faraday, Maxwell, Hertz und dessen klassische Experimente dargestellt. Die nächsten Abschnitte sind im wesentlichen der Theorie der Strahlung gewidmet, wie sie im Anschluß an Maxwell und Hertz ausgebaut wurde. Die Zusammenhänge zwischen der elektromagnetischen und der optischen Strahlung, die Ausbreitung der Strahlung mit Rücksicht auf Form und Lage des Erregers, sowie insbesondere der Einfluß von führenden Drähten und leitenden Ebenen werden besprochen. Der letzte Abschnitt endlich stellt die weiteren großen Schritte dar, die noch zu überwinden waren, bis aus der wissenschaftlichen Erkenntnis die technische Durchführung der drahtlosen Telegraphie entstand, die hauptsächlich aus der Auffindung der Vorteile vertikalstehender Antennen und der Herstellung schwach gedämpfter elektrischer Schwingungen ihren Anstoß empfing. Das Buch führt so bis zur neuesten Entwicklung, die durch die Verwendung der Elektronenröhren gekennzeichnet ist.

Es gehört zu den erfreulichen Erscheinungen, die überall die klare Entwicklung theoretischer Auffassungen erkennen lassen, ohne dabei etwa mit mathematischen Darstellungen belastet zu sein, deren wesentliche Züge jeder Fachmann dennoch daraus erkennen kann. Es kann daher sowohl für den mit den physikalischen Grundlagen vertrauten Theoretiker, als auch den reinen Physiker und den theoretisch interessierten Techniker als kurze Einführung in das Gebiet der elektromagnetischen Schwingungen empfohlen werden.

F. Noether. 152

Dr. GERHARD **KOWALEWSKI,** o. Prof. der reinen Mathematik a. d. Techn. Hochsch. Dresden. Die Klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen. Ein Lehr- und Uebungsbuch für Studierende zur Einführung in die Infinitesimalrechnung. 2. Auflage. Mit 109 Fig. im Text. Leipzig 1921. 342 S.

Wie aus dem Untertitel hervorgeht, deckt sich das Buch inhaltlich im Wesentlichen mit üblichen Lehrbüchern der Differential- und

Integralrechnung. Der Verfasser bestrebt sich dabei durch anschauliche Behandlung dem Leser die Ueberwindung der begrifflichen Schwierigkeiten zu erleichtern, die ihm das Eindringen in die strengen Methoden des Gebietes zu erschweren pflegen.

Man wird allen den Beurteilern und Lesern der ersten Auflage Recht geben dürfen, die in diesem Buche eine pädagogische Meisterleistung erblicken, die dem Anfänger durch eingestreute historische Angaben über manche Schwierigkeit spielend hinweg hilft. Nach dem biogenetischen Grundgesetz muß ja eine historische Behandlung am ehesten all den Schwierigkeiten gerecht werden, die sich auch vor dem Anfänger auftürmen. Zum Vorwurf aber möchte ich es dem Verf. machen, daß er sich durch M. Cantors bekannte Exzerptensammlung »Geschichte der Mathematik« (4 Bde. Leipzig, Teubner) hat verleiten lassen, mit seinen historischen Bemerkungen im achtzehnten Jahrhundert stecken zu bleiben. Denn recht spärlich nur sind des Verf. historische Bemerkungen aus dem neunzehnten Jahrhundert. Bedenkt man aber, daß dies gerade das kritische Jahrhundert der begrifflichen Fassung des vorher mehr Geahnten und Geschauten als Erkannten war, so wird man darin doch einen Mangel erblicken müssen, dessen Beseitigung in einer späteren Auflage das Buch in seinem Wert noch erheblich steigern könnte. Gerade so schwierige Begriffsbildungen, wie die gleichmäßige Stetigkeit bedürfen durchaus der Belebung und es sollte vermieden werden, im Leser einen so schiefen Eindruck zu erwecken, als ob Cauchy damit schon im Reinen gewesen wäre. Die Erzeugung beliebiger Summenwerte durch Umordnung der Glieder einer bedingt konvergenten Reihe sowie die Summierung durch arithmetische Mittel hätte Gelegenheit geboten, dem Leser zu zeigen, daß es im neunzehnten Jahrhundert auch nach Gauß und außer Weierstrass, Seidel und Mertens noch bedeutende Leute gegeben hat. Und wenn man Mertens bei dem Cauchyschen Multiplikationssatz erwähnt, so hätte es doch angesichts des Beispiels von S. 83 nahe gelegen, auch des Abelschen Multiplikationssatzes zu gedenken. Sind auch des Verf. Anmerkungen aus alten Jahrhunderten sehr sorgfältig, so wird es doch der angewandte Mathematiker vermissen, daß die Kenntnisse, die doch damals jeder von den Anwendungen besaß, und der Einfluß, den solche Kenntnis auf die Entwicklung der Mathematik hatte, in des Verf. Darstellung so wenig zur Geltung kommt. So könnte man sich überhaupt denken, daß die historischen Bemerkungen enger mit dem Wesen der Darstellung verwoben würden, statt nur so als Mäntelchen die Darstellung vor allzu frostiger Begriffskälte zu schützen. So glaube ich, daß des Verf. Absicht in der Durchführung noch mancher Steigerung fähig sein könnte, die das an sich schon so schöne Buch zu einem noch weit schöneren gestalten müßte.

Bieberbach. 176

W. **LIETZMANN,** Direktor der Oberrealschule in Göttingen. Erkenntnislehre im mathematischen Unterricht der Oberklassen. (Philosophisch-pädagogische Bibliothek, Bd. 9.) Charlottenburg, Mundus Verlagsanstalt 1921. 68 S.

Der bekannte Verfasser gibt hier eine angenehm lesbare Darstellung derjenigen logischen und erkenntnistheoretischen Lehren, die sich nach seinen eigenen Erfahrungen zwanglos dem mathematischen Unterricht auf den höheren Klassen einfügen lassen. Um solche Ziele zu erreichen, ist im Rahmen des Unterrichtes nur etwas kritischer Geist nötig, ein wenig Reflektieren darüber, was eigentlich die Methode der Mathematik ist. Leicht wird man hieran den Schülern Aufklärung über die logische Lehre vom Schließen geben können. Das Studium naheliegender Trugschlüsse gibt Gelegenheit, die Rolle von Anschauung und Denken gegeneinander abzugrenzen und ermöglicht es so, den Wert exakten Denkens im Allgemeinen herausstellen zu können. Der geometrische Unterricht gibt weiteren Anlaß, Mathematik und Wirklichkeit in Beziehung zu setzen. Dabei wird sich Gelegenheit bieten, — namentlich dann, wenn der Physikunterricht mit dem mathematischen Hand in Hand geht —, das Wesen einer naturwissenschaftlichen Theorie herauszuarbeiten, und damit ist man ja mitten in der Erkenntnistheorie. So rechtfertigt die Schrift die Meinung derer, die ein Hineinarbeiten philosophischer Unterweisung in den Unterricht der einzelnen Fächer einem besonderen philosophischen Unterricht vorziehen. Denn tatsächlich ist ja Philosophie ohne positives Wissen ein Unding. Die Schrift gibt damit auch denjenigen Recht, die aus dieser Auffassung heraus verlangen, daß jeder künftige Lehrer der Mathematik auch über die Stellung seiner Wissenschaft zur Philosophie einige Klarheit besitze. Besonderen erzieherischen Wert hat es, solche Art Philosophie zu treiben, namentlich auch in unserer heutigen Zeit, wo der Wert nüchternen Denkens nicht eben hoch im Kurse steht, in einer Zeit, die gar zu oft Phantasie und Wirklichkeit verwechselt. Bieberbach. 197

Dr. R. **v. MISES,** Professor an der Universität Berlin. Fluglehre. Vorträge über Theorie und Berechnung der Flugzeuge in elementarer Darstellung. Zweite, durchgesehene Auflage. Mit 113 Textabbildungen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1922. VII + 210. (Selbstanzeige).

Das jetzt in zweiter Auflage vorliegende Buch wendet sich an alle, »die aus Beruf oder Neigung die mechanischen Grundlagen kennen zu lernen wünschen, auf denen unser heutiges Flugwesen ruht, ohne dabei in technischen Dingen über mehr als gute Schulbildung zu verfügen. Es sind daher alle Ueberlegungen und Untersuchungen fortgeblieben, zu deren Durchführung höhere mathematische Hilfsmittel erforderlich wären. Dem Ingenieur, der sich der Flugtechnik zuwenden

will, mag das Buch als erste Einführung dienen, dem Flieger oder dem im Flugdienst tätigen Praktiker als theoretische Ergänzung zu selbstgewonnenen Anschauungen und Erfahrungen.«

Nach einem kurzen geschichtlichen Ueberblick behandeln die einzelnen Kapitel: I. Allgemeines über Luftkräfte, Luftwiderstand. — II. Die Tragfläche. — III. Die Luftschraube. — IV. Der Motor. — V. Zusammenwirken von Tragfläche, Luftschraube und Motor. — VI. Steuerung, Stabilität und Stabilisierung. — VII. Abflug, Landung, Navigation.

Der ersten Auflage (1918) gegenüber ist das Buch vermehrt durch die Aufnahme neuerer Versuchsergebnisse sowie verschiedener Angaben, deren Veröffentlichung während des Krieges untunlich war. Mises. 212

Dr. L. **SCHILLER,** Untersuchungen über laminare und turbulente Strömung. (Leipziger Habilitationsarbeit.) Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 248. Verlag des Vereines deutscher Ingenieure, Berlin 1922. 36 S.

Der Inhalt dieses Forschungsheftes unterscheidet sich von dem der beiden Aufsätze in dieser Zeitschrift (Bd. 1 1921 S. 436—444, Bd. 2 1922 S. 96—106) durch einige etwas weitergehende Ausführungen und genaue Angaben über die Versuchseinrichtung und die einzelnen Versuchsergebnisse. Wer für die moderne experimentelle Forschung in der Hydromechanik Interesse besitzt, wird mit Vorteil die eingehendere Darstellung benutzen.

Mises. 219

NACHRICHTEN

Max Abraham †. Am 16. November d. Js. verschied in München an den Folgen eines schweren Leidens Prof. Dr. Max Abraham, dessen letzte wissenschaftliche Arbeit in dieser Zeitschrift veröffentlicht worden ist[1]). Abraham, der 1875 in Danzig geboren wurde, promovierte in Berlin 1897 und war 1900—1909 Privatdozent an der Universität Göttingen. Einen Teil dieser Zeit hindurch war er von Göttingen beurlaubt und lehrte an einer amerikanischen Universität. Im Jahre 1909 wurde er Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule in Mailand und verlor diese Stelle erst beim Eintritt Italiens in den Krieg gegen Deutschland. Einem weiteren Kreis von Ingenieuren ist Abraham hauptsächlich durch das, ursprünglich gemeinsam mit A. Föppl verfaßte, weit verbreitete Lehrbuch der Elektrizitätslehre bekannt. Seine wissenschaftlichen Arbeiten, die ihm einen bleibenden Namen in der Geschichte der Physik gesichert haben, erstreckten sich auf verschiedene Gebiete der Elektrizitätstheorie und der Optik.

Deutsche Ingenieurwissenschaftliche Vereinigung. Der vorläufige Ausschuß hat beschlossen, daß die Vereinigung bis zur endgültigen Annahme der Satzungen den Doppelnamen führen soll »Deutsche Ingenieurwissenschaftliche Vereinigung—Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik«. Der vorläufige Beitrag für das erste Jahr ist von 50 ℳ auf 150 ℳ erhöht worden. Die bisherigen Mitglieder werden dringend gebeten, die Restzahlung von 100 ℳ möglichst umgehend auf das Postscheckkonto des Geschäftsführers Prof. v. Mises, Berlin 142813 zu leisten. Anmeldungen neuer Mitglieder werden vom Geschäftsführer sowie vom Vorsitzenden und jedem Ausschußmitglied entgegengenommen.

Technisch-Wissenschaftliches Vortragswesen Berlin. Im laufenden Winter werden eine größere Reihe von Vorträgen und von Kursen veranstaltet, von denen wir die folgenden besonders hervorheben: Vorträge zur Schwingungslehre von Direktor W. Hahnemann-Kiel; Kurse über Mathematik und Mechanik von Prof. Dr. R. Fuchs-Charlottenburg, Dr. Rückle-Berlin; über Statik und Dynamik von Prof. Dr. M. Weber-Charlottenburg; über Schwingungslehre von demselben; über konforme Abbildung und ihre Anwendung von Prof. Wallenberg-Charlottenburg; über Wärmelehre von Dipl.-Ing. Tannenbaum AEG. Berlin. Nähere Auskünfte darüber erteilt die Geschäftsstelle des TWV im Ingenieurhaus Berlin. 243

Universitäts-Vorlesungen aus der angewandten Mathematik. Eine Uebersicht der im laufenden Wintersemester an den 23 deutschen Universitäten angekündigten Vorlesungen und Uebungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik wird dem Leser aus manchen Gründen von Interesse sein. In der folgenden Zusammenstellung ist die angewandte Mathematik nur im engsten Sinne berücksichtigt. Nicht aufgenommen wurden zur Physik (auch technischen Physik) gehörende Vorlesungen, ebensowenig Astronomie, Geodäste, Meteorologie usw.; Mechanik nur, soweit sie von Mathematikern gelesen wird. (3 V., 1 Ü. bedeutet 3 Stunden Vorlesungen, 1 Stunde Uebungen.)

Berlin. Darstellende Geometrie. 4 V. v. Mises.
Geometrische Konstruktionen. 2 V. v. Mises.
Seminar über Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2 Ü. v. Mises.
Mathematisches Praktikum für Anfänger II. 3 Ü. v. Mises.
Statistische Methoden der Naturwissenschaft. 1 V. Ad. Schmidt.
Seminar für wissenschaftliches Rechnen. 2 Ü. F. Cohn.

Bonn. Axonometrie und Perspektive. 2 V. Beck.

[1]) Diese Zeitschr. 2, 1922, S. 109 bis 131.

Zeichnerische Methoden der technischen Mechanik, insbesondere graphische Statik. 2 V. Ruhm.

Breslau. —

Erlangen. Darstellende Geometrie II. 4 V., 2 Ü. Bilz.
Politische Arithmetik. 2 V. Bilz.

Frankfurt. Graphische und numerische Methoden. 2 V., 2 Ü. Reinhardt.
Wahrscheinlichkeitsrechnung. 3 V. Brendel.

Freiburg. Mathematik des Geldverkehrs. 1 V. Loewy.
Darstellende Geometrie I. 2 V., 2 Ü. Seith.
Graphische Statik. 2 V. Ansel.

Gießen. Graphische Statik. 2 V., 1 Ü. Falckenberg.
Numerische und graphische Analysis. 3 V., 1 Ü. Maennchen.

Göttingen. Darstellende Geometrie II. 3 V., 2 Ü. König.
Mathematische Statistik und Versicherungsmathematik. 3 V., 2 Ü. Bernstein.
Versicherungsrechnung mit schriftlichen Uebungen. 2 V. Bernstein.
Ausgewählte Fragen der angewandten Mathematik. 2 V. Runge und König.
Mechanik der Kontinua. 4 V. Prandtl.
Anleitung zum selbständigen Arbeiten. Täglich. Prandtl.

Greifswald. Mechanik schwimmender Körper (Theorie des Schiffes). 2 V. Vahlen.
Darstellende Geometrie mit Uebungen. 4 Std. Thaer.

Halle. Graphische und numerische Methoden der angewandten Mathematik. 4 V., 2 Ü. Doetsch.
Versicherungsmathematik. 2 V., 1 Ü. Doetsch.

Hamburg. Mechanik der Kontinua. 4 V., 1 Ü. Ostrowski.
Seminar über höhere Mechanik. 2 Ü. Ostrowski.
Versicherungswissenschaftliche Uebungen. 2 Ü. Bruck, Riebesell, Sieveking.

Heidelberg. Politische Arithmetik einschl. Versicherungswesen. 2 V. Bopp.

Jena. Technische Mechanik II. 4 V. Winkelmann.
Graphische Methoden und graphisches Rechnen. 2 V., 1 Ü. Winkelmann.
Uebungen in angewandter Mathematik für Fortgeschrittene. 2 Std. Winkelmann.
Analytische Mechanik. 3 V., 1 Ü. Koebe.

Kiel. Graphische und numerische Methoden. 4 V. Neuendorff.
Einleitung in die mathematische Statistik. 2 V., 2. Ü. Wirtz.
Vorträge und Uebungen aus der angewandten Mathematik. 2 Std., 14tägig. Wirtz.

Köln. Politische Arithmetik. 2 V. Druxes.
Versicherungsmathematik. 1 V. Druxes.

Königsberg. Versicherungsmathematik mit Uebungen. 5 Std. Kalusa.

Leipzig. Mechanik. 5 V. Schnee.
Uebungen zur darstellenden Geometrie. 2 Ü. Lichtenstein.

Marburg. Graphische Methoden und numerisches Rechnen. 2 Ü. von Dalwigk.

München. Darstellende Geometrie II. 4 V., 3 Ü. Hartogs.
Versicherungswissenschaftliche Uebungen. 2 Std. Böhm.

Münster. Einführung in die Versicherungsmathematik. 2 V. Daniel.
Graphische Methoden. 2 V., 2 Ü. Geilen.
Graphische Statik mit Uebungen. 3 Std. Schewior.

Rostock. Mechanik. 4 V. Pohlhausen.
Numerisches und graphisches Rechnen. 2 V. Pohlhausen.
Mechanische Grundlagen des Segelfluges. 2 V. Pohlhausen.

Tübingen. —

Würzburg. —

Doetsch.

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Ueber Umsteuerungen. Zu dem in dieser Zeitschrift erschienenen Aufsatz von Hrn. W. Jung, »Ueber Umsteuerungen« (Bd. 1, 1921, S. 455 bis 463), möchte ich in einigen Punkten Stellung nehmen.

Was die Beschleunigungskonstruktionen anbelangt, so sei darauf hingewiesen, daß M. Grübler in seinem 1917 erschienenen Buche »Getriebelehre« ganz allgemeine Konstruktionen für die Beschleunigungen bei zusammengesetzten Mechanismen angegeben hat. Allerdings ist die Dissertation von W. Jung, die seinem Aufsatz zugrund eliegt, bereits 1913 veröffentlicht worden.

Ferner möchte ich auf die Zwangläufigkeitsbetrachtungen des Verfassers etwas eingehen. Die Ergebnisse dieser Betrachtungen sind zwar nicht falsch, doch ist ihre Schlußweise zu beanstanden, was mir insbesondere deshalb wesentlich erscheint, weil die Zwanglauftheorie völlig streng behandelt und zu einfachen, durchsichtigen Ergebnissen geführt worden ist[1]).

[1]) Vergl. hierüber M. Grübler, Allgem. Eigenschaften der zwangläufigen ebenen kinemat. Ketten, »Civilingenieur« 1883, S. 167 bis 200, und Verhandl. des Vereins zur Förderung des Gewerbefleißes in Preußen 1885, S. 179 bis 223. — Ferner L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, 1888, Abschn. 183, S. 423, und A. Schoenflies u. M. Grübler, Kinematik, Encykl. d. math. Wissenschaften, Bd. IV, 1. Teilband, S. 267 bis 273.

Diese Ergebnisse bestehen im wesentlichen darin, daß die Zwangläufigkeit der kinematischen Ketten unabhängig von den Abmessungen der einzelnen Glieder ist und daß sich die notwendige und hinreichende Bedingung für die Zwangläufigkeit durch eine einzige ganzzahlige Beziehung zwischen der Zahl der Glieder und der der Elementenpaare ausdrücken läßt. Diese Beziehung hat bei den Mechanismen, bei denen nur niedere Elementenpaare (Gelenke und Schiebepaare) auftreten und um die es sich in der Arbeit von W. Jung ausschließlich handelt, die Form

$$2g - 3n + 4 = 0,$$

wobei g die Zahl der niederen Elementenpaare und n die der Glieder bedeutet. Man erkennt sofort, daß z. B. die von W. Jung behandelte Baker-Pilliod-Steuerung, bei der $n = 14$ und $g = 19$ ist, die obige Bedingung erfüllt und daher zwangläufig ist. Die angegebene Bedingungsgleichung liefert ein strenges und dabei viel einfacheres Kriterium für die Zwangläufigkeit als die entsprechenden Betrachtungen von W. Jung, auf die ich noch in zwei Punkten eingehen will. Wenn man den Mechanismus, dessen Zwangläufigkeit untersucht werden soll, durch Vertauschung oder sonstige Veränderung von Gliedern in einen anderen überführt, so müßte man, wenn die Schlußweise streng sein soll, zunächst nachweisen, daß durch diese Veränderung die Zwangläufigkeit nicht beeinträchtigt wird. Der zweite Punkt betrifft die sogenannten imaginären Gelenke, unter denen in der Arbeit von W. Jung die Pole der Bewegung verstanden werden und auf die ich unten noch einmal zu sprechen komme. Sind bei einem Mechanismus die Pole der gegenseitigen Bewegung der Glieder bekannt, so ist damit die Zwangläufigkeit schon gewährleistet; denn durch die Pole sind die gegenseitigen Bewegungen aller Glieder völlig bestimmt. Wenn man bei einem Mechanismus, dessen Pole bekannt sind, vier beliebige Glieder herausgreift und diese als eine Vierzylinderkette mit ganz oder teilweise imaginären Gelenken anspricht, um daraus Schlüsse über die Zwangläufigkeit zu ziehen, so sucht man etwas zu beweisen, was schon in der Voraussetzung enthalten ist.

Zum Schluß will ich noch auf einen Punkt eingehen, der mehr formaler Natur und daher weniger wichtig ist, nämlich auf die bereits erwähnten imaginären Gelenke, einen Ausdruck, den W. Jung mitunter für die Pole je zweier Glieder verwendet. Die Einführung der imaginären Gelenke in die Kinematik ist nach den vorstehenden Ausführungen jedenfalls nicht notwendig; sie ist im Gegenteil meines Erachtens begrifflich zu beanstanden, da das Gelenk gegenüber dem allgemeineren Begriffe des Poles der Bewegung durch die wesentliche Eigenschaft gekennzeichnet ist, daß es während der ganzen Dauer der Bewegung seine Lage in den beiden Gliedern, die es verbindet, nicht ändert. Die Gelenke sind kinematisch als spezielle Pole anzusprechen, und es erscheint mir daher nicht gerechtfertigt, die Pole als »imaginäre« Gelenke zu bezeichnen und diesen die wirklichen Gelenke als »reelle« Gelenke gegenüberzustellen.

Dresden. H. Alt. 172

* * *

Herr W. Jung erwidert auf die Bemerkungen von Hrn. H. Alt folgendes:

Das allgemeine Verfahren der Auflösung bei der Untersuchung einer Zwangläufigkeit führt stets zu richtigen Ergebnissen, wenn es auch die von der Kritik verpönte Anschaulichkeit hat, die einer »streng« aufgebauten Theorie abgeht. Prof. Rob. Land, sicher ein ausgezeichneter Forscher, sagt: »Bei der Lösung vieler, bisher schwieriger technisch-wissenschaftlicher Aufgaben kommt es weniger auf große mathematische Kenntnisse an, als auf sachliche Vertiefung bei möglichst anschaulicher Darstellung des Gegenstandes unter Benutzung einfacher elementarer Hilfsmittel.«

Daß nur der Gebrauch der reellen, nicht aber der imaginären Gelenke erlaubt sein soll, ist ein persönliches Dogma, welches sich ebenfalls gegen die Anschauung richtet. Durch diese Richtung allein ist es wissenschaftlich nicht zu begründen. 172a

Ueber eine Analogie zwischen rotierender Scheibe und belasteter Kreisplatte (Nachtrag). Durch Herrn Ober-Ing. Heinrich Holzer in Nürnberg bin ich auf dessen Arbeit »Platten mit veränderlicher Dicke und günstige Formen solcher Platten« in der Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen 1918 aufmerksam gemacht worden, worin die kreisförmige Platte von veränderlicher Dicke bereits behandelt ist. Insbesondere ist das in meinem Aufsatz »Ueber eine Analogie zwischen rotierender Scheibe und belasteter Kreisplatte«, Band 2 dieser Zeitschrift, S. 92—96, betrachtete Beispiel einer Platte von veränderlicher Dicke unter konstantem Druck in der genannten Arbeit von Hrn. Holzer schon durchgeführt worden. Der wesentliche Inhalt meines Aufsatzes, nämlich die Durchführung der Analogie zwischen rotierender Scheibe und belasteter Kreisplatte wird jedoch durch die Arbeit von Hrn. Holzer nicht berührt.

Ferner hat mich Hr. Alexander Fischer, Göding, auf eine von ihm verfaßte, mir bisher nicht bekannt gewesene Abhandlung »Beitrag zur genauen Berechnung der Dampfturbinenscheibenräder mit veränderlicher Dicke« (Zeitschr. österr. Ing.- u. Arch.-Verein 1922) hingewiesen; auch durch diese wird der eigentliche Inahlt meiner Veröffentlichung nicht berührt.

L. Föppl. München. 190

(Redaktionsschluß 28. Dezember 1922.)

Verantwortlich für die Schriftleitung Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43.
Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von A. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, H. MÜLLER-BRESLAU-Charlottenburg, L. PRANDTL-Göttingen und R. RÜDENBERG-Berlin

:: Band 2 ::
Dezember 1922

:: Heft 6 ::
Seite 409 bis 480

UNIVERSITY OF MINNESOTA LIBRARY
RECEIVED
FEB 26 1923

INHALT:

HAUPTAUFSÄTZE: LAGALLY, Kräfte strömender Flüssigkeiten / KÖNIG, Potentialströmung durch Gitter / STÜBLER, Hyperboloidische Verzahnung / BASCH, Genauigkeitssteigerung durch Hinzufügen einer neuen Beobachtung

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE: GALLE, Neuere Integraphen

KURZE AUSZÜGE Festigkeitslehre

KLEINE MITTEILUNGEN

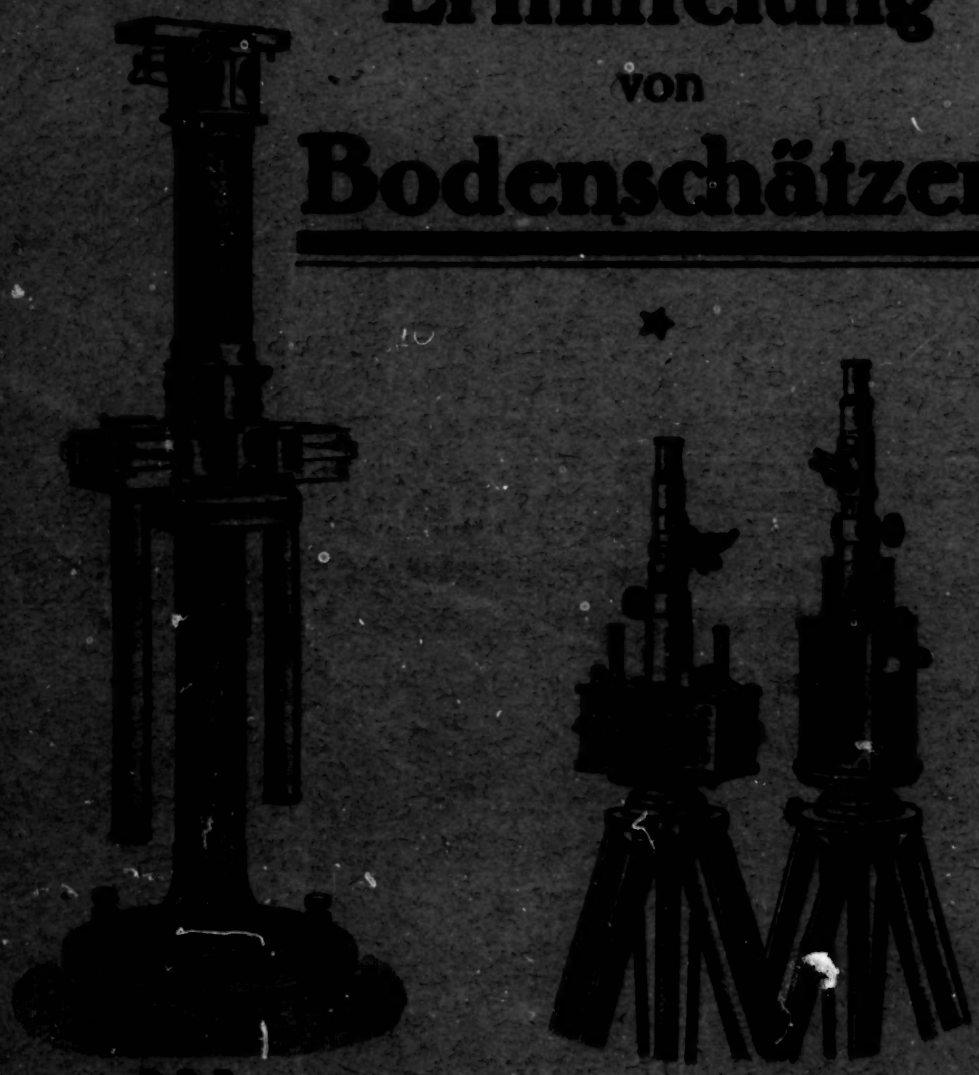
BUCHBESPRECHUNGEN

NACHRICHTEN

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

VERLAG DES VEREINES DEUTSCHER INGENIEURE

Instrumente zur Ermittelung von Bodenschätzen



D.R.P.

ASKANIA-WERKE AKTIENGESELLSCHAFT

BAMBERGWERK

BERLIN-FRIEDENAU • KAISER-ALLEE 87-88

DESSAU / WIEN / ROTTERDAM

GESCHÄFTSBEDINGUNGEN

der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik

Alle Zuschriften, die den wissenschaftlichen Inhalt der Zeitschrift betreffen, sind an den Herausgeber,

Professor Dr. v. Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstr. 43,

alle übrigen Zuschriften an den Verlag zu richten.

Bezugsbedingungen

Bezugszeit: Die „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" erscheint jährlich sechsmal am Ende eines jeden zweiten Monats. Beginn mit dem Kalenderjahr. Umfang des Heftes rund 5 Bogen.

Bezugspreis beträgt halbjährlich 600 ℳ, für Mitglieder des Vereines deutscher Ingenieure oder der deutschen Mathematiker-Vereinigung bei Bezug durch den Verlag 450 ℳ. Einzelheft 300 ℳ, für Mitglieder 240 ℳ. Für das Ausland gelten besondere Preise, über die der Verlag Auskunft gibt.

Die Bezugsgebühren sind handelsüblich vorweg ohne besondere Rechnungslegung fällig. Zahlungen wolle man auf Postscheckkonto 49405 Berlin überweisen. Die Lieferung erfolgt durch Postüberweisung.

Erneuerung des Bezugs und Abbestellung: Der Bezug erneuert sich von Jahrgang zu Jahrgang ohne förmliche Neubestellung.

Etwaige Abbestellungen werden nur mit Ablauf der laufenden Bezugszeit Ende des Jahres ausgeführt.

Auslieferung für den Buchhandel: Verlagsbuchhandlung Julius Springer, Berlin W 9.

Die Lieferung geschieht auf Gefahr der Bezieher. Kostenlose Nachlieferung verloren gegangener Hefte erfolgt nicht.

Anzeigenpreise

	1/1	1/2	1/4	1/8 Seite
Satz-	125×205 mm	125×102 mm	62×102 mm	62×51 mm
fläche	26250 ℳ	14000 ℳ	7875 ℳ	4000 ℳ

bei 6maliger Aufnahme jährlich 5 vH Nachlaß.

Dieser Preis versteht sich unter Vorbehalt notwendig werdender Preiserhöhungen. Glaubt der Auftraggeber den ihnen berechneten Zuschlag nicht weiter anerkennen zu können, so steht es ihm frei, den Anzeigenraum oder die Aufnahmezahl bis zur letztbewilligten Auftragssumme einzuschränken.

Rechnung: Die Rechnungslegung erfolgt monatlich, bei kleinen Anzeigen sofort.

Zahlung: Die Begleichung hat spätestens innerhalb zwei Wochen vom Tage der Rechnungslegung ab abzugs- und spesenfrei zu erfolgen. Bei Ueberschreitung des Zahlungstermines werden Verzugszinsen in Rechnung gesetzt.

Belege: Es werden nur Belegausschnitte geliefert, aus denen Heftnummer und Anzeigenauftrag zu ersehen ist. Vollständige Belege, ebenso besondere Anzeigenanhänge können nicht geliefert werden.

Erfüllungsort: Für beide Teile der Wohnort des Verlegers als Erfüllungsort gültig.

Annahmeschluß: Am 10. des Erscheinungsmonats.

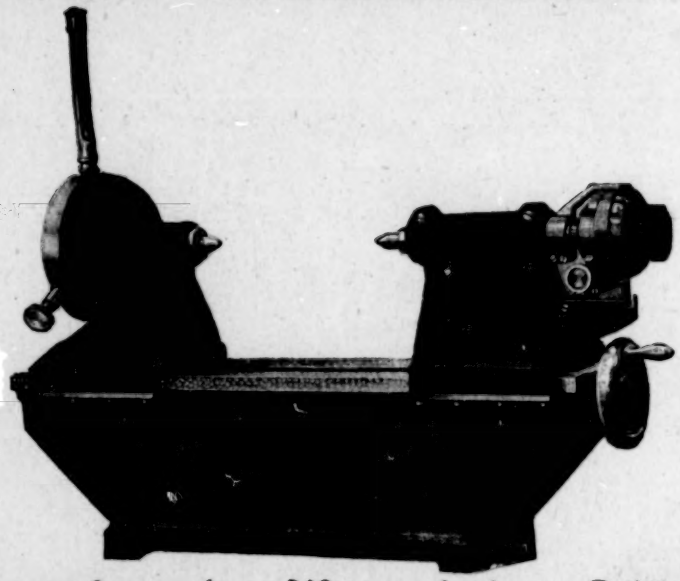
Verlag des Vereines deutscher Ingenieure, Berlin SW 19, Beuthstr. 7

Schacht & Westerich
Hamburg 1 * Gr. Bäcker Str. 16-24

Rechenschieber aller Systeme
Präzisions-Reißzeuge (Neusilber)
Polar- u. Kugelrollen-Planimeter
Pantographen * Integratoren
Einrichtungen kompl. Zeichensäle

Wir bitten Sonder-Angebote einzuholen.

Hommel-Meßmaschinen



Hommelwerke Mannheim-Käfertal

Niederlassungen: H. Hommel · Mainz · Köln · Berlin
Leipzig · Saarbrücken · Mannheim · Stuttgart · München · Wien
Zentralverwaltung: Hommel-Konzern, Mainz

THALES

DIE RECHENMASCHINE FÜR JEDERMANN

Rechnen Sie
maschinell-
Sie sparen Zeit, Geld
und Arbeitskraft!

THALESWERK M.B.H.
RECHENMASCHINENFABRIK
RASTATT / B.

SARTORIUS-WERKE A.-G.

Gegr. 1870 * **GÖTTINGEN** Prov. Hannover * Gegr. 1870

Abteilung IV:

Vermessungs - Instrumente

in bewährter Konstruktion
und sauberster Ausführung.

Theodolite, Nivelliere, Bussolen

Winkelprismen

Astronomische Instrumente

Katalog „Geo 49" kostenfrei

OTT-PLANIMETER

OTT-FLÜGEL

OTT-PEGEL

sind Qualitäts-
marken

A. OTT, KEMPTEN (Bayern)

Laboratorien / Mathematiker / Physiker / Geometer / Prüfanstalten / Forschungsstätten /

bilden
den Leserkreis
dieser Zeitschrift,
die demnach ein
vorzügliches
Werbemittel
ist.

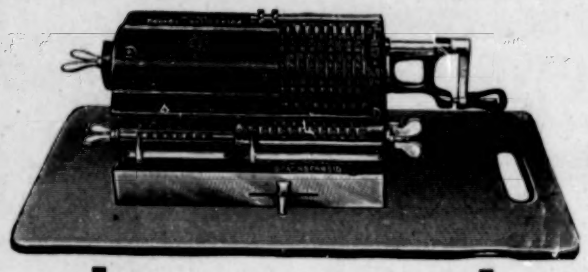
Werkstätten für **Präzisionsmechanik**

Sommer & Runge SuR BERLIN **Berlin-Friedenau**

Bennigsen- Straße 23/24

Längenteilmaschinen / Laboratoriumsapparate

Wir übernehmen: Die Vertretung und den Vertrieb neuer Apparate. Neu- und Umkonstruktion von wissenschaftlichen und technischen Apparaturen und Gerätschaften.



BRUNSVIGA-Rechenmaschine

System Trinks

rechnet Alles!

Einfachste Handhabung!
Nie versagend!

Verlangen Sie Prospekt P
von den alleinig. Fabrikanten

Grimme, Natalis & Co., A.-G., Braunschweig

Die **Universal-Rechenmaschine**

Leichte Nullstellung
durch Kurbeldrehung
// Automatische //
Schlittenverschiebung

Vorführung kostenlos. Garantie

*

Braunschweiger
Rechenmaschinen-Fabrik
REMA m. b. H.,
Braunschweig

Untersuchungen über laminare und turbulente Strömung

von Dr. **L. SCHILLER**

Heft 248 der Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens
Herausgegeben vom Verein deutscher Ingenieure
G. Z. 1.–

Diese, auf den Forschungen von Reynolds aufbauende Arbeit klärt durch neue, sehr eingehende Versuche den Einfluß einer stetigen Störung am Rohreinlauf sowie den Einfluß der Anlauflänge auf die Größe der „kritischen Zahl". Im weiteren werden Abweichungen vom Poiseuilleschen Gesetz nachgewiesen, die in den klassischen Arbeiten von Reynolds und seiner Schule nicht beachtet wurden. Die Erklärung hierfür liefert die Prandtlsche Grenzschichtentheorie. Schließlich wird der Druckverlust durch Eintritt und Anlauf bestimmt. – Außer ihrer hervorragenden wissenschaftlichen Bedeutung, die sie neben die Arbeiten von Reynolds und Blasius stellt, hat diese Arbeit den großen praktischen Wert, daß sie der Zähigkeitsbestimmung von Flüssigkeiten mit kurzen Rohren den Weg ebnet und auch den bekannten Englerschen Apparat für die Ermittlung der absoluten Zähigkeit geeignet macht.

Die eingesetzte Grundzahl (G. Z.) ergibt mit dem jeweils geltenden Umrechnungsschlüssel des Börsenvereins der deutschen Buchhändler – am 27. Dezember 600 – vervielfacht, den Verkaufspreis in Mark. Ueber den zurzeit geltenden Schlüssel geben alle Buchhandlungen bereitwilligst Auskunft

Zu beziehen durch die

Verlagsbuchhandlung von Julius Springer,
Berlin W 9, Linkstr. 23/24.

Verlag des Vereines deutscher Ingenieure, Berlin NW 7.
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Willy Kuhle, Berlin.
Druck: A. W. Schade, Berlin N 39, Schulzendorfer Strasse 26.

PRESSLUFT-
WERKZEUGE
für die
METALLINDUSTRIE
liefert als SPEZIALITÄT die
PRESSLUFTWERKZEUG-U
MASCHINENBAU-A.G.
BERLIN S.O.16-BRÜCKENSTR.6
TELEGRAMME: PRESSLUFTFABRIK
FERNSPRECHER: MORITZPL. 7403 u. 7404

ZEISS Punktal-Gläser

besitzen für jeden Grad von Fehlsichtigkeit die wissenschaftlich errechnete, jeweils zweckmäßigste Durchbiegung — verbürgt durch [illegible] in allen Arbeitsgängen, vom ersten Schliff bis zur letzten Prüfung [illegible] überwachte, peinlichst genaue Ausführung. Unter [illegible] Anpassung an die Beweglichkeit des [illegible] bieten daher Zeiss-Punktalgläser ein angenehm großes Blickfeld mit gleichmäßig scharfen Bildern in jeder Blickrichtung von der Mitte bis zum Rande des Glases. [illegible] empfindet der Brillenträger auf einmal [illegible] gesehen, als er sich noch mit mangelhaften [illegible] — in der Berufstätigkeit und draußen [illegible] der Jagd, auf dem Sportplatz, [illegible] er hinter dem Normalsichtigen zurück.

Zeiss-Vorhänger

[illegible] Nahbrille bzw. die innere Bifokalbrille. Der letzteren gegenüber hat die Zeiss-Punktalglasbrille mit Vorhänger den großen Vorzug der schnellen und leichten Abnehmbarkeit des Vorhängers, wenn [illegible] gebraucht wird. Es steht alsdann dem Brillenträger wieder das ganze große Blickfeld seiner Punktal-Fernbrille zur Verfügung und besonders der beim Treppenmessen, [illegible] auf unwegsamen Pfaden usw. für die Fernsicht [illegible] wichtige untere Teil des Glases. Im Bedarfsfalle [illegible] der Vorhänger die Punktal-Fernbrille [illegible] in eine Zweistärkenbrille. Jeder gute Optiker paßt Zeiss-Punktalgläser u. Zeiss-Vorhänger an.

[illegible] „[illegible] 150" kostenfrei.

CARL ZEISS/JENA

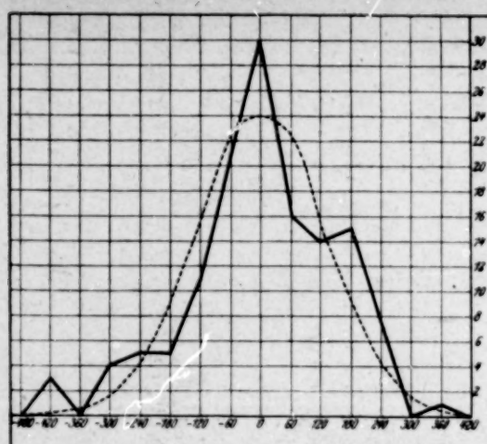


Abb. 3. Reduzierte Fehlerverteilung nach Nernst.

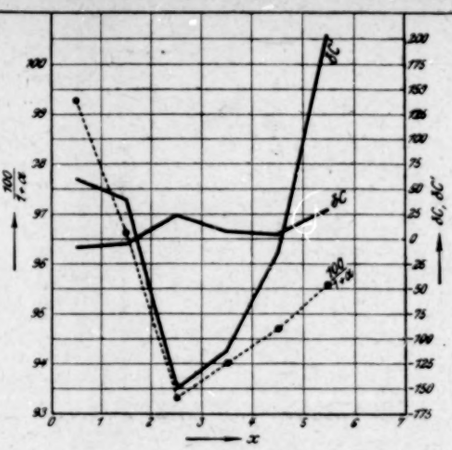


Abb. 4. Verlauf der Fehler und der α-Korrektur in Abhängigkeit von x.

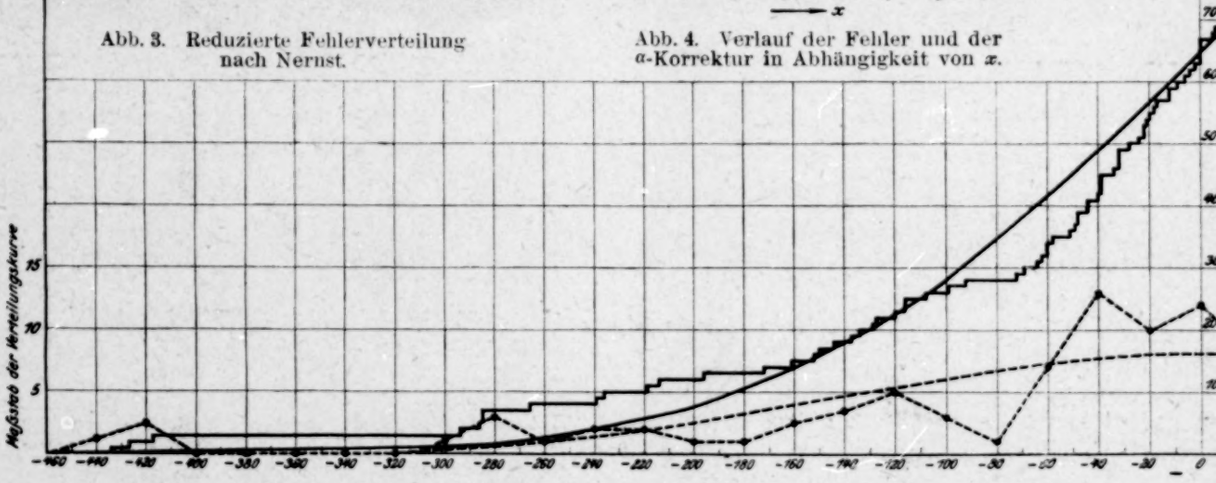


Abb. 2

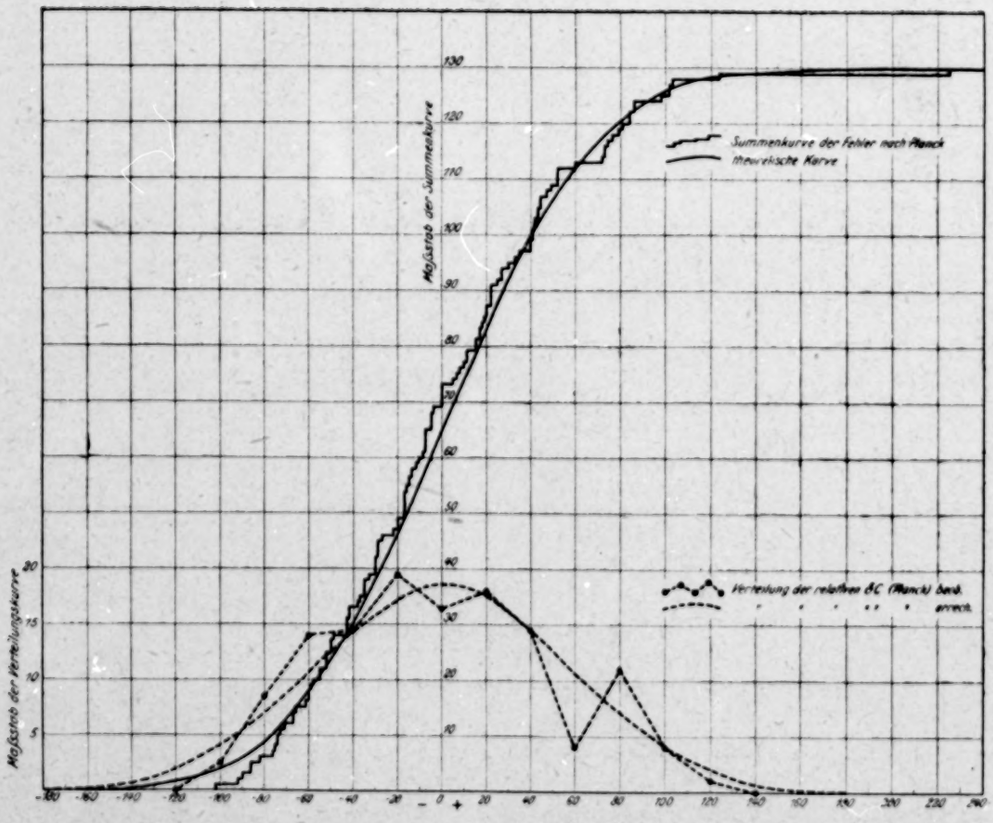
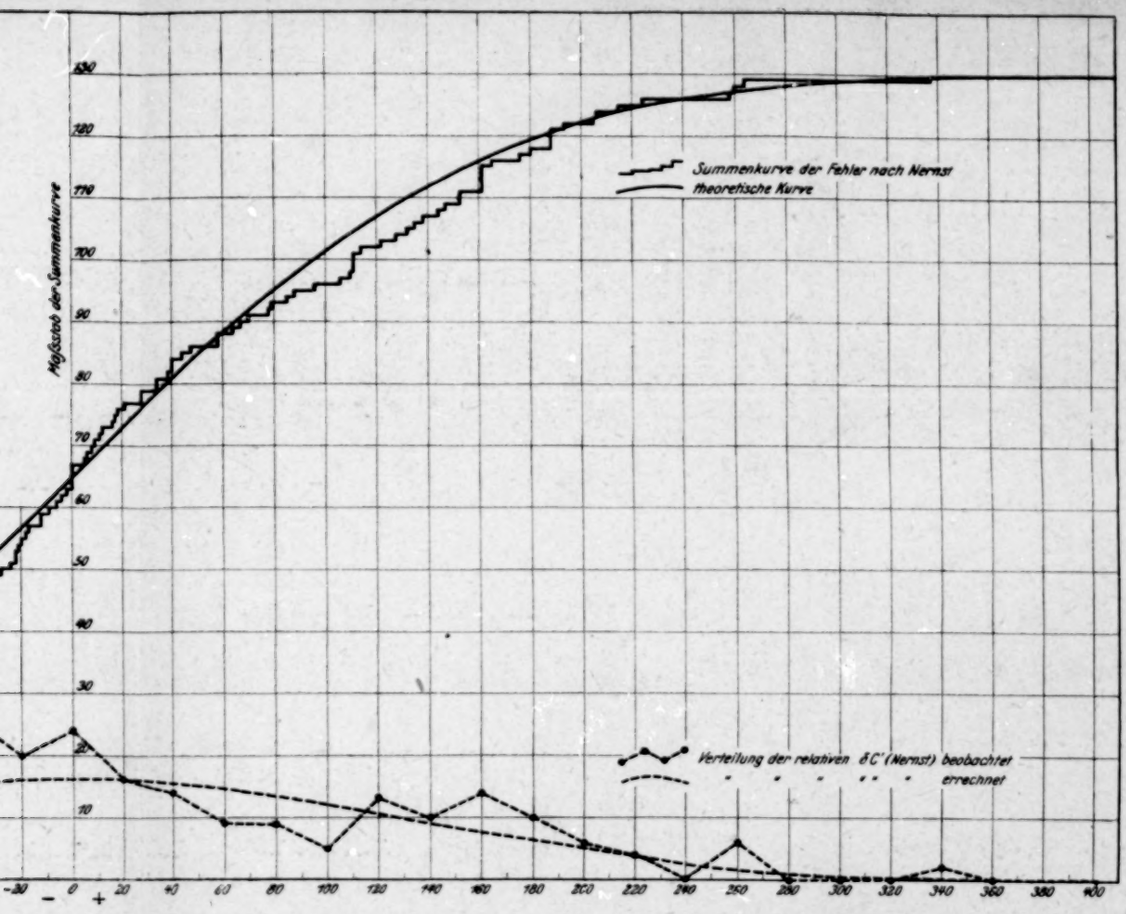


Abb. 1


Maßstab der Summenkurve
Summenkurve der Fehler nach Nernst
theoretische Kurve
Verteilung der relativen δC' (Nernst) beobachtet
" " " " " " errechnet

bb. 2

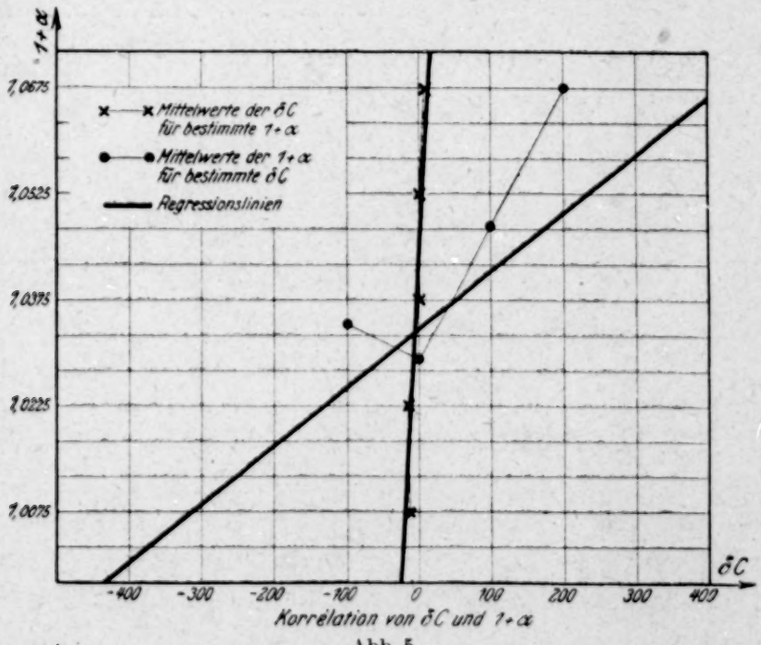
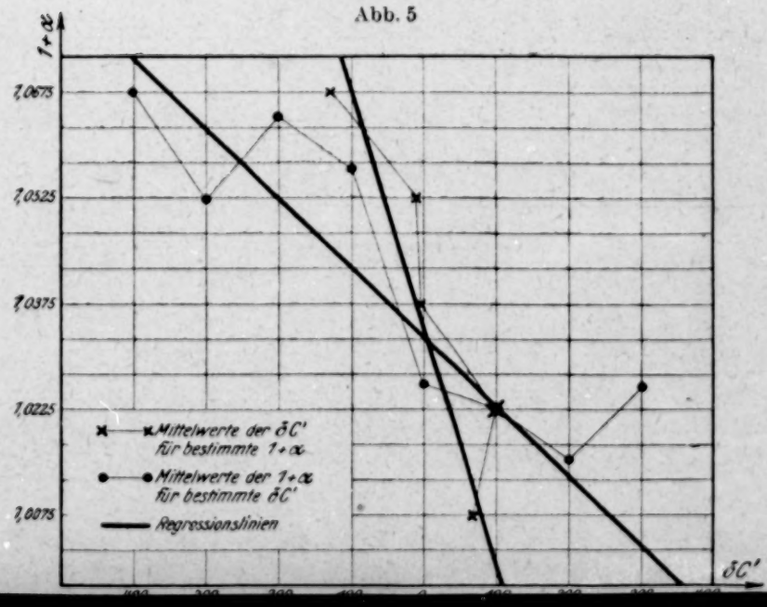

1+α
Mittelwerte der δC für bestimmte 1+α
Mittelwerte der 1+α für bestimmte δC
Regressionslinien
δC
Korrelation von δC und 1+α

Abb. 5


1+α
Mittelwerte der δC' für bestimmte 1+α
Mittelwerte der 1+α für bestimmte δC'
Regressionslinien
δC'